Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXVII, вып. 1, 1958 г.

УРАВНИВАНИЕ СПЛОШНЫХ СЕТЕЙ С ИЗМЕРЕННЫМИ ДЛИНАМИ СТОРОН СОВМЕСТНО ПО СПОСОБУ УСЛОВНЫХ И ПОСРЕДСТВЕННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

В. Г. Зданович

В связи с развитием в последние годы методов светолокации и радиолокации значительно возрос интерес к проблеме обработки геодезических сетей с измеренными длинами сторон.

В настоящей статье рассмотрен вопрос об уравнивании сплошной сети с измеренными длинами сторон, с делением ее на участки и одновременным использованием методов условных и посредственных измерений. Этот прием уравнивания может быть применен в том случае, когда в силу особенностей построения сети одну часть ее более целесообразно обрабатывать по методу условных, а другую — по методу посредственных измерений.

Применение излагаемого метода может быть целесообразным также в случае совместного приуравнивания двух сетей, ранее уравненных различными методами.

Все вычисления по обработке сети в дальнейшем будем производить в системе прямоугольных координат, полагая, что в измеренные значения длин сторон уже введены необходимые поправки, включая редукцию на плоскость проекции Гаусса. Сети с измеренными длинами сторон будем называть в дальнейшем линейными сетями.

Прежде чем перейти к решению основной задачи настоящей статьи, рассмотрим кратко вопрос о выборе наиболее целесообразного метода составления уравнений погрешностей и выражения их коэффициентов.

В литературе известны три метода составления условных уравнений, основанных на сравнении: а) площадей фигур сети [5]; б) длин сторон сети [1], [2]; в) углов [5], С. А. Бутлер [3], [6], [7].

Коэффициенты условных уравнений указанные авторы выражают в функции либо только длин сторон сети [5], [6], [1], [2], либо углов и длин сторон треугольников [3], [7].

В последнем случае формулы получаются значительно проще, но использование их требует выполнения предварительного решения треугольников сети по измеренным длинам их сторон.

Метод сравнения площадей фигур является наиболее громоздким и не обладает достаточной общностью, в силу чего он не может быть рекомендован для практического использования.

Составление условных уравнений путем сравнения длин сторон сети освобождает от необходимости решения треугольников сети и позволяет тем самым несколько сократить объем предварительных вычислений, но одновременно вынуждает пользовать формулы, выражающие коэффициенты условных уравнений в функции только длин сторон сети.

Этот метод может быть успешно применен при уравнивании некоторых частных типов линейных сетей, но не обладает заметными преимуществами перед методом сравнения углов при обработке сплошных сетей, так как объемы предварительных вычислений в обоих случаях мало отличаются друг от друга.

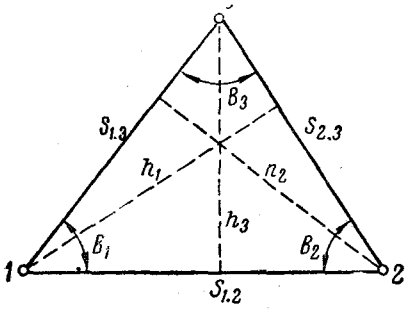


Рис. 1. Элементы треугольника с измеренными длинами сторон

Поэтому при уравнивании сплошных линейных сетей мы отдаем предпочтение составлению условных уравнений путем сравнения углов. Такой метод хотя и требует предварительного решения треугольников, но в то же время он позволяет получить более простые формулы для выражения коэффициентов условных уравнений.

Среди имеющихся дифференциальных формул, выражающих зависимость между поправками углов и длин сторон треугольников сети, наиболее удобными нам представляются формулы, данные С. А. Бутлером [3], которые применительно к обозначениям на рис. 1 могут быть записаны следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}(B_1) &= \frac{\rho''}{h_1}(v_{2.3} - \cos B_2 v_{1.2} - \cos B_3 v_{1.3})\\ (B_2) &= \frac{\rho''}{h_2}(v_{1.3} - \cos B_3 v_{2.3} - \cos B_1 v_{1.2})\\ (B_3) &= \frac{\rho''}{h_3}(v_{1.2} - \cos B_1 \cdot v_{1.3} - \cos B_2 v_{2.3})\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где (B_1), (B_2), (B_3) — поправки углов B_1, B_2, B_3 треугольника *1*, *2*, *3*;
$v_{1.2}$, $v_{2.3}$, $v_{1.3}$ — поправки длин сторон $S_{1.2}$, $S_{2.3}$, $S_{1.3}$;
h_1, h_2, h_3 — высоты треугольника *1*, *2*, *3*.

Для дальнейшего использования формулы (1) преобразуем ее, исключив высоты треугольников h_i.

