Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXVI, вып. 2, 1959 г.

ПРИМЕНЕНИЕ В ГЕОФИЗИКЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В НИЖНЮЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

С. В. Шалаев

При геологическом истолковании геофизических наблюдений часто возникает необходимость вычислять потенциальную функцию в нижней полуплоскости по ее значениям, определяемым путем измерений на поверхности земли. Решением этой задачи занимались многие исследователи [2, 4, 9, 20 и др.]. Г. Ренбоу, например, осуществлял аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость второй производной гравитационного потенциала, с помощью которой он определял границу раздела двух сред различной плотности [20]. Много позже для этой же цели О. А. Шванк [18] и А. К. Маловичко [9] применили первую производную гравитационного потенциала. А. А. Заморев [4] анализировал интегральную формулу (1), позволяющую в двухмерном случае вычислять потенциальную функцию U в нижней полуплоскости

$$U(0, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{\omega z} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, 0) \cos \omega x dx, \qquad (1)$$

где x, z — прямоугольные координаты.

Б. А. Андреев показал важное значение особых точек потенциальных полей для геологического истолкования гравитационных и магнитных аномалий [1]. Он же [3] использовал исключительно характерный вид кривых потенциала и его производных на границе тела с вмещающей средой для определения глубины залегания и мощности пластообразных и некоторых других геологических объектов (метод предельных распределений).

Если исследуемая потенциальная функция обращается в бесконечность на поверхности тела, вызывающего исследуемую аномалию, то указанные способы аналитического продолжения дают надежные результаты лишь на некотором удалении от тела. Так, например, способ Г. Ренбоу [20] и метод, основанный на применении теоремы о среднем [9], перестают давать удовлетворительные результаты при приближении к центру точечного источника на расстояние, меньшее половины глубины его залегания.

Ошибка определения потенциала с помощью теоремы о среднем резко возрастает вблизи точечного источника, так как потенциал его

$U=\frac{1}{r}$ стремится к бесконечности при $r\to 0$. Уже этот частный случай свидетельствует о целесообразности пересчета в нижнее полупространство не самого потенциала, а некоторой функции от него $\Phi(U)$. Например, для точечного источника можно принять $\Phi(U)=\frac{1}{U}=r$. Выражение $\Phi(U)=r$ в центре точечного источника не обращается в бесконечность. Однако функция, обратная потенциалу, в общем случае не является гармонической и к ней нельзя применять теорему о среднем и другие приемы аналитического продолжения, разработанные для гармонических функций.

В двухмерном случае, рассмотрением которого мы ограничиваемся, для преодоления возникшего затруднения предлагается производить аналитическое продолжение не самого потенциала U, а некоторой функции $\Phi(W)$ от комплексного выражения $W=U+iV$ (U и V — сопряженные гармонические функции). Функция $\Phi(W)$ подбирается с таким расчетом, чтобы сложная функция $\Phi[W(\tau)]=\Phi[W(x+iz)]$ оказалась аналитической в интересующей нас области.

1. Аналитическое продолжение потенциальной функции в нижнюю полуплоскость

Приведем вывод формулы, позволяющей вычислять потенциальную функцию в нижней полуплоскости по ее значениям, определенным путем измерений на поверхности земли. Для этого воспользуемся следующей теоремой [16, стр. 61]: пусть $f(\tau)$ — аналитическая функция, регулярная в полосе

$$-a<z<b, \tag{2}$$

где $a>0$, $b>0$,
и пусть в каждой полосе, внутренней к $-a<z<b$

$$|f(\tau)|<Le^{-(\lambda-\varepsilon)x};\quad (x\to+\infty);\quad (\varepsilon<\lambda);$$

$$|f(\tau)|<Me^{(\mu-\varepsilon)x};\quad (x\to-\infty);\quad (\varepsilon<\mu) \tag{3}$$

для всякого положительного ε, причем L, M, λ и μ — некоторые фиксированные положительные числа.

