Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Плеханова т. XXXVII, вып. 1, 1958 г.

ОБ УКЛОНЕНИЯХ ОТВЕСНОЙ ЛИНИИ В ГОРНОМ РАЙОНЕ

А. А. Кржижановская

До последнего времени решение основной задачи высшей геодезии — определение фигуры Земли — связывалось с изучением внешнего гравитационного поля и формы геоида Листинга.

Единственным методом гравиметрического вывода фигуры геоида являлся метод Стокса [19], применение которого требует удаления внешних по отношению к геоиду масс, так называемой регуляризации Земли.[1]

Строгое проведение регуляризации и последующий учет эффекта, связанного с ней, невозможны при современном состоянии геологической и геофизической изученности Земли.

В горных районах метод Стокса в его известном виде не применим.

Новый подход к проблеме фигуры Земли, когда исследуется не геоид Листинга, а внешнее гравитационное поле и форма физической поверхности Земли, позволил М. С. Молоденскому [1, 2, 3] решить проблему на основании одних только результатов точных измерений, произведенных на этой поверхности.

В фигуре Земли теперь выделена более правильная ее часть, близкая к геоиду (квазигеоид), и неправильная часть, характеризуемая вспомогательными высотами.

Для характеристики квазигеоида в отличие от геоида используются результаты только точных измерений на поверхности Земли, позволяющие найти возмущающий потенциал и нормальные значения силы тяжести. Вспомогательные высоты определяются с помощью значений потенциала и средних нормальных значений силы тяжести, известных на поверхности Земли.

Сравнительное изучение на моделях [7] новых формул М. С. Молоденского и вытекающих из метода Стокса формул Венинг Мейнеса для определения уклонений отвесной линии,[1] позволяет считать результаты существующей практики вычислений по методу Стокса, характеризующие скорее квазигеоид, чем геоид Листинга [11]. Поэтому изучение

[1] Определение геоида нерегуляризованной Земли не снимает трудностей, связанных с необходимостью учета элементов внутреннего гравитационного поля Земли [2].

фигуры Земли[1] новым методом является актуальной задачей, решение которой имеет большое практическое значение.

Опыты применения новых формул, проведенные в реальных горных районах Крыма [6] и Южного Урала, подтверждают возможность гравиметрического решения вопроса о местной фигуре Земли указанным методом. Одновременно может быть поставлен вопрос о практическом использовании результатов подобных исследований.

Введение в геодезическую науку новых понятий (квазигеоид, вспомогательные высоты) уточняет постановку задач практики и указывает пути точного их решения.

Постановка задачи и метод

Для ряда пунктов исследуемого горного района поверхности Земли требуется: а) получить местную ее фигуру в виде гравиметрических уклонений отвесной линии в направлении меридиана и первого вертикала от нормали к поверхности нормального сфероида; б) перейти к интерполированным уклонениям отвесной линии, характеризующим с известной степенью точности величины астрономо-геодезических уклонений отвеса; в) оценить точность выводов, результаты оформить картами и таблицами; г) рассмотреть возможности практического использования полученных выводов в картографии и геодезии.

При решении задачи следует применить новую теорию М. С. Молоденского, использовавшего фигуру квазигеоида [2, 3, 4], и метод одновременного применения гравиметрических и астрономо-геодезических данных [1].

Итак, применяются формулы, выражающие уклонения отвеса в меридиане ξ и первом вертикале η в зависимости от значений аномалий силы тяжести, наблюденных на поверхности Земли [4, стр. 11; 7, стр. 48]:

$$\xi = \frac{1}{4\pi\gamma_0}\int\left[(g-\gamma)+\frac{3\delta T}{2R}\right]\frac{\partial S(\rho_0\psi)}{\rho_0\partial\psi}\cos A\,d\sigma - \frac{1}{\gamma_0}\int\frac{\delta\varphi}{r_0^2}\cos A\,d\sigma \qquad (1)$$

(для η выражение соответственное, лишь $\cos A$ заменяется $\sin A$).

$$\delta T = \int\frac{\delta\varphi}{r_0}\,d\sigma.$$

Для определения функции $\delta\varphi$, имеющей смысл плотности простого слоя, распределенного на поверхности σ, получено линейное интегральное уравнение Фредгольма II рода:

$$\delta\varphi(P) = \frac{1}{2\pi}\int K(M,P)\,\delta\varphi(M)\,d\sigma + \frac{\delta g(P)}{2\pi}, \qquad (1а)$$

где P — исследуемая точка;

M — текущая точка на поверхности Земли S;

$K = \frac{\rho-\rho_0}{r_0^3}$ — ядро, имеющее особенность при $r_0 = 0$;

$$\frac{\delta g}{2\pi} = -\frac{\rho_0 - R}{4\pi^2}\int\frac{(g-\gamma)-(g-\gamma)_0}{r^3}\,d\sigma$$ — свободный член. (1б)

---

[1] Поверхность, представляющая фигуру Земли, может быть получена в виде значений уклонения отвесной линии в направлении меридиана и первого вертикала от нормали к некоторой известной поверхности относимости и в виде расстояний от этой поверхности.

Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 1, кроме того,

ξ, η — уклонения отвеса в меридиане и первом вертикале в исследуемой точке;

γ_0 — значение нормальной силы тяжести;

$(g-\gamma)-(g-\gamma)_0$ — аномалии „в свободном воздухе" в текущей и исследуемой точке;

A — азимут направления на текущую точку;

$\frac{\partial S(\rho_0\psi)}{\rho_0 \partial \psi}$ — функция Венинг Мейнеса для внешней точки [7, стр. 4];

$$\frac{\partial S(\rho_0\psi)}{\rho_0 \partial \psi} = -\left[2\cos\frac{\psi}{2}\frac{r_0}{r^3} + 3\cos\frac{\psi}{2}\frac{r_0}{\rho_0^2 r} - 5\frac{R}{\rho_0^3}\sin\psi \times \right.$$

$$\left. \times \ln\left|\frac{r+\rho_0-R\cos\psi}{2\rho_0}\right| + \frac{2R}{\rho_0^3}\cos\psi\,\frac{\rho_0\cos\frac{\psi}{2}\frac{r_0}{r} + R\cos\psi}{r+\rho_0-R\cos\psi}\right].$$

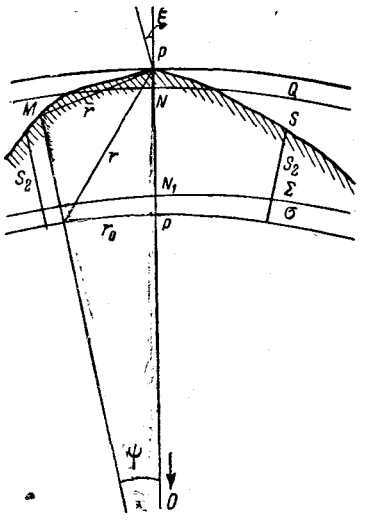


Рис. 1. Взаимное расположение главных поверхностей:
S — поверхность Земли; Q — поверхность уровня потенциала U в точке P; Σ — поверхность квазигеоида; σ — поверхность относимости; O — центр поверхности σ. $OP = \rho_0$; $OM = \rho$; $OP_1 = R$