Замечая, что согласно рис. 1,

$$h_1 = S_{1.3}\sin B_3 = S_{1.2}\sin B_2,$$

$$h_2 = S_{1.2}\sin B_1 = S_{2.3}\sin B_3,$$

$$h_3 = S_{1.3}\sin B_1 = S_{2.3}\sin B_2,$$

и вводя обозначения

$$g_{1.2} = \frac{\rho''}{S_{1.2}}, \quad g_{1.3} = \frac{\rho''}{S_{1.3}}, \quad g_{2.3} = \frac{\rho''}{S_{2.3}}, \quad (2)$$

где $g_{1.2}$, $g_{1.3}$, $g_{2.3}$ — градиенты направлений сторон треугольников сети, получим следующие дифференциальные формулы:

$$\left.\begin{aligned}(B_1) &= g_{1.3}\operatorname{cosec} B_3 v_{2.3} - g_{1.3}\operatorname{ctg} B_3 v_{1.3} - g_{1.2}\operatorname{ctg} B_2 v_{1.2}\\ (B_2) &= g_{1.2}\operatorname{cosec} B_1 v_{1.3} - g_{1.2}\operatorname{ctg} B_1 v_{1.2} - g_{2.3}\operatorname{ctg} B_3 v_{2.3}\\ (B_3) &= g_{2.3}\operatorname{cosec} B_2 v_{1.2} - g_{2.3}\operatorname{ctg} B_2 v_{2.3} - g_{1.3}\operatorname{ctg} B_1 v_{1.3}\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

или

$$\left.\begin{aligned}(B_1) &= g_{1.2}\operatorname{cosec} B_2 v_{2.3} - g_{1.3}\operatorname{ctg} B_3 v_{1.3} - g_{1.2}\operatorname{ctg} B_2 v_{1.2}\\ (B_2) &= g_{2.3}\operatorname{cosec} B_3 v_{1.3} - g_{1.2}\operatorname{ctg} B_1 v_{1.2} - g_{2.3}\operatorname{ctg} B_3 v_{2.3}\\ (B_3) &= g_{1.3}\operatorname{cosec} B_1 v_{1.2} - g_{2.3}\operatorname{ctg} B_2 v_{2.3} - g_{1.3}\operatorname{ctg} B_1 v_{1.3}\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Перейдем теперь к изложению предлагаемого приема уравнивания линейных сетей.

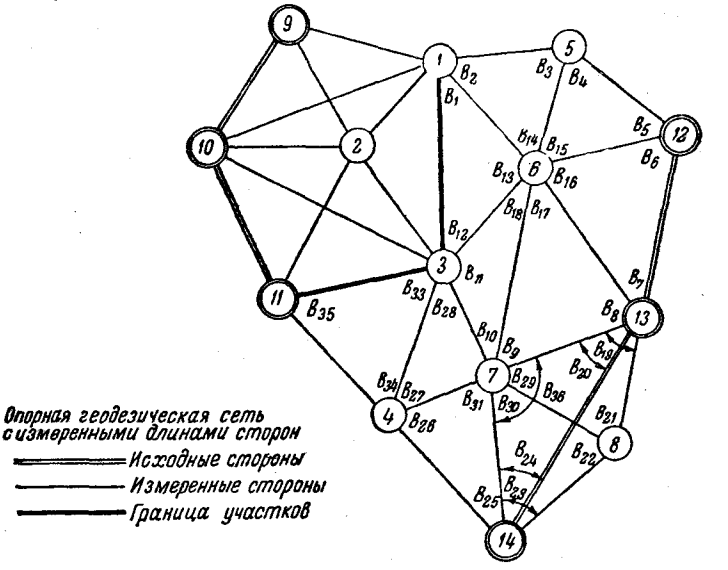


Рис. 2. Опорная геодезическая сеть с измеренными длинами сторон

Составление условных уравнений и последовательность вычислений при производстве уравнивания поясним на примере сети, изображенной на рис. 2, имеющей 29 измеренных длин сторон, 8 определяемых и 6 исходных пунктов. Сеть разделена на два участка по линии *1—3—11*, причем левый участок уравнивается по методу посредственных наблюдений, а правый —по методу условных наблюдений.

Деление сети на участки должно производиться по линии, включающей возможно меньшее число сторон и определяемых пунктов с таким расчетом, чтобы границу участков не пересекали диагональные стороны сети.

Теория уравнивания измерений совместно по методу посредственных и условных наблюдений известна. Она изложена, например, в книге И. Ю. Пранис-Праневича [4, гл. VI, стр. 284—321] и применена им к обработке сетей триангуляции с использованием некоторых допущений, делающих предложенную им схему уравнивания не вполне строгой. Используя общую теорию вопроса, мы не делаем каких-либо допущений. Изложенная ниже схема уравнивания линейных сетей

является вполне строгой и соответствующей принципу наименьших квадратов.

Предварительные вычисления для участка *I* слагаются из получения приближенных координат пунктов *1, 2, 3* и решения по ним обратных задач для всех сторон сети, входящих в этот участок.

С целью некоторых упрощений в дальнейших вычислениях координаты пунктов *1* и *3*, находящиеся на границе участков, целесообразно вычислять так, чтобы длины сторон, найденные из решения обратных задач, были бы равны измеренным значениям этих длин, что легко достигается установлением определенной последовательности в решении линейных засечек. В данном случае сначала вычисляем координаты пункта *2* из треугольника *10, 11, 2*, затем пункта *3* из треугольника *11, 2, 3* и, наконец, пункта *1* из треугольника *2, 3, 1*. Затем решением обратных задач проверяем выполнение равенств:

$$S'_{11.3} = S_{11.3}, \qquad S'_{1.3} = S_{1.3}, \tag{5}$$

где $S'_{11.3}$, $S'_{1.3}$ — вычисление длин сторон *11.3* и *1.3*;

$S_{11.3}$, $S_{1.3}$ — измерение длин этих же сторон.

Предварительные вычисления на участке *II* слагаются из решения всех треугольников по измеренным длинам сторон и вычисления предварительных координат пунктов *6* и *3*.

Последнее может быть выполнено либо решением двух линейных засечек из треугольников *12, 13, 6* и *13, 6, 3*, либо вычислением хода *12—13—6—3* с использованием измеренных длин и углов, найденных из решения треугольников.

Последний путь вычисления координат пунктов *6* и *3* в данном случае несколько проще первого.

Перейдем к составлению уравнений погрешностей и условных уравнений.

I. Число уравнений погрешностей участка *I* равно числу измеренных сторон, включая и стороны *1.3* и *3.11*. Всего имеем, согласно рис. 2, десять уравнений погрешностей весом $p = +1$:

$$\left.\begin{aligned}
&-\cos\alpha_{1.9}\xi_1 - \sin\alpha_{1.9}\eta_1 + l_{1.9} = v_{1.9}\\
&-\cos\alpha_{1.10}\xi_1 - \sin\alpha_{1.10}\eta_1 + l_{1.10} = v_{1.10}\\
&-\cos\alpha_{2.9}\xi_2 - \sin\alpha_{2.9}\eta_2 + l_{2.9} = v_{2.9}\\
&-\cos\alpha_{2.10}\xi_2 - \sin\alpha_{2.10}\eta_2 + l_{2.10} = v_{2.10}\\
&-\cos\alpha_{2.11}\xi_2 - \sin\alpha_{2.11}\eta_2 + l_{2.11} = v_{2.11}\\
&-\cos\alpha_{3.10}\xi_3 - \sin\alpha_{3.10}\eta_3 + l_{3.10} = v_{3.10}\\
&-\cos\alpha_{3.11}\xi_3 - \sin\alpha_{3.11}\eta_3 = v_{3.11}\\
&-\cos\alpha_{1.2}\xi_1 - \sin\alpha_{1.2}\eta_1 + \cos\alpha_{1.2}\xi_2 + \sin\alpha_{1.2}\eta_2 + l_{1.2} = v_{1.2}\\
&-\cos\alpha_{2.3}\xi_2 - \sin\alpha_{2.3}\eta_2 + \cos\alpha_{2.3}\xi_3 + \sin\alpha_{2.3}\eta_3 + l_{2.3} = v_{2.3}\\
&-\cos\alpha_{1.3}\xi_1 - \sin\alpha_{1.3}\eta_1 + \cos\alpha_{1.3}\xi_3 + \sin\alpha_{1.3}\eta_3 = v_{1.3}
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где ξ_i, η_i — поправки координат пункта с номером i;

$l_{ki} = S'_{ki} - S_{ki}$ — свободные члены уравнений погрешностей;

S'_{ki} — длина стороны между пунктами k и i, вычисленная по предварительным координатам;

S_{ki} — измеренное значение длины той же стороны;

α_{ki} — предварительное значение дирекционного угла стороны $k - i$.

В двух уравнениях (6) свободные члены равны нулю в силу существования равенств (5).

II. Число условных уравнений участка *II* равно 8.

Действительно, на этом участке сети имеем 18 измеренных сторон, не считая сторон *1.3* и *3.11*, которые отнесены к первому участку сети, и соответствующие им уравнения погрешностей уже включены в систему уравнений (6). Число искомых пунктов равно 5 (не считая пунктов *1* и *3*, отнесенных к первому участку) и для их определения необходимо иметь 10 измеренных сторон. Таким образом, число избыточных измерений равно $18-10=8$.

Эти уравнения будут двух видов: а) условные уравнения, не зависящие от координат пунктов *1* и *3* и содержащие только поправки V_{ki} длин сторон *II* участка; б) связующие условные уравнения, содержащие поправки V_{ki} длин сторон *II* участка и поправки координат ξ_1, η_1, ξ_3, η_3 пунктов *1* и *3*, расположенных на границе участков сети.

Как это легко установить по рис. 2, к первому виду относятся три следующих условных уравнения.

1. Уравнение центральной системы с полюсом в пункте *7*, вытекающее из условия

$$B'_9+B'_{10}+B'_{29}+B'_{30}+B'_{31}+B'_{32}-360^\circ=0, \tag{7}$$

где B_i' — уравненные значения углов при пункте *7*.

Заменяя

$$B_i'=B_i+(B_i), \tag{8}$$

где B_i — значения углов, вычисленные из решения треугольников по измеренным длинам сторон,

(B_i) — поправки к ним, находимые из уравнивания.

Согласно (7):

$$(B_9)+(B_{10})+(B_{29})+(B_{30})+(B_{31})+(B_{32})+w_1=0, \tag{9}$$

где

$$w_1=B_9+B_{10}+B_{29}+B_{30}+B_{31}+B_{32}-360^\circ. \tag{10}$$

Выражая поправки углов (B_i) в функции поправок длин сторон v_{ki} по формулам (3) и подставляя найденные выражения в (9), получим условное уравнение в окончательном виде

$$\begin{aligned}&g_{3.7}\operatorname{cosec}B_{11}v_{3.6}+g_{6.7}\operatorname{cosec}B_{17}v_{6.13}+g_{13.7}\operatorname{cosec}B_{19}v_{13.8}+\\&+g_{8.9}\operatorname{cosec}B_{22}v_{8.14}+g_{14.17}\operatorname{cosec}B_{25}v_{14.4}+g_{4.7}\operatorname{cosec}B_{27}v_{3.4}-\\&-g_{3.7}(\operatorname{ctg}B_{28}+\operatorname{ctg}B_{11})v_{3.7}-g_{6.7}(\operatorname{ctg}B_{18}+\operatorname{ctg}B_{17})v_{6.7}-\\&-g_{13.7}(\operatorname{ctg}B_8+\operatorname{ctg}B_{19})v_{13.7}-g_{8.7}(\operatorname{ctg}B_{21}+\operatorname{ctg}B_{22})v_{8.7}-\\&-g_{14.7}(\operatorname{ctg}B_{23}+\operatorname{ctg}B_{25})v_{14.7}-g_{4.7}(\operatorname{ctg}B_{26}+\operatorname{ctg}B_{27})v_{4.7}+w_1=0.\end{aligned} \tag{11}$$

2. Уравнение четырехугольника *7.13.8.15* с полюсом в пункте *7*, вытекающее из условия

$$B'_{29}+B'_{30}-B'_{36}=0. \tag{12}$$

Откуда с учетом формулы (8) пишем

$$(B_{29})+(B_{30})-(B_{36})+w_2=0, \tag{13}$$

где

$$w_2=B_{29}+B_{30}-B_{36}. \tag{14}$$

Выражая в соотношении (13) значения поправок углов (B_i) в функции поправок длин сторон v_{ki}, получим условные уравнения четырехугольника в окончательном виде

$$g_{7.13}\operatorname{cosec} B_{19}v_{8.13} + g_{7.14}\operatorname{cosec} B_{23}v_{8.14} - g_{7.13}(\operatorname{ctg} B_{19} - \operatorname{ctg} B_{20})v_{7.13} - g_{7.14}(\operatorname{ctg} B_{23} - \operatorname{ctg} B_{24})v_{7.14} - g_{7.8}(\operatorname{ctg} B_{21} + \operatorname{ctg} B_{22})v_{7.8} + w_2 = 0. \quad (15)$$

3. Уравнение станции на пункте *13*, вытекающее из условия

$$B'_7 + B'_8 + B'_{20} - (\alpha'_{13.12} - \alpha'_{13.14}) = 0. \quad (16)$$

Согласно (16),

$$(B_7) + (B_8) + (B_{20}) + w_3 = 0, \quad (17)$$

где

$$w_3 = B_7 + B_8 + B_{20} - (\alpha'_{13.12} - \alpha'_{13.14}), \quad (18)$$

$\alpha'_{13.12}$, $\alpha'_{13.14}$ — значения дирекционных углов сторон между исходными пунктами *12*, *13*, *14*.

С учетом формул (3), получим, согласно (17), условное уравнение *станции в окончательном виде*

$$g_{13.14}\operatorname{cosec} B_{24}v_{14.7} + g_{7.13}\operatorname{cosec} B_9 v_{7.6} + g_{6.13}\operatorname{cosec} B_{16}v_{6.12} - g_{7.13}(\operatorname{ctg} B_{36} + \operatorname{ctg} B_9)v_{7.13} - g_{6.13}(\operatorname{ctg} B_7 + \operatorname{ctg} B_{16})v_{6.13} + w_3 = 0. \quad (19)$$

Перейдем к составлению связующих условных уравнений, число которых в данном случае равно пяти.

1. Условное уравнение центральной системы с полюсом в пункте *6*, вытекающее из условия

$$B'_{13} + B'_{14} + B'_{15} + B'_{16} + B'_{17} + B'_{18} - 360° = 0. \quad (20)$$

Для всех углов при пункте *6*, кроме угла B'_{13}, как и ранее, можем написать

$$B_i' = B_i + (B_i).$$

Угол B_{13} занимает несколько особое положение, так как он вычисляется по двум измеренным длинам сторон $S_{1.6}$ и $S_{3.6}$ и вычисленной по предварительным координатам длине $S'_{1.3}$, которая в результате уравнивания получит некоторую поправку, зависящую от поправки координат пунктов *1* и *3*.

Поэтому для угла B'_{13} следует принять

$$B'_{13} = B_{13} + (B_{13}) + \delta B_{13}, \quad (21)$$

где (B_{13}) — поправка угла B_{13}, зависящая от поправки длин сторон $v_{1.6}$ и $v_{3.6}$;

δB_{13} — поправка угла B_{13}, зависящая от поправки $\delta S_{1.3}$ к предварительному значению стороны $S'_{1.3}$.

Согласно формулам (3), пишем

$$(B_{13}) = -g_{3.6}\operatorname{ctg} B_{12}v_{3.6} - g_{1.6}\operatorname{ctg} B_1 v_{1.6}, \quad (22)$$

$$\delta B_{13} = g_{3.6}\operatorname{cosec} B_{12}\cdot\delta S_{1.3}. \quad (23)$$

Замечая, что

$$\delta S_{1.3} = -\cos\alpha_{1.3}\xi_1 - \sin\alpha_{1.3}\eta_1 + \cos\alpha_{1.3}\xi_3 + \sin\alpha_{1.3}\eta_3, \quad (24)$$

находим (23)

$$\delta B_{18} = g_{3.6} \operatorname{cosec} B_{12} (-\cos \alpha_{1.3}\xi_1 - \sin \alpha_{1.3}\eta_1 + \cos \alpha_{1.3}\xi_3 + \sin \alpha_{1.3}\eta_3). \quad (25)$$

Согласно формулам (8) и (21), уравнение (20) может быть записано следующим образом:

$$(B_{13}) + (B_{14}) + (B_{15}) + (B_{16}) + (B_{17}) + (B_{18}) + \delta B_{13} + w_4 = 0, \quad (26)$$

где

$$w_4 = \sum_{i=13}^{18} B_i - 360°. \quad (27)$$

Учитывая формулы (22) и (23) и выражая поправки (B_i) в функции поправок длин сторон, находим условное уравнение центральной системы в окончательном виде

$$\begin{gathered} g_{1.6} \operatorname{cosec} B_2 v_{1.5} + g_{5.6} \operatorname{cosec} B_4 v_{5.12} + g_{6.13} \operatorname{cosec} B_8 v_{13.7} + \\ + g_{7.6} \operatorname{cosec} B_{10} v_{7.3} - g_{1.6} (\operatorname{ctg} B_1 + \operatorname{ctg} B_2)\, v_{1.6} - g_{5.6} (\operatorname{ctg} B_3 + \operatorname{ctg} B_4)\, v_{5.6} - \\ - g_{12.6} (\operatorname{ctg} B_5 + \operatorname{ctg} B_6)\, v_{12.6} - g_{13.6} (\operatorname{ctg} B_7 + \operatorname{ctg} B_8)\, v_{13.6} - \\ - g_{7.6} (\operatorname{ctg} B_9 + \operatorname{ctg} B_{10})\, v_{7.6} - g_{3.6} (\operatorname{ctg} B_{11} + \operatorname{ctg} B_{12})\, v_{3.6} - \\ - g_{3.6} \operatorname{cosec} B_{12} \cos \alpha_{1.3}\xi_1 - g_{3.6} \operatorname{cosec} B_{12} \sin \alpha_{1.3}\eta_1 + \\ + g_{3.6} \operatorname{cosec} B_{12} \cos \alpha_{1.3}\xi_3 + g_{3.6} \operatorname{cosec} B_{12} \sin \alpha_{1.3}\eta_3 + w_4 = 0. \end{gathered} \quad (28)$$

2. Уравнению станции в пункте 3 отвечает условие

$$B'_{12} + B'_{11} + B'_{28} + B'_{33} - (\alpha'_{3.11} - \alpha'_{3.1}) = 0. \quad (29)$$

Уравненные значения дирекционных углов $\alpha'_{3.11}$ и $\alpha'_{3.1}$ могут быть представлены следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \alpha'_{3.11} &= \alpha_{3.11} + \delta\alpha_{3.11} \\ \alpha'_{3.1} &= \alpha_{3.1} + \delta\alpha_{3.1} \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

где $\alpha_{3.11}$ и $\alpha_{3.1}$ — предварительные значения дирекционных углов; $\delta\alpha_{3.11}$ и $\delta\alpha_{3.1}$ — поправки к ним, выражаемые известными формулами

$$\left.\begin{aligned} \delta\alpha_{3.1} &= g_{1.3} \sin \alpha_{1.3}\xi_1 - g_{1.3} \cos \alpha_{1.3}\eta_1 - g_{1.3} \sin \alpha_{1.3}\xi_3 + g_{1.3} \cos \alpha_{1.3}\eta_3 \\ \delta\alpha_{3.11} &= g_{3.11} \sin \alpha_{3.11}\xi_3 - g_{3.11} \cos \alpha_{3.11}\eta_3 \end{aligned}\right\}, \quad (31)$$

Далее имеем

$$\left.\begin{aligned} B'_{11} &= B_{11} + (B_{11}), & B'_{28} &= B_{28} + (B_{28}) \\ B'_{12} &= B_{12} + (B_{12}) + \delta B_{12}, & B'_{33} &= B_{33} + (B_{33}) + \delta B_{33} \end{aligned}\right\}, \quad (32)$$

где

$$\begin{gathered} (B_{12}) = g_{1.3} \operatorname{cosec} B_1 v_{1.6} - g_{6.3} \operatorname{ctg} B_{13} v_{6.3}; \\ (B_{33}) = g_{3.4} \operatorname{cosec} B_{34} v_{4.11} - g_{3.4} \operatorname{ctg} B_{34} v_{3.4}; \\ \delta B_{12} = -g_{3.1} \operatorname{ctg} B_1 \delta S_{3.1} = g_{3.1} \operatorname{ctg} B_1 (\cos \alpha_{3.1}\xi_3 + \sin \alpha_{3.1}\eta_3 - \\ - \cos \alpha_{3.1}\xi_1 - \sin \alpha_{3.1}\eta_1); \end{gathered} \quad (33)$$

$$\delta B_{33} = -g_{3.11} \operatorname{ctg} B_{35} \delta S_{3.11} = g_{3.11} \operatorname{ctg} B_{35} (\cos \alpha_{3.11}\xi_3 + \sin \alpha_{3.11}\eta_3).$$

На основании формул (30) и (32) уравнение (29) перепишем следующим образом:

$$(B_{12}) + (B_{11}) + (B_{28}) + (B_{33}) + \delta B_{12} + \delta\alpha_{3.1} - \delta\alpha_{3.11} + w_5 = 0, \quad (34)$$

где

$$w_5 = B_{12} + B_{11} + B_{28} + B_{33} - (\alpha_{3.11} - \alpha_{3.1}). \quad (35)$$

Выражая поправки (B_{11}) и (B_{28}) в функции поправок v_{ki} с помощью формул (3) и учитывая формулы (31) и (33), получим уравнение станции в окончательном виде

$$\begin{aligned} &g_{3.1}\operatorname{cosec} B_1 v_{1.6} + g_{3.6}\operatorname{cosec} B_{18} v_{6.7} + g_{3.7}\operatorname{cosec} B_{32} v_{4.7} + g_{3.4}\operatorname{cosec} B_{34} v_{4.11} - \\ &- g_{3.6}(\operatorname{ctg} B_{13} + \operatorname{ctg} B_{18})\, v_{3.6} - g_{3.7}(\operatorname{ctg} B_{10} + \operatorname{ctg} B_{32})\, v_{3.7} - \\ &- g_{3.4}(\operatorname{ctg} B_{27} + \operatorname{ctg} B_{34})\, v_{3.4} + \{g_{3.1}(\operatorname{ctg} B_1 \cos\alpha_{3.1} + \sin\alpha_{3.1}) + \\ &+ g_{3.11}(\operatorname{ctg} B_{35}\cos\alpha_{3.11} - \sin\alpha_{3.11})\}\xi_3 + \{g_{3.1}(\operatorname{ctg} B_1 \sin\alpha_{3.1} - \cos\alpha_{3.1}) + \\ &+ g_{3.11}(\operatorname{ctg} B_{35}\sin\alpha_{3.11} + \cos\alpha_{3.11})\}\eta_3 - g_{3.1}(\operatorname{ctg} B_1 \cos\alpha_{3.1} + \sin\alpha_{3.1})\,\xi_1 - \\ &- g_{3.1}(\operatorname{ctg} B_1 \sin\alpha_{3.1} - \cos\alpha_{3.1})\,\eta_1 + w_5 = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

3. Азимутальное условное уравнение составляется аналогично уравнению станции (36).

Исходным является условие

$$-B'_7 + B'_{17} + B'_{18} - B'_{12} - (\alpha'_{3.1} - \alpha'_{13.12}) = 0. \quad (37)$$

Откуда с учетом формул (8), (30) и (32) находим

$$-(B_7) + (B_{17}) + (B_{18}) - (B_{12}) - \delta B_{12} - \delta\alpha_{3.1} + w_6 = 0, \quad (38)$$

где

$$w_6 = -B_7 + B_{17} + B_{18} - B_{12} - (\alpha_{3.1} - \alpha'_{13.12}). \quad (39)$$