Тогда

$$f(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\tau\omega}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{i\omega x}dx. \tag{4}$$

Полагая в формуле (4) $\tau=iz$ и $\tau=-iz$ и складывая полученные таким путем два равенства, найдем

$$f(iz)+f(-iz)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}ch\omega z d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{i\omega x}dx. \tag{5}$$

Разобьем промежуток интегрирования внешнего интеграла в выражении (5) на два промежутка $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ и изменим на об-

ратный знак переменной интегрирования в интеграле по первому промежутку. Тогда получим

$$f(iz)+f(-iz)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} ch\omega z d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\omega x dx. \qquad (6)$$

Полагая

$$f(\tau)=\Phi[W(\tau)]\,e^{-B\tau^2};\quad (B>0),$$

придадим выражению (6) следующий вид

$$\{\Phi[W(iz)]+\Phi[W(-iz)]\}\,e^{Bz^2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} ch\omega z d\omega \times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi[W(x)]\,e^{-Bx^2}\cos\omega x dx \qquad (7)$$

или, если $\Phi(W)=\frac{1}{W}$

$$\frac{1}{W(iz)}+\frac{1}{W(-iz)}=\frac{2}{\pi}e^{-Bz^2}\int_0^{\infty} ch\omega z d\omega \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{W(x)}e^{-Bx^2}\cos\omega x dx. \qquad (8)$$

Формула (8) дает аналитическое продолжение функции $W(\tau)$ в нижнюю полуплоскость. Если ограничиться рассмотрением двухмерных тел постоянной плотности с поперечным сечением, ограниченным ломаной линией с конечным числом звеньев, то третья производная W_{xxz}, которую можно найти, располагая данными гравиразведки, представляет собой рациональную дробь (см. ниже формулу (38)). Беря в формуле (8) в качестве W эту третью производную и разлагая $\frac{1}{W_{xxz}}$ на простейшие дроби и полином, можно проверить формулу (8) непосредственно, используя какие-нибудь полные таблицы определенных интегралов [11]. При наших предположениях особыми точками $\frac{1}{W_{xxz}}$ будут являться корни $\alpha_к+i\beta_к$ полинома $P(\tau)$, а формула (8) оказывается справедливой для тех точек (x, z), ординаты которых удовлетворяют неравенству $z^2<\alpha_к^2+\beta_к^2$ (см. приложение).

В практически важных для гравиразведки случаях корни полинома $P(\tau)$ располагаются таким образом, что не мешают определению положения наиболее интересных угловых точек или совсем отсутствуют, что имеет, например, место для пласта или уступа.

Вычислим выражение (7), причем вначале рассмотрим интеграл (1). Разобъем его на два слагаемых

$$U(0, z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{A} e^{\omega z}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} U(x, 0)\cos\omega x dx+\Delta I, \qquad (9)$$

где

$$\Delta I=\frac{1}{\pi}\int_A^{\infty} e^{\omega z}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} U(x, 0)\cos\omega x dx.$$

Меняя в первом слагаемом порядок интегрирования, что можно делать при условии сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |U(x, 0)|\,dx$, найдем

$$U(0, z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} U(x, 0)\left[\frac{z}{x^2+z^2}(e^{Az}\cos Ax - 1) + \right.$$

$$\left. + \frac{x}{x^2+z^2}e^{Az}\sin Ax\right]dx.$$

Полагая $A = \frac{\pi}{\Delta}$, $z = \Delta$, $x = n\Delta$ (Δ — некоторая постоянная, а n — целое число) и используя формулу трапеций, получим выражение, установленное Г. Ренбоу [20]

$$U(0, \Delta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} U(n\Delta, 0)\frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1+n^2}. \qquad (10)$$

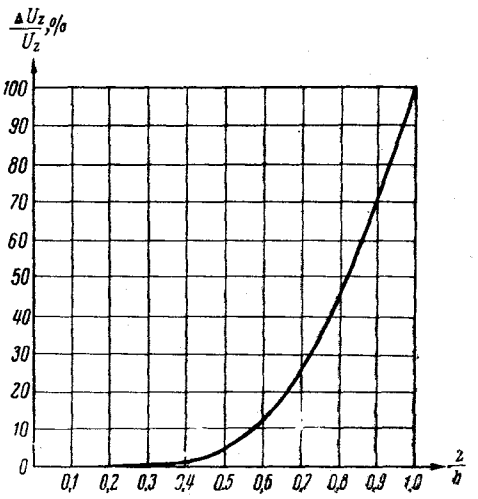


Рис. 1. Кривая относительной ошибки $\frac{\Delta U_z}{U_z}$ %

Г. Ренбоу приводит нестрогий вывод формулы (10), который не дает возможности установить величину ошибки ΔI. Если найти ΔI для случая кругового цилиндра, создающего на поверхности земли аномалию силы тяжести

$$U_z(x, 0) = \frac{h}{x^2+h^2},$$

то будем иметь

$$\frac{\Delta U_z(0, z)}{U_z(0, z)} = \frac{\Delta I}{U_z(0, z)} = e^{-A(h-z)};\ (z \leqslant h), \qquad (11)$$

где h — глубина залегания оси цилиндра.