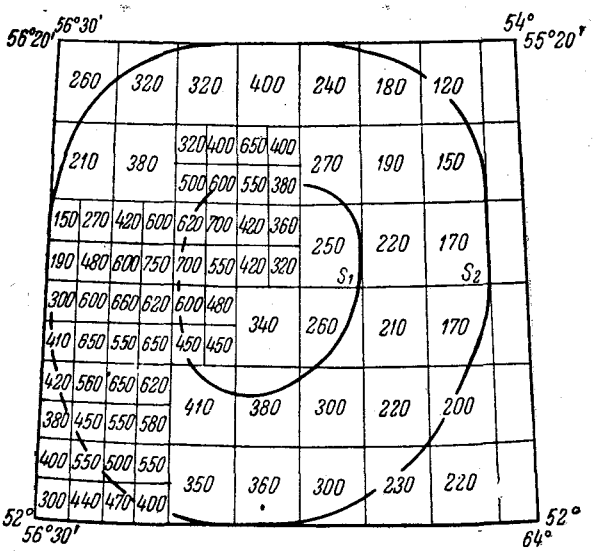


Рис. 2. Карта средних высот рельефа

Вычисления по формулам (1), (1а) и (1б) возможны только численными методами, так как функции $(g-\gamma)$, $\delta\varphi$ могут быть получены для отдельных точек в численном виде.

Система значений аномалий «в свободном воздухе» для горного района не позволяет построить гравиметрическую карту с изолиниями, отвечающую современным требованиям точности. Поэтому пришлось отказаться от непосредственной интерполяции этих значений и применить один из методов вычислений, упрощающих поле аномалий силы тяжести [5, 6, 8, 9].

Таковым явился метод перемещения масс рельефа в некоторой, строго определенной части S_2 поверхности Земли S до уровня h, определяемого гипсометрическими особенностями изучаемого района (рис. 2).

Влияние перемещенных масс рельефа учтено далее, непосредственно при нахождении уклонений отвеса.

Для введения поправок за ограничение области учета аномалий силы тяжести S_2 при вычислениях по формулам (1) и за несовпадение геодезической и гравиметрической систем применен метод совместного использования гравиметрических данных и астрономо-геодезических уклонений отвесной линии.

Обоснование метода и проведение вычислений, упрощающих поле аномалий силы тяжести

Перемещение масс рельефа до некоторого уровня в горном районе неизбежно связано с удалением некоторой части ΔM массы Земли M.

Желательно, чтобы величина удаляемых масс была наименьшей, что может обеспечить небольшие поправки в аномалии «в свободном воздухе», наблюдаемые на поверхности Земли до перемещения масс.

После того как указанные поправки будут внесены, поле аномалий силы тяжести ввиду снятия рельефа упростится, и станет возможным вычисление по формулам (1) с получением результата требуемой точности. [1]

Установим зависимость между изменениями потенциала реальной Земли и нормального ее потенциала, смещением основных отсчетных поверхностей и аномалиями силы тяжести в исследуемой точке.

Изменение массы Земли в результате перемещения масс, связанного с принятым методом упрощения поля аномалий силы тяжести, вызывает соответствующие изменения потенциалов реальной земли W и нормального ее потенциала U в исследуемой точке P, а именно:

$$W = W' + \Delta W; \quad U = U' + \Delta U,$$

где W', U' — новые значения потенциалов W и U;
ΔW, ΔU — изменения W и U.

Последнее обстоятельство приводит к смещению основных отсчетных поверхностей Q, Σ, σ (см. рис. 1).

Основное соотношение, вытекающее из понятия аномалий силы тяжести „в свободном воздухе“, таково:

$$g_S - \gamma_Q = -\frac{\partial W}{\partial n}\Big|_S + \frac{\partial U}{\partial n}\Big|_Q, \qquad (2)$$

где g_S — наблюденное в точке P на поверхности Земли S значение силы тяжести;
γ_Q — нормальное значение g для точки P;
n — направление внешней нормали.

Исходя из (2), установлена зависимость между аномалиями „в свободном воздухе“ до перемещения масс рельефа $(g_S - \gamma_Q)$ и их значениями после такого перемещения $(g'_S - \gamma'_{Q'})$, считая, что

g'_S — новое наблюденное на поверхности Земли S значение силы тяжести в точке P;
Q' — смещенное положение поверхности Q уровня нормального потенциала U;
$\gamma'_{Q'}$ — новое значение нормальной силы тяжести на поверхности Q'.

[1] Гравиметрические уклонения отвеса по материалам общей гравиметрической съемки выводятся со средней ошибкой $\pm 1''{,}3$.

Рассмотрение первого члена правой части (2) приводит к следующему соотношению:

$$-\frac{\partial W}{\partial n}\Big|_S = -\frac{\partial W'}{\partial n}\Big|_S - \frac{\partial \Delta W}{\partial n}\Big|_S = g'_S + \Delta g', \qquad (3)$$

где $\Delta g'$ — величина изменения наблюденного в точке P значения силы тяжести в результате перемещения масс.

Второй член правой части (2) может быть представлен следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial n}\Big|_Q = \frac{\partial U'}{\partial n}\Big|_Q + \frac{\partial \Delta U}{\partial n}\Big|_Q.$$

Разложив в ряд Тейлора, получаем

$$\frac{\partial U'}{\partial n}\Big|_Q = \frac{\partial U'}{\partial n}\Big|_{Q'} + \frac{\partial^2 U'}{\partial n^2}\Big|_{Q'} \Delta\zeta + \ldots = -\gamma'_{Q'} + \vartheta\Delta\zeta, \qquad (4)$$

где $\gamma'_{Q'}$ — нормальное значение силы тяжести, соответствующее поверхности Q', после перемещения масс рельефа;

ϑ — нормальный вертикальный градиент силы тяжести;

$\Delta\zeta$ — смещение поверхности квазигеоида Σ, от которой отсчитываются вспомогательные высоты точек.

Формула (4) справедлива с точностью до величин первого порядка по сравнению с $\Delta\zeta$.

Далее,

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial n}\Big|_Q = \frac{\partial (U - U')}{\partial n}\Big|_Q = -\gamma_Q + \gamma'_Q,$$

так как γ_Q; γ'_Q — нормальные значения силы тяжести для поверхности Q до и после перемещения масс рельефа.

Разность

$$\gamma'_Q - \gamma_Q = \frac{\partial \gamma}{\partial H}\Delta H + \frac{\partial \gamma}{\partial M}\Delta M. \qquad (5)$$

Имея в виду зависимость нормальной силы тяжести γ от высоты H, точки наблюдения P и массы Земли M:

$$\gamma^P = \gamma(H, M) = \frac{Mf}{R^2}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{\omega^2 R^3}{Mf}\right) - \vartheta H \text{ [12, стр. 228]},$$

где M — масса Земли;

R — ее средний радиус;

ω — угловая скорость вращения;

H — высота точки поверхности Земли.

Подставляя в (2) значения производных из (3), (4), (5), получим для $g'_S - \gamma'_{Q'}$ следующее выражение:

$$(g'_S - \gamma'_{Q'}) = (g_S - \gamma_Q) - \Delta g' - \vartheta\Delta\zeta - \frac{\partial \gamma}{\partial H}\Delta H - \frac{\partial \gamma}{\partial M}\Delta M. \qquad (6)$$

Таким образом, аномалии «в свободном воздухе» после перемещения масс рельефа выражены через их старые значения (до перемещения масс) и поправочные члены, учитывающие изменения потенциала реальной Земли и нормального ее потенциала для исследуемой точки.

Рассмотрение правой части соотношения (6) позволяет найти методы подсчета значений его членов, имея в виду получить их численные величины для отдельных гравиметрических пунктов области перемещения масс S_2.

Величины $g_S - \gamma_Q$ являются исходными гравиметрическими данными, полученными в результате гравиметрической съемки.

Физический смысл величины $\Delta g'$ — вертикальная составляющая притяжения перемещаемых масс рельефа на исследуемую точку P поверхности Земли S.

Подсчет значений $\Delta g'$ произведен известным методом [11], применяемым при вычислениях изостатических редукций силы тяжести.

Основной здесь явилась формула, выражающая величину вертикальной составляющей притяжения части полого цилиндра, высоты $\bar{h}_0$, на центр его верхнего основания

$$\Delta g_n' = \frac{2\pi f \delta}{n}\left(r_2 - r_1 + \sqrt{\bar{h}_0^2 + r_1^2} - \sqrt{\bar{h}_0^2 + r_2^2}\right),$$

где f — постоянная притяжения $6{,}67 \times 10^{-8}$ C G S;

δ — плотность перемещаемых масс;

n — число отделений, на которое разбит полый цилиндр системой равностоящих вертикальных плоскостей, проходящих через его ось;

r_1, r_2 — внутренний и внешний радиусы.

Однако даже при сложном рельефе возможно ближайшую окрестность каждого исследуемого пункта заменить плоскостью, произведя подсчет в центральной зоне по упрощенной формуле [$r_1 = 0$; $r_2 = 0{,}59$ *км*].

Для подсчета влияния на $\Delta g'$ остальной части области S_2 после выделения центральной зоны могут быть применены таблицы Мудрецовой [13] и результаты съемки высот $\bar{h}_0$ с Государственной карты в масштабе 1 : 1 000 000 [16].

Снятие средних высот отделений производится с помощью палетки, изготовленной на органическом стекле в масштабе карты.

Для вычисления члена $\vartheta\Delta\zeta$ в (6) выведена следующая зависимость:

$$\Delta\zeta = \frac{\Delta W}{\gamma_{Q'}} + \left(\frac{T}{\gamma_Q} - \frac{T}{\gamma_{Q'}}\right) + \left(\frac{\Delta U}{\gamma_\sigma} - \frac{\Delta U}{\gamma_{Q'}}\right), \qquad (7)$$

где $\Delta\zeta$ — смещение поверхности квазигеоида в направлении нормали;

ΔW — изменение величины потенциала реальной Земли;

γ_Q, $\gamma_{Q'}$ — нормальные значения силы тяжести на поверхностях Q и Q' (Q' — смещенное положение поверхности Q).

Ход вывода зависимости (7) таков:

$$H_1' = H' + \zeta';$$
$$H_1 = H + \zeta,$$

где H_1 и H_1' — высоты точек поверхности Земли над поверхностью относимости σ до и после перемещения масс;

H и H' — вспомогательные высоты;

ζ и ζ' — высоты квазигеоида.

Составлена разность

$$H_1' - H_1 = H' - H + \zeta' - \zeta. \qquad (8)$$

По определению

$$H_1' - H_1 = \Delta\sigma; \quad H' - H = \Delta\zeta,$$

где $\Delta\sigma$; $\Delta\zeta$ — смещения поверхностей σ и Σ в направлении нормали.

Кроме того,

$$\zeta' - \zeta = \frac{T'}{\gamma_{Q'}} - \frac{T}{\gamma_Q} = \frac{T}{\gamma_{Q'}} - \frac{\Delta W}{\gamma_{Q'}} + \frac{\Delta U}{\gamma_{Q'}} - \frac{T}{\gamma_Q},$$

где $T' = T - \Delta W + \Delta U$;

T и T' — значения возмущающего потенциала до и после перемещения масс.

Из (8) получаем

$$\Delta\sigma = \Delta\zeta - \frac{\Delta W}{\gamma_{Q'}} + \frac{\Delta U}{\gamma_{Q'}} + \left(\frac{T}{\gamma_{Q'}} - \frac{T}{\gamma_Q}\right). \tag{8a}$$

Из (8а) и следует формула (7).

Для нахождения величин ΔW может быть использовано выражение потенциала бесконечно тонкого слоя цилиндра на центр его верхнего основания [12]

$$\delta\Delta W = 2\pi f\delta\left[\sqrt{(\bar{h}_0 - z)^2 + r^2} - (\bar{h}_0 - z)\right] dz.$$

Интегрирование по z в пределах от 0 до $\bar{h}_0$ даст

$$\Delta W = \pi f\delta\left[\bar{h}_0\sqrt{\bar{h}_0^2 + r^2} - \bar{h}_0^2 + r^2 \ln\left|\frac{\bar{h}_0 + \sqrt{\bar{h}_0^2 + r^2}}{r}\right|\right].$$

Применив разложение в ряд Тейлора с удержанием величин первого порядка малости по сравнению с $\frac{\bar{h}_0}{r}$, получаем:

$$(\bar{h}_0^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} = r + \frac{\bar{h}_0^2}{2r},$$

$$\ln\left|\frac{\bar{h}_0 + \sqrt{\bar{h}_0^2 + r^2}}{r}\right| = \frac{\bar{h}_0}{r}.$$

Теперь

$$\Delta W = 2\pi f\delta\bar{h}_0 r\left(1 - \frac{\bar{h}_0}{2r}\right). \tag{9}$$

По формуле (9) вычисляется часть ΔW, вызванная действием перемещения рельефа ближайшей окрестности исследуемой точки, принимаемой за плоскость.

Влияние остальной части области S_2 перемещения масс рельефа учитывается с помощью таблиц Ламберта [20] и значений средних высот отделений зон Хейфорда, снятых с Государственной карты СССР [16] для гравиметрических пунктов области.

При подсчете величин $\frac{\partial\gamma}{\partial H}\Delta H$ используется выражение для среднего значения нормальной силы тяжести γ [12].

Для нахождения величины ΔH, полагая ее равной смещению центра инерции Земли в результате наложения на поверхность шарового конуса с образующей R и углом при вершине α, сферического слоя, толщиной $\bar{H}$, применена формула

$$\Delta H = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_{\bar{R}}^{\bar{R}+\bar{H}} \frac{\delta\rho^3 \sin\theta\cos\theta d\varphi d\theta d\rho}{\frac{4}{3}\pi R^3\delta_0},$$

где начало координат помещено в центр инерции Земли, ось Z направлена в центр района перемещения масс.

δ_0; δ — средние плотности Земли и перемещаемых масс

$$Z = \rho\cos\theta;\ dm = \delta\rho^2\sin\theta d\theta d\varphi d\rho;\ M = \frac{4}{3}\pi R^3\delta_0.$$

Проведение интегрирования и преобразований с удержанием величин первого порядка малости по сравнению с $\frac{\overline{H}}{R}$ приводит к равенству

$$\Delta H = \frac{3}{4}\overline{H}\frac{\delta}{\delta_0}\sin^2\alpha. \qquad (10)$$

При подсчетах по формуле (10) область перемещения масс S_2 может быть разбита на зоны, для каждой из которых значения $\sin\alpha$ получаются расчетом, а значения средних высот $\overline{H}$ снимаются с карт.

Величины $\frac{\partial\gamma}{\partial M}\Delta M$ могут быть получены, если перемещаемые массы принять в виде шарового сегмента, радиуса основания a, высоты h ·

$$\frac{\partial\gamma}{\partial M}\Delta M = \frac{f\delta\Delta v}{R^2}. \qquad (11)$$

$$\Delta v = \frac{1}{6}\pi h\,(3a^2 - h^2). \qquad (11а)$$

Таким образом подсчитываются все члены в правой части (6) и строится система значений аномалий «в свободном воздухе» после перемещения масс рельефа, на основании которой составляются гравиметрические карты с изолиниями для вычислений по (1), (1а), (1б).

Установленные зависимости (6), (7), (9), (10), (11) могут быть использованы для упрощения поля аномалий силы тяжести в горном районе как в случае общей гравиметрической съемки (1 пункт на 1000 *км*^{2}), так и при наличии съемок сгущения, независимо от того, что является предметом исследования — геоид или квазигеоид.

Для исследования был избран горный район Южного Урала (см. рис. 2), где удалось получить необходимые данные гравиметрического, астрономо-геодезического и картографического характера.

Так были получены: 1) гравиметрические данные в виде аномалий «в свободном воздухе» Гельмерта с учетом определений по 1949 г. включительно; 2) географические (геодезические) координаты гравиметрических пунктов (с точностью до 1′—1′,5) и высоты их над уровнем моря; 3) точки Лапласа тригонометрической сети I класса с астрономо-геодезическими уклонениями отвесной линии в меридиане и первом вертикале. Геодезические данные отнесены к новому референц-эллипсоиду СССР (Ф. Н. Красовского); 4) достаточные картографические материалы, из которых главным явилась Государственная карта СССР в масштабе 1 : 1 000 000 [16].

Для 385 гравиметрических пунктов области S_2 перемещения масс рельефа проведены вычисления по формуле (6) значений аномалий $g'_S - \gamma'_{Q'}$ и построена гравиметрическая карта в масштабе 1 : 1 000 000 с изолиниями через 10 *мгл*.

При этом оказалось возможным отбросить члены

$$\frac{\partial\gamma}{\partial H}\Delta H \text{ и } \frac{\partial\gamma}{\partial M}\Delta M \text{ в (6)};\left(\frac{T}{\gamma_Q} - \frac{T}{\gamma_{Q'}}\right) \text{ и } \left(\frac{\Delta U}{\gamma_{\sigma'}} - \frac{\Delta U}{\gamma_{Q'}}\right) \text{ в (7)}$$

ввиду следующих оценок[1]:

$$\left|\frac{\partial\gamma}{\partial H}\Delta H\right| < 1\times10^{-2}\ \textit{мгл};\quad \left|\frac{T}{\gamma_Q} - \frac{T}{\gamma_{Q'}}\right| < 1\times10^{-2}\ \textit{см};$$

$$\left|\frac{\partial\gamma}{\partial M}\Delta M\right| < 2\times10^{-2}\ \textit{мгл};\quad \left|\frac{\Delta U}{\gamma_{\sigma'}} - \frac{\Delta U}{\gamma_{Q'}}\right| < 2\times10^{-1}\ \textit{см}.$$

[1] Вычисления ведутся с точностью до 1×10^{-1} *мгл*.

Таким образом, вычисления велись по упрощенной формуле

$$(g'_S - \gamma'_{Q'}) = (g_S - \gamma_Q) - \Delta g' - \vartheta\Delta\zeta.$$

Получены значения

$$|\Delta g'| < 45 \text{ мгл};$$

$$|\vartheta\Delta\zeta| < 2 \text{ мгл}.$$

Система значений $(g'_S - \gamma'_{Q'})$ отнесена к эллипсоиду Жонголовича 1952 г. [14], как наиболее обоснованному в условиях нашей страны.

При подсчете значений $\Delta g'$ составлена таблица значений $\Delta g'_{ц}$ (приложение I).

При вычислениях величин $\Delta\zeta = \frac{\Delta W}{\gamma_{Q'}}$ на основании формулы (9) в радиусе r_L вокруг каждого исследуемого пункта ($r_L = 28{,}8$ *км* — радиус зоны L Хейфорда) составлена таблица значений по аргументу $\overline{h}_0$ (приложение II).

Обращают на себя внимание следующие особенности составленной гравиметрической карты в масштабе 1 : 1 000 000: 1) наибольшие упрощения поля аномалий силы тяжести получены для горной части и предгорий, где и расположен изучаемый район; 2) распределение отрицательных и положительных областей аномалий тесно связано с геологическими особенностями изучаемого района, что выявляется при наложении полученной гравиметрической карты на геологическую карту Южного Урала [18].

Первое из отмеченных обстоятельств особенно благоприятно для решения задачи, поставленной в настоящей работе.

Вычисление уклонений отвесной линии в упрощенном поле аномалий силы тяжести

Вычисление по формулам (1) уклонений отвеса в меридиане ξ и первом вертикале η требует знания величин $(g'_S - \gamma'_{Q'})$ для всей поверхности Земли S.

Сущность метода астрономо-гравиметрического нивелирования [1, 2], разработанного советскими учеными и примененного в нашей работе, позволяет ограничить область учета аномалий силы тяжести при вычислении уклонений отвеса, используя астрономо-геодезические данные для учета влияния аномалий в остальной части поверхности Земли при вычислениях по формулам (1).

В соответствии с требованиями метода радиус R_{S_2} области учета аномалий силы тяжести определен из соотношения $R_{S_2} : R_{S_1} = 2$, где R_{S_1} — радиус области исследования (100 *км*). При вычислениях по формулам (1а) и (1б) требуется найти значения функции $\delta\varphi$ для отдельных точек области S_2. При этом $\delta\varphi$ задана интегральным уравнением (1а), ядро и свободный член которого (1б) не имеют аналитического выражения и могут быть получены в численном виде для отдельных точек.

Применение метода последовательных приближений к решению интегрального уравнения (1а) позволяет найти первое приближение для функции $\delta\varphi$ и оценить разность первого и второго приближений

$$\delta\varphi_1 = -\frac{R - \rho_0}{4\pi^2} \int \frac{(g - \gamma) - (g - \gamma)_0}{r^3}\, d\sigma. \qquad (11б)$$

$$|\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2| = \left| \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{\rho - \rho_0}{r_0^3} \delta g\, d\sigma \right|. \qquad (12)$$

Рассмотрение (11б) указывает на быстрое убывание подинтегрального выражения при удалении от пункта исследования (см. рис. 1). Поэтому, принимая поверхность вблизи исследуемого пункта за плоскость и переходя к полярным координатам, получаем

$$\delta\varphi_1 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\delta\Delta g r_0 h_0 dr_0 d\theta}{(h_0^2 + r_0^2)^{\frac{3}{2}}};\quad \delta\Delta g = (g-\gamma) - (g-\gamma)_0.$$

Введение новой переменной $v = \frac{h_0}{(h_0^2 + r_0^2)^{\frac{1}{2}}}$ позволяет упростить подинтегральное выражение

$$\delta\varphi_1 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\delta\Delta g\, dv\, d\theta. \qquad (12\text{ а})$$

Вычисление $\delta\varphi_1$ ведется с применением формул Симпсона (для внутреннего интеграла) и Гаусса (для наружного).

Полагая число ординат в формуле Симпсона восемь, а в формуле Гаусса три, получаем рабочую формулу

$$\delta\varphi_1 = -0{,}00633\sum_{i=1}^{3} A_i\,[2\delta\Delta g_{i1} + 4(\delta\Delta g_{i2} + \ldots + \delta\Delta g_{i6}) + 2(\delta\Delta g_{i3} + \ldots + \delta\Delta g_{i7})],$$

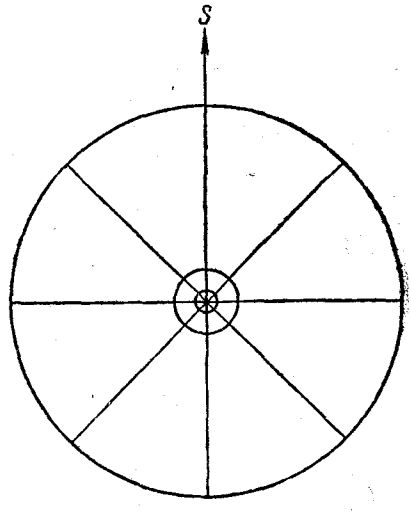


Рис. 3. Схема палетки № 1

где $A_i\,(i = 1, 2, 3)$ — коэффициенты Гаусса.

Точки $M_{ij}\,(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3, \ldots, 8)$ расположены в соответствии со схемой палетки № 1 (рис. 3).

Получены значения $|\delta\varphi_1| < 2$ *мгл* для различных пунктов области S_2, по системе которых построена карта значений $2\pi\delta\varphi_1$, послужившая для подсчета поправочных членов в формулах (1).

Оценка разности $|\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2| = \Delta\delta\varphi$ проведена с помощью градиентов.

В полярной системе координат

$$\Delta\delta\varphi = \left|\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_2}\frac{h_0 - h_0^p}{r_0}\,\frac{\delta\Delta g}{r_0}\,K\,dr_0\,d\alpha\right|,$$

где K — коэффициент, получаемый при помощи гравиметрических карт и карты значений $2\pi\delta\varphi_1$.

При оценке величины $\Delta\delta\varphi$ использованы соотношения

$$\lim_{r_0\to 0}\frac{h_0 - h_0^p}{r_0} = \frac{\partial h_0}{\partial r_0};$$

$$\lim_{r_0\to 0}\frac{\delta\Delta g}{r_0} = \frac{\partial(g-\gamma)}{\partial r_0}.$$

Максимальные значения градиентов вычисляются с помощью гравиметрических карт в масштабе 1 : 1 000 000 и 1 : 100 000, топографических карт и карты значений $2\pi\delta\varphi_1$.

В условиях исследуемого района Южного Урала получена следующая оценка

$$\Delta\delta\varphi < 6\times 10^{-2}\ мгл,$$

что лежит за пределами точности вычислений.

Оценка поправочного члена в (1)

$$\left|\frac{3\delta T}{2R}\right| < 4\times 10^{-2}\ мгл$$

позволяет пренебречь им и вести вычисления ξ и η по формулам

$$\xi = \frac{1}{4\pi\gamma_0}\int (g-\gamma)\frac{\partial s(\rho_0\psi)}{\rho_0\partial\psi}\cos A d\sigma - \frac{1}{\gamma_0}\int \frac{\delta\varphi}{r_0^2}\cos A d\sigma. \qquad (13)$$

Обозначив главную часть в (13) через $\overline{\xi}\ \overline{\eta}$, к вычислению их значений применяем формулы численного интегрирования, при этом всю область учета аномалий силы тяжести ($\overline{R}=100$ *км*) разбиваем на 2 части:

центральную $0 < r_0 < r_1 = 5$ *км*,

первую зону $r_1 < r_0 < \overline{R} = 100$ *км*.

Теперь $\overline{\xi} = \xi^{ц} + \xi^{I}$ (для $\overline{\eta}$ соответственно).

Применение для $\xi^{ц}$ и ξ^{I}

$$\xi^{ц} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{r_1}\int_0^{2\pi}(g-\gamma)\,\Phi^{ц}(r_0 h_0)\cos A dr_0 dA;$$

$$\xi^{I} = \frac{1}{2\pi}\int_{r_1}^{\overline{R}}\int_0^{2\pi}(g-\gamma)\Phi^{I}(r_0 h_0)\cos A\, dr_0\cdot dA$$

методов численного интегрирования позволяет получить рабочие формулы для $\xi^{ц}$ и $\eta^{ц}$

$$\xi^{ц} = \sum_{i=1}^{4} K_i\{2(\Delta g_{i1} - \Delta g_{i5}) + 2{,}82844[(\Delta g_{i2} + \Delta g_{i8}) - (\Delta g_{i4} + \Delta g_{i6})]\}. \qquad (14)$$

Здесь число ординат при вычислении по формуле Симпсона принято равным восьми, а по формуле Гаусса четырем;

$$K_i = \frac{5}{24}A_i\Phi^{ц}(r_0{}^i h_0).$$

$$\xi^{I} = \sum_{i=1}^{8} M_i\{2(\Delta g_{i1} - \Delta g_{i9}) + 3{,}69552[\Delta g_{i2} + \Delta g_{i16}) - (\Delta g_{i8} + \Delta g_{i10})] + 1{,}41422[(\Delta g_{i3} + \Delta g_{i15}) - (\Delta g_{i7} + \Delta g_{i11})] + 1{,}53072[(\Delta g_{i4} + \Delta g_{i14}) - (\Delta g_{i6} + \Delta g_{i12})]\}. \qquad (15)$$

Число ординат соответственно (16) и (8);

$$M_i = 1{,}97917 A_i \Phi^{\text{I}}(r_0^i h_0).$$

Упрощение функции Венинг Мейнеса для внешней точки (стр. 66) проведено в центральной зоне с удержанием членов первого порядка, а в первой зоне с удержанием членов второго порядка по сравнению с $\frac{(r_0)_{\max}}{R}$. При этом получены следующие выражения значений Φ^{II} и Φ^{I} (см. приложения III, IV):

$$\Phi^{\text{II}}(r_0 h_0) = -\frac{\varkappa''}{\gamma_0} \frac{r_0^2}{(r_0^2 + h_0^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad r^2 = r_0^2 + h_0^2;$$

$$\Phi^{\text{I}}(r_0 h_0) = -\frac{\varkappa''}{\gamma_0}\left(\frac{r_0}{r^3} + \frac{1}{R}\frac{1+\frac{r_0}{r}}{\frac{r}{r_0}+\frac{h_0}{r}+\frac{1}{2}\frac{r_0}{R}}\right);$$

$$r^2 = r_0^2 + h_0^2 + \frac{h_0 r_0^2}{R}. \qquad (16)$$

Здесь (16) произведен переход от переменной ψ к переменной r_0 $\left(\psi = \frac{r_0}{R}\right)$ и от параметра ρ_0 к h_0 $(\rho_0 = h_0 + R)$.

Таким образом, получены значения

$$\bar{\xi} = \xi^{\text{II}} + \xi^{\text{I}} \text{ и } \bar{\eta} = \eta^{\text{II}} + \eta^{\text{I}}.$$

При подсчете поправочных членов в (13)

$$\delta\xi = \frac{1}{\gamma_0}\int \frac{\delta\varphi}{r_0^2}\cos A\, d\sigma$$

($\delta\eta$ соответственно) применение методов численного интегрирования с разбивкой всей области учета аномалий силы тяжести и значений $\delta\varphi$ на центральную $(0 < r_0 < r_1 = 5$ *км*$)$ и первую $(r_1 < r_0 < \bar{R} = 100$ *км*$)$ приводит к весьма небольшим значениям $\delta\xi$ и $\delta\eta$, а именно:

$$|\delta\xi| < 3 \times 10^{-2} \text{ сек.}; \quad |\delta\eta| < 9 \times 10^{-2} \text{ сек.}$$

Однако эти поправки внесены в значения ξ и η для всех 34 пунктов района исследования.

Итак,

$$\xi_1 = \bar{\xi} + \delta\xi; \quad \eta_1 = \bar{\eta} + \delta\eta.$$

Проведенный метод упрощения поля аномалий силы тяжести связан с удалением масс рельефа в ограниченной части поверхности Земли.

Применение его позволило вывести местную форму фигуры Земли исследуемого района.

Затем после восстановления действия на уклонение отвеса удаленных масс были получены гравиметрические уклонения отвеса в меридиане и первом вертикале, соответствующие реальной фигуре Земли:

$$\xi^{\text{гр}} = \xi_1 + \Delta\xi; \quad \eta^{\text{гр}} = \eta_1 + \Delta\eta,$$

где $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$ — поправки за удаленный рельеф.

Введение поправок за рельеф

Учет влияния на ξ_1 и η_1 удаленных масс рельефа проведен по методу Ф. Н. Красовского [15], причем обращено внимание на подсчет влияния именно тех масс, которые были удалены при получении системы значений

$$(g'_S - \gamma'_{Q'}).$$

Вокруг каждого из 34 исследуемых пунктов, расположенных в области S_1 (см. рис. 2), образовано 5 зон: центральная — 0—5 *км*, первая — 5—28,8 *км*, вторая — 28,8—100 *км*, третья — 100—300 *км*. четвертая — 300—350 *км*.

В центральной зоне применен метод численного интегрирования при вычислении интегралов [15, стр. 354]

$$\Delta\xi^{\text{ц}} = \frac{\varkappa''}{\gamma_0} f\delta \int_0^{r_1}\int_0^{2\pi} \frac{\Delta h \cos A}{\sqrt{\Delta h^2 + r^2}}\, dr dA, \qquad (17)$$

где Δh — разность высот текущей точки и исследуемого пункта. Значения Δh сняты палетками с топографических карт.

Величины, полученные для $\Delta\xi^{\text{ц}}$ и $\Delta\eta^{\text{ц}}$, показывают их сильную зависимость от рельефа местности.

Получено

$$|\Delta\xi^{\text{ц}}| \leqslant |1'',\ 1|; \quad |\Delta\eta^{\text{ц}}| \leqslant 1'',\ 5.$$

Влияние первой зоны учтено с помощью карты средних высот рельефа, составленной на материалах Государственной карты СССР масштаба, 1 : 1 000 000 [16].

Здесь произведена разбивка зоны на отделения системой равноотстоящих радиусов (24 радиуса) и концентрических окружностей, радиусы которых равны соответственно 5,0 *км*; 8,44 *км*; 12,40 *км*; 18,80 *км*; 28,80 *км* и применена формула [15, стр. 358]

$$\Delta\xi^{\text{I}}_m = \frac{\varkappa''}{\gamma_0} f\delta\Delta h_m \ln\left|\frac{r_к + \sqrt{r_к^2 + \Delta h_m^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + \Delta h_m^2}}\right| (\sin A_{n+1} - \sin A_n)] \qquad (18)$$

(соответственно для $\Delta\eta^{\text{I}}_m$);

где $\Delta\xi^{\text{I}}_m$ — влияние на уклонения отвеса одного отделения первой зоны;

r_k; r_i — внешний и внутренний радиусы участков первой зоны.

Величины Δh_m сняты с карты средних высот рельефа, составленной в масштабе 1 : 1 000 000 на основе Государственной карты СССР [16].

Подсчет в зонах со второй по четвертую основан на применении одной и той же формулы [15, стр. 355]

$$\Delta\xi_m = \frac{\varkappa''}{\gamma_0} f\delta\Delta h_m (\sin A_{n+1} - \sin A_n) \ln \frac{r_k}{r_i}. \qquad (19)$$

Радиусы кольцевых участков зон подбираются с учетом условий $\lg \frac{r_k}{r_i} = K$ ($K = \text{const.}$) для каждой зоны.

Для второй зоны получено $K_{II} = 0{,}13515$, что соответствует четырем участкам при $r_1 = 28{,}8$ *км*, $r_5 = 100$ *км*: для третьей $K_{III} = 0{,}15304$ — трем участкам; для четвертой $K_{IV} = 0{,}06670$ — один участок.

Все участки зон разбиты на 24 отделения равноотстоящими радиусами.

Мы отказались от применения зон равного влияния, требующего двойного (по сравнению с принятым методом подсчета) объема работы по съемке с карт значений Δh.

Таблицы, примененные при подсчетах во всех указанных зонах, даны в приложениях V, VI.

Итак, получено

$$\xi^{гр} = \xi_1 + \Delta\xi^{II} + \Delta\xi^{I} + \Delta\xi^{II} + \Delta\xi^{III} + \Delta\xi^{IV}$$

(соответственно для $\eta^{гр}$).

По системе значений $\xi^{гр}$ и $\eta^{гр}$ для 34 пунктов исследуемого района построены карты гравиметрических уклонений отвеса в меридиане и первом вертикале и изолиниями через 0″,5 и 0″,8 соответственно.

Вывод интерполированных уклонений отвеса

В полученные величины $\xi^{гр}$ и $\eta^{гр}$ введены поправки за ограничение области учета аномалий силы тяжести и несовпадение нормалей к геодезическому референц-эллипсоиду и гравиметрическому сфероиду.

Таким образом, получено

$$\xi^i = \xi^{гр} + \Delta_\xi;\ \eta^i = \eta^{гр} + \Delta_\eta,$$

где ξ^i, η^i — интерполированные уклонения отвеса [1], близкие к астрономо-геодезическим.

Для определения Δ_ξ и Δ_η принимается линейный характер функциональной зависимости между величинами этих поправок и координатами исследуемых пунктов

$$\Delta_\xi = X\varphi + Y\lambda + Z,$$
$$\Delta_\eta = X_1\varphi + Y_1\lambda + Z_1, \qquad (20)$$

где (φ, λ) — координаты пунктов.

Знание величин Δ_ξ и Δ_η для 9 астропунктов на границе исследуемого района: $\Delta_\xi = \xi^{а-г} - \xi^{гр}$; $\Delta_\eta = \eta^{а-г} - \eta^{гр}$ позволяет построить две системы уравнений ошибок (широтные и долготные).

Решение по способу наименьших квадратов приводит к следующим интерполяционным формулам для определения Δ_ξ и Δ_η:

$$\Delta_\xi = +0{,}953\varphi + 0{,}002\lambda - 5{,}137;$$
$$\Delta_\eta = -0{,}630\varphi + 0{,}593\lambda + 2{,}794. \qquad (21)$$

На основании формул (21) для 34 пунктов исследуемого района составлена таблица поправок, переводящих гравиметрические уклонения отвеса в интерполированные.

Оценка точности и выводы

Точность получения $\xi^{гр}$ и $\eta^{гр}$, оцененная с помощью астрономо-геодезических уклонений отвесной линии, известных для 9 пунктов на границе района исследования, такова:

$$\varepsilon_\xi = \pm 1'',44; \quad \varepsilon_\eta = \pm 1'',46,$$

где ε_ξ и ε_η — средние ошибки гравиметрического вывода по формулам М. С. Молоденского, лежащие, очевидно, в границах современных возможностей при наличии общей гравиметрической съемки СССР.

Оценка точности вывода ξ^i и η^i приводит к следующим величинам средних ошибок $\xi_{\xi^i} = \pm 1'',97$; $\varepsilon_{\eta^i} = \pm 1'',94$.

Итак, интерполированные уклонения могут быть приняты за величины астрономо-геодезических уклонений отвеса со средней ошибкой, не превышающей $2''$.

Достигнутая точность выводов достаточна для использования полученных результатов при картографировании местности в масштабе 1 : 200 000 и мельче.

Для геодезических целей указанная средняя ошибка вывода должна быть снижена до $1''$—$0'',5$, что возможно при наличии гравиметрических съемок сгущения вокруг пунктов исследования без изменения разработанной нами методики, изложенной в настоящей статье.

Рассмотрение методики выполнения работы и ее результатов позволяет сделать следующие выводы.

1. Исследование местной фигуры Земли в горном районе, основанное на изучении формы квазигеоида гравиметрическим методом с применением астрономо-геодезических данных для учета влияния несовпадения систем и дальних зон, позволяет получить результат, близкий к астрономо-геодезической характеристике района. (Средняя ошибка вывода интерполированных уклонений отвеса при наличии только общей гравиметрической съемки не превышает $2''$.)

2. Основным условием достижения максимальной точности вывода является рациональное проведение метода косвенной интерполяции значений аномалий «в свободном воздухе» между гравиметрическими пунктами.

Выведенные нами формулы (6), (7), (9), (10) и методы расчета обеспечивают необходимую точность результата как при наличии только общей гравиметрической съемки, так и при проведении съемок сгущения.

3. Гравиметрическая карта, построенная на системе значений аномалий «в свободном воздухе» после осуществления упрощения поля аномалий силы тяжести (пункт 2), по-видимому, характеризует скорее геологические особенности района, нежели его гипсометрию.

Наиболее важной для целей нашей работы особенностью указанной карты является значительное упрощение поля аномалий силы тяжести именно в горной части района исследования.

4. Основным методом вычислений по формулам (1), (1а), (1б) должен быть метод численного интегрирования с применением наиболее точных формул (Симпсона и Гаусса).

Менее точный метод градиентов следует применять только при оценке величины поправочных членов.

5. Преобразованные выражения для функции Венинг Мейнеса могут быть применены при исследованиях местной фигуры Земли в границах $0 < \psi < 10°$, что полностью обеспечивает применение указанных преобразованных выражений для всех горных массивов нашей страны.

6. Некоторые изменения, внесенные в методику подсчета поправок в уклонении отвеса за перемещенные массы рельефа (применение равноотстоящих плоскостей при разбивке местности вокруг исследуемого пункта), уменьшили вдвое объем наиболее трудоемкой операции — снятия с карт средних высот отделений.

Кроме того, такой подсчет обеспечил однотипность исходных данных (значений высот) при вычислениях поправок за рельеф в уклонения отвеса в меридиане и первом вертикале.

7. Одним из условий получения требуемой точности результата вычислений является использование на всех этапах работы одной и той же модели местности (карт средних высот рельефа, составленных на основании Государственной карты [16] и Гипсометрической карты Европейской части СССР [17]).

Вопросы техники вычислений, объем которых оказался очень большим, в настоящей статье не рассматриваются.

Приложение I

Значения $\Delta g_ц'$, выраженные в 1×10^{-1}, *мгл*

$\overline{h_0}$, *м*	$\Delta g_ц'$	$\overline{h_0}$, *м*	$\Delta g_ц'$	$\overline{h_0}$, *м*	$\Delta g_ц'$	$\overline{h_0}$, *м*	$\Delta g_ц'$
50	54	230	209	410	315	590	387
60	64	240	216	420	320	600	390
70	74	250	223	430	325	610	393
80	84	260	230	440	329	620	396
90	93	270	236	450	333	630	399
100	102	280	243	460	338	640	402
110	112	290	249	470	342	650	405
120	121	300	255	480	346	660	408
130	130	310	261	490	350	670	411
140	138	320	267	500	354	680	414
150	146	330	273	510	358	690	417
160	155	340	279	520	362	700	419
170	163	350	284	530	366	710	422
180	171	360	290	540	369	720	424
190	179	370	295	550	373	730	427
200	187	380	300	560	377	740	430
210	194	390	305	570	380	750	432
220	202	400	310	580	383	760	434
						850	459

Приложение II

Значения $\dfrac{\Delta W}{\gamma_{Q'}}$

$\overline{h_0}$, *м*	Зоны Хейфорда, *мгл*		
	A — L	*A — N*	*A — O*
50			0,3
100	0,1	0,4	0,6
200	0,2	0,7	1,2
300	0,3	1,1	1,8
400	0,4	1,4	2,3
500	0,5	1,8	2,9
600	0,6	2,1	3,5
700	0,7	2,5	4,4
800	0,8	2,9	4,6
900	0,9	3,2	5,2
1000	1,0	3,5	5,8