Подставляя в уравнение (38) значения поправок углов (B_7), (B_{17}), (B_{18}) и (B_{12}), выраженные через поправки длин сторон в соответствии с формулами (3) и значения δB_{12} и $\delta\alpha_{3.1}$ из формул (31) и (33), получим окончательно

$$\begin{aligned} &-g_{6.13}\operatorname{cosec} B_{16} v_{6.12} + g_{6.13}\operatorname{cosec} B_8 v_{7.13} + g_{6.7}\operatorname{cosec} B_{10} v_{3.7} - \\ &- g_{1.3}\operatorname{cosec} B_1 v_{1.6} + g_{6.13}(\operatorname{ctg} B_{16} - \operatorname{ctg} B_8)\, v_{6.13} - g_{6.7}(\operatorname{ctg} B_9 + \operatorname{ctg} B_{10})\, v_{6.7} + \\ &+ g_{3.6}(\operatorname{ctg} B_{13} - \operatorname{ctg} B_{11})\, v_{3.6} - g_{3.1}(\operatorname{ctg} B_1 \cos\alpha_{3.1} + \sin\alpha_{3.1})\,\xi_3 - \\ &- g_{3.1}(\operatorname{ctg} B_1 \sin\alpha_{3.1} - \cos\alpha_{3.1})\,\eta_3 + g_{3.1}(\operatorname{ctg} B_1 \cos\alpha_{3.1} + \sin\alpha_{3.1})\,\xi_1 + \\ &+ g_{3.1}(\operatorname{ctg} B_1 \sin\alpha_{3.1} - \cos\alpha_{3.1})\,\eta_1 + w_6 = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

4. Для составления уравнений координат выбираем ходовую линию, идущую через пункты *13—6—3* и используем отвечающие ей условия

$$\left.\begin{aligned} \Delta x'_{13.6} + \Delta x'_{6.3} - (x'_3 - x'_{13}) &= 0 \\ \Delta y'_{13.6} + \Delta y'_{6.3} - (y'_3 - y'_{13}) &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad (41)$$

где $\Delta x'$, $\Delta y'$ и x_3', y_3' — уравненные значения приращений координат пункта *3*;

x'_{13}, y'_{13} — заданные координаты исходного пункта *13*.

Заменяя

$$\left.\begin{aligned} \Delta x'_{13.6} &= \Delta x_{13.6} + (\Delta x_{13.6}), & \Delta y'_{13.6} &= \Delta y_{13.6} + (\Delta y_{13.6}) \\ \Delta x'_{6.3} &= \Delta x_{6.3} + (\Delta x_{6.3}), & \Delta y'_{6.3} &= \Delta y_{6.3} + (\Delta y_{6.3}) \\ x_3' &= x_3 + \xi_3, & y_3' &= y_3 + \eta_3 \end{aligned}\right\}, \quad (42)$$

где Δx, Δy — приращения координат, вычисляемые по формулам

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta x_{13.6} = S_{13.6}\cos\alpha_{13.6}, & \Delta y_{13.6} = S_{13.6}\sin\alpha_{13.6} \\ \Delta x_{6.3} = S_{6.3}\cos\alpha_{6.3}, & \Delta y_{6.3} = S_{6.3}\sin\alpha_{6.3} \\ \alpha_{13.6} = \alpha'_{13.12} - B_7, & \alpha_{6.3} = \alpha'_{13.12} - B_7 + B_{17} + B_{18} \end{array}\right\}. \quad (43)$$

(Δx); (Δy) — поправки к Δx и Δy, находимые из уравнивания, получаем

$$\left.\begin{array}{l} (\Delta x_{13.6}) + (\Delta x_{6.3}) - \xi_3 + w_x = 0 \\ (\Delta y_{13.6}) + (\Delta y_{6.3}) - \eta_3 + w_3 = 0 \end{array}\right\}, \quad (44)$$

где

$$\left.\begin{array}{l} w_x = \Delta x_{13.6} + \Delta x_{6.3} - (x_3 - x'_{13}) \\ w_y = \Delta y_{13.6} + \Delta y_{6.3} - (y_3 - y'_{13}) \end{array}\right\}. \quad (45)$$

Подставляя в уравнивания (44)

$$\left.\begin{array}{ll} (\Delta x_{13.6}) = v_{13.6}\cos\alpha_{13.6} - \Delta y_{13.6}\delta\alpha_{13.6}, & (\Delta y_{13.6}) = v_{13.6}\sin\alpha_{13.6} + \Delta x_{13.6}\delta\alpha_{13.6} \\ (\Delta x_{6.3}) = v_{6.3}\cos\alpha_{6.3} - \Delta y_{6.3}\delta\alpha_{6.3}, & (\Delta y_{6.3}) = v_{6.3}\sin\alpha_{6.3} + \Delta x_{6.3}\delta\alpha_{6.3} \\ \delta\alpha_{13.6} = -(B_7), & \delta\alpha_{6.3} = -(B_7) + (B_{17}) + (B_{18}) \end{array}\right\}, \quad (46)$$