Выражение (11) показывает, что при $\frac{z}{h} < 0{,}5$; $A = \frac{\pi}{\Delta}$ и $z = \Delta$ относительная ошибка $\frac{\Delta U_z}{U_z}$ не превосходит 5%. При $\frac{z}{h} > 0{,}5$ эта относительная ошибка резко возрастает (рис. 1).

Аналогичным образом при $A = \frac{\pi}{\Delta}$, $z = \Delta$ и $B = \frac{0{,}1}{\Delta^2}$ с помощью формулы (7) получим

$$\Phi[W(i\Delta)] + \Phi[W(-i\Delta)] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Phi[W(n\Delta)]\frac{(-1)^n e^{\pi - 0{,}1(n^2+1)}}{1+n^2} + \Delta I_1 = k_0\Phi[W(0)] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} k_n\{\Phi[W(n\Delta)] + \Phi[W(-n\Delta)]\} + \Delta I_1, \qquad (12)$$

где

$$\Delta I_1 = \frac{1}{\pi} e^{-Bz^2} \int_A^{\infty} e^{\omega z} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi[W(x)] e^{-Bx^2} \cos \omega x dx;$$

$k_0 = 6{,}665$; $k_1 = -3{,}015$; $k_2 = 0{,}8935$; $k_3 = -0{,}2710$; $k_4 = 0{,}07918$;

$k_5 = -0{,}02104$; $k_6 = 0{,}004921$; $k_7 = -0{,}0009929$.

Воспользуемся обозначениями

$$E = \frac{U}{U^2 + V^2}; \quad F = -\frac{V}{U^2 + V^2}, \tag{13}$$

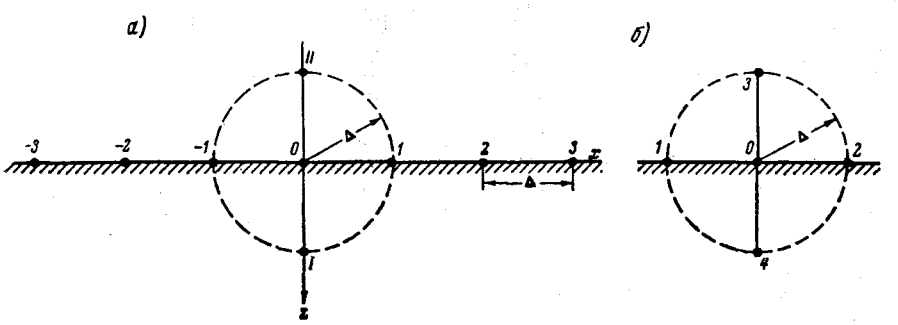


Рис. 2. Пояснение к формулам:
а — (14); *б* — (19)

тогда

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{U + iV} = E + iF; \quad U = \frac{E}{E^2 + F^2}; \quad V = -\frac{F}{E^2 + F^2},$$

а равенство (12), если в нем положить $\Phi(W) = \frac{1}{W}$ и разделить мнимую и вещественную части, примет следующий вид (рис. 2, *а*):

$$U_1 = U(0, \Delta) = \frac{E_1}{E_1^2 + F_1^2}; \quad V_1 = V(0, \Delta) = -\frac{F_1}{E_1^2 + F_1^2}, \tag{14}$$

где

$$E_1 = -E_{II} + k_0 E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n (E_n + E_{-n}),$$

$$F_1 = -F_{II} + k_0 F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n (F_n + F_{-n}).$$

Вычисленные с помощью формулы (14) значения Δg для кругового цилиндра (табл. 1) в основном совпадают с теоретическими с точностью до долей процента. Столь же хорошие результаты получаются и при пересчете по формуле (14) в стороