Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова
т. XXXVII, вып. 1, 1958 г.

ЗАМЕЧАНИЯ К ВЫВОДУ ФОРМУЛ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАСЕЧКИ

В. Г. Зданович

При создании съемочного обоснования радиогеодезическими методами координаты точек обычно определяются из решения линейных засечек по двум измеренным расстояниям с применением формул

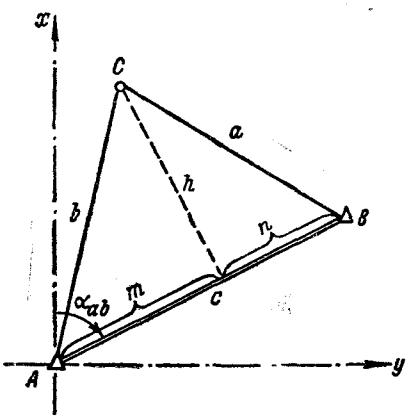
$$x_c = x_a + q'(x_a - x_b) - p(y_a - y_b) = x_b + q(x_a - x_b) - p(y_a - y_b);$$

$$y_c = y_a + p(x_a - x_b) + q'(y_a - y_b) = y_b + p(x_a - x_b) + q(y_a - y_b), \quad (1)$$

где

$$\left.\begin{aligned} q &= 0{,}5 + \frac{a^2 - b^2}{2c^2}, \quad q' = -0{,}5 + \frac{a^2 - b^2}{2c^2} = q - 1 \\ p &= \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - q^2} = \sqrt{\frac{b^2}{c^2} - q'^2} \end{aligned}\right\}, \quad (2)$$

где x_a, y_a, x_b, y_b, x_c, y_c — координаты вершин треугольника ABC, (a, b, c — длины сторон треугольника ABC (рис. 1).



Определение пункта линейной засечкой

Формулы (1) были получены В. А. Полевым [1] путем совместного решения двух уравнений окружностей

$$(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2 = b^2,$$
$$(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2 = a^2.$$

Такое решение связано с длительными и громоздкими преобразованиями.

Учитывая, что определение пунктов решением линейной засечки находит все более широкое практическое применение и по-видимому заслуживает включения в учебные пособия и руководства по геодезии, изложение наиболее простого вывода формул (1) представляет интерес.

Этому вопросу и посвящена настоящая заметка, в которой приведены два варианта вывода формул (1), значительно более простых, нежели вывод, данный В. А. Полевым [1].

Первый вариант вывода формул (1). В качестве исходных используем известные формулы Юнга:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{x_a \operatorname{ctg} B + x_b \operatorname{ctg} A - y_a + y_b}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} \\ y_c &= \frac{y_a \operatorname{ctg} B + y_b \operatorname{ctg} A + x_a - x_b}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

которые перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} x_c &= x_a - \frac{\operatorname{ctg} A}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}(x_a - x_b) - \frac{y_a - y_b}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} = \\ &= x_b + \frac{\operatorname{ctg} B}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}(x_a - x_b) - \frac{y_a - y_b}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}, \\ y_c &= y_a + \frac{x_a - x_b}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} - \frac{\operatorname{ctg} A}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}(y_a - y_b) = \\ &= y_b + \frac{x_a - x_b}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} + \frac{\operatorname{ctg} B}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}(y_a - y_b). \end{aligned} \tag{4}$$

Вводя обозначения

$$p = \frac{1}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}, \quad q = \frac{\operatorname{ctg} B}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}, \quad q' = \frac{\operatorname{ctg} A}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} = q - 1, \tag{5}$$

сразу же получим формулы (1).

Для выражения q, q' и p в функции длин сторон треугольника a, b, c замечаем, что согласно рис. 1

$$\operatorname{ctg} A = \frac{m}{h}, \quad \operatorname{ctg} B = \frac{n}{h}, \quad m + n = c, \quad h^2 = b^2 - m^2,$$

а следовательно,

$$q = \frac{n}{c} = \frac{c - m}{c}, \qquad q' = -\frac{m}{c}, \qquad p = \frac{h}{c} = \frac{\sqrt{b^2 - m^2}}{c}. \tag{6}$$

Используя уравнение

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

и замечая, что $\cos A = m : b$, находим

$$m^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}. \tag{7}$$

После подстановки значения m из (7) в выражения (6) получим искомые формулы (2).

Второй вариант вывода формулы (1). Непосредственно из рисунка следуют формулы, предложенные С. А. Бутлером [2]:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= x_a + m\cos\alpha_{ab} + h\sin\alpha_{ab} = x_b - (c - m)\cos\alpha_{ab} + h\sin\alpha_{ab} \\ y_c &= y_a - h\cos\alpha_{ab} + m\sin\alpha_{ab} = y_b - h\cos\alpha_{ab} - (c - m)\sin\alpha_{ab} \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

где α_{ab} — дирекционный угол стороны треугольника $A - B$.

Умножив и разделив на c два последних слагаемых формул (8) и заменяя

$$c\cos\alpha_{ab} = -(x_a - x_b), \quad c\sin\alpha_{ab} = -(y_a - y_b),$$

находим

$$x_c = x_a - \frac{m}{c}(x_a - x_b) - \frac{h}{c}(y_a - y_b) =$$

$$= x_b + \frac{c-m}{c}(x_a - x_b) - \frac{h}{c}(y_a - y_b)$$

$$y_c = y_a + \frac{h}{c}(x_a - x_b) - \frac{m}{c}(y_a - y_b) =$$

$$= y_b + \frac{h}{c}(x_a - x_b) + \frac{c-m}{c}(y_a - y_b) \qquad (9)$$

Вводя обозначения (6), получим сразу же искомые формулы (1). Переход от формул (6) к формулам (2) осуществляется с помощью уравнения (7) так же, как и в первом варианте вывода.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Полевой В. А. Вычисление координат пункта по измеренным сторонам треугольника. Информационно-технический сб., ВТС № IV, 1949.

2. Бутлер С. А. Уравнение тригонометрических сетей, определенных длинами сторон. «Геодезист», № 8 и 9, 1939.