и выражая поправки углов (B_i) в функции поправок длин сторон с помощью формул (3), получим окончательно

$$\begin{aligned} &+ g_{13.6}(y_3 - y'_{13})\operatorname{cosec} B_{16}v_{6.12} - g_{13.6}(y_3 - y_6)\operatorname{cosec} B_8 v_{13.7} - \\ &- g_{7.6}(y_3 - y_6)\operatorname{cosec} B_{10}v_{7.3} + g_{13.6}\{(x_6 - x'_{13}) - (y_3 - y'_{13})\operatorname{ctg} B_{16} + \\ &+ (y_3 - y_6)\operatorname{ctg} B_8\} v_{6.13} + g_{6.7}\{(y_3 - y_6)(\operatorname{ctg} B_9 + \operatorname{ctg} B_{10})\} v_{6.7} + \\ &+ g_{3.6}\{(x_3 - x_6) + (y_3 - y_6)\operatorname{ctg} B_{11}\} v_{3.6} - \rho''\xi_3 + w_x' = 0, \end{aligned} \quad (47)$$

и

$$\begin{aligned} &- g_{13.6}(x_3 - x'_{13})\operatorname{cosec} B_{16}v_{6.12} + g_{13.6}(x_3 - x_6)\operatorname{cosec} B_8 v_{13.7} + \\ &+ g_{7.6}(x_3 - x_6)\operatorname{cosec} B_{10}v_{7.3} + g_{13.6}\{(y_6 - y'_{13}) + (x_3 - x'_{13})\operatorname{ctg} B_{16} - \\ &- (x_3 - x_6)\operatorname{ctg} B_8\} v_{6.13} - g_{6.7}\{(x_3 - x_6)(\operatorname{ctg} B_9 + \operatorname{ctg} B_{10})\} v_{6.7} + \\ &+ g_{3.6}\{(y_3 - y_6) - (x_3 - x_6)\operatorname{ctg} B_{11}\} v_{3.6} - \rho''\eta_3 + w'_y = 0, \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$w_x' = w_x\rho'', \qquad w_y' = w_y\rho''. \quad (49)$$

Вышеизложенным исчерпывается составление всех возможных типов условных уравнений, встречающихся при уравнивании линейных сетей.

Дальнейшая задача сводится к совместному решению по способу наименьших квадратов системы уравнений погрешностей (6) и условных уравнений (11), (15), (28), (36), (40), (47) и (48).

Согласно имеющейся теории [4], вычисления выполняются в такой последовательности.

1. Составляются нормальные уравнения, отвечающие системе уравнений погрешностей (6) *I* участка, и путем их частичного решения производится исключение всех неизвестных, кроме поправок координат ξ_1, η_1, ξ_3 и η_3, пограничных пунктов *1* и *3*.

Число преобразованных нормальных уравнений будет равно удвоенному числу пограничных пунктов.

2. Составляются нормальные уравнения, отвечающие системе условных уравнений *II* участка (включая связывающие уравнения) и путем частичного решения их исключаются коррелаты, отвечающие условным уравнениям, не содержащим поправок координат пограничных пунктов.

Число преобразованных нормальных уравнений в этой системе будет равно числу связующих условных уравнений.

3. Путем объединения двух преобразованных систем нормальных уравнений *I* и *II* участков получают общую систему связующих нормальных уравнений, из решения которой находят поправки координат пограничных пунктов и коррелаты связующих условных уравнений.

4. Возвращаясь к решению нормальных уравнений по участкам, находят поправки координат пунктов, расположенных на границе *I* участка, и коррелаты связующих уравнений *II* участка.

Дальнейшие вычисления, включающие нахождение поправок v_i уравненных значений длин сторон и координат пунктов, не вызывают затруднений и не нуждаются поэтому в специальных пояснениях.

Контроль уравнительных вычислений и оценка точности элементов сети выполняются по известным формулам способа наименьших квадратов.

Вычислительные схемы, отвечающие вышеописанному приему уравнивания, необходимые для его практического применения, разработаны В. П. Акатовым и им же в качестве примера произведено уравнивание сети, изображенной на рис. 2.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Чичигина В. В. Уравнивание в системе плоских прямоугольных координат ряда из геодезических четырехугольников с измеренными сторонами. Информационно-технический сб. ВТС, № XV, 1950.

2. Лапинг К. А. Уравнивание сплошных сетей с измеренными сторонами. Информационно-технический сб. ВТС, № XXI, 1951.

3. Бутлер С. А. Уравнивание геодезических сетей, определенных длинами сторон. «Геодезист», № 8, 1939.

4. Пранис-Праневич Ю. И. Руководство по уравнительным вычислениям заполняющей триангуляции II, III и IV классов. «Геодезист», № 6, 1941.

5. Krüger. Bedinungsgleichungen für Liniennetze und Rückwärtseinschnitte. Veröffentlichung des Könige Prussischen Geodätischen Instituten, Potsdam, 1908.

6. Warchalowski E. Triangulation dün tupe nouveau. Voröff d Poln. Geod. Lnst., № 2, 1948.

7. Hubeny K. Die Ausgleichung von Dreicksnetzen mit direkt gemessenen Seiten. Osterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, № 5—6, 1950.