Значения величин $K_i = \frac{S}{24} A_i \Phi^{II}(r_o^i, h_0)$

(центральная зона)

h_0, м	I r_0	II r_0	III r_0	IV r_0	h_0, м	I r_0	II r_0	III r_0	IV r_0
10	2191	865	—	—	220	1322	842	—	—
20	2183	865	—	—	230	1271	840	—	—
30	2170	864	—	—	240	1221	838	—	—
40	2151	864	—	—	250	1172	836	—	—
50	2127	864	—	—	260	1125	834	—	—
60	2099	863	—	—	270	1079	831	—	—
70	2067	863	—	—	280	1035	829	—	—
80	2030	862	—	—	290	0992	826	—	—
90	1990	861	—	—	300	0950	824	421	163
100	1947	850	425	164	310	0910	821	—	—
110	1901	859	—	—	320	0872	818	—	—
120	1852	859	—	—	330	0835	816	—	—
130	1801	857	—	—	340	0800	813	—	—
140	1750	856	—	—	350	0766	810	—	—
150	1647	854	—	—	360	0734	807	—	—
160	1643	853	—	—	370	0703	804	—	—
170	1589	851	—	—	380	0673	800	—	—
180	1535	850	—	—	390	0645	797	—	—
190	1481	818	—	—	400	0618	794	417	162
200	1427	846	424	165	560	0321	734	409	160

Примечание. K_i — в 1×10^{-5} *сек/мгл*; A_i — коэффициент Гаусса. Все значения K_i отрицательны.

Значения функции $\Phi'(r_0^i h_0)$ **выраженные в** 1×10^{-5} *сек/мгл*

h_0	I r_0 = 6,88670 м	II r_0 = 14,65865 м	III r_0 = 27,53685 м	IV r_0 = 43,78660 м	V r_0 = 61,21340 м	VI r_0 = 77,46315 м	VII r_0 = 90,34135 м	VIII r_0 = 98,11330 м
10	0	0	0	0	0	0	0	0
100	3057	1431	767	486	349	278	240	220
200	3054	1414	767	486	349	278	240	220
300	3050	1395	767	486	349	278	240	220
400	3042	1384	767	486	349	278	240	220
560	3025	1354	767	486	349	278	240	220
950	2942	1306	766	486	349	278	240	214

Приложение V

Значения величин $\frac{5\pi}{12} \cdot \frac{\varkappa''}{\gamma_0} \cdot f\delta A_i \frac{\Delta h}{\sqrt{\Delta h^2 + r_i^2}}$

для подсчета влияния центральной зоны $(\Delta\xi^{\text{ц}})$

Δh, м	r_1	r_2	r_3	Δh, м	r_1	r_2	r_3
10	0″,024	0″,009	—	220	0″,495	0″,191	—
20	048	18	—	230	514	200	—
30	72	26	—	240	534	208	—
40	96	35	—	250	552	217	0″,076.
50	120	44	0″,016	260	570	225	—
60	144	52	—	270	588	234	—
70	168	61	—	280	606	243	—
80	191	70	—	290	623	251	—
90	214	78	—	300	640	260	0″,092
100	238	87	0″,032	310	656	268	—
110	261	96	—	320	672	276	—
120	284	104	—	330	688	285	—
130	306	113	—	340	703	294	—
140	328	122	—	350	718	304	0″,107
150	350	130	0″,046	360	733	311	—
160	372	139	—	370	747	319	—
170	393	148	—	380	761	327	—
180	414	156	—	390	774	336	—
190	435	165	—	400	788	344	0″,122
200	456	174	0″,061	—	—	—	—
210	476	182	—	—	—	—	—

Приложение VI

Значения величин $\frac{\varkappa''}{\gamma_0} \frac{1}{M} f\delta \lg \frac{r_к + \sqrt{r_к^2 + \Delta h^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + \Delta h^2}} \cdot \Delta h$

для подсчета влияния первой зоны

Δh, м	$r_1 - r_2$, м	$r_2 - r_3$, м	$r_3 - r_4$, м	$r_4 - r_5$, м
100	0″,196	0″,144	0″,156	0″,160
200	392	288	312	319
300	587	432	467	479
400	782	576	623	638
500	976	719	778	798
600	1″,170	863	934	958
700	363	1″,006	1″,089	1″,118
800	555	149	245	277
900	746	291	400	436
1000	936	433	555	595

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Молоденский М. С. Определение фигуры геоида при совместном использовании астрономо-геодезических уклонений отвесной линии и карты аномалий силы тяжести. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 17, 1937.

2. Молоденский М. С. Основные вопросы геодезической гравиметрии. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 42, 1945.

3. Молоденский М. С. Внешнее гравитационное поле физической поверхности Земли. Изв. АН СССР, серия географич. и геофизич., т. XII, вып. 3, 1948.

4. Молоденский М. С. Приближенный метод решения уравнения, определяющего фигуру квазигеоида. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 68, 1949.

5. Молоденский М. С. Изучение фигуры физической поверхности Земли геометрическим (астрономо-геодезическим) методом. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 75, 1950.

6. Юркина М. И. Методы исследования фигуры Земли в горном районе. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 103, 1954.

7. Еремеев В. Ф. Сравнение двух способов астрономо-гравиметрического нивелирования. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 75, 1950.

8. Зверев М. С. Гравиметрические работы в СССР. Сб. ГУГК, XX лет советской геодезии и картографии. Редбюро ГУГК, 1937.

9. Зверев М. С. и Киселев Н. В. Методика гравиметрического вывода уклонений отвеса. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 11, 1936.

10. Молоденский М. С. и Лозинская М. И. Астрономо-гравиметрическое нивелирование по 51 и 55 параллелям от 30 до 56 меридиана. Исследования по гравиметрии. Редбюро ГУГК. Сб. 3, 1939.

11. Михайлов А. А. Курс гравиметрии и теории фигуры Земли. Редбюро ГУГК, 1939.

12. Идельсон Н. И. Теория потенциала, Гостехтеоретиздат, 1932.

13. Мудрецова Е. А. Таблицы топографических и топографо-изостатических поправок по гипотезе Пратта-Хейфорда. Геодезиздат, 1940.

14. Жонголович И. Д. Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним. Тр. института теоретической астрономии АН СССР, вып. III, 1952.

15. Красовский Ф. Н. Руководство по высшей геодезии, ч. II. Геодезиздат, 1942.

16. Государственная карта СССР. Масштаб 1 : 1 000 000. Изд. ГУГК N—40, 1954; O—40, 1953; N—41, 1953; O—41, 1953.

17. Гипсометрическая карта Европейской части СССР. Масштаб 1 : 5 000 000. Изд. ГУГК, 1940.

18. Геологическая карта Урала. Масштаб 1 : 1 000 000. Объяснительная записка. Изд. главного геолого-разведочного управления, 1931.

19. Stokes G. On the variation of gravity at the surface of the Earth. Mathematical and Physical papers, Cambridge, 1883.

20. Lambert W. D. and Darling F. W. Tables for determining the form of the Geoid and its indirect effect on gravity Coast and Geod. Surv., Spec. Pub., № 199, 1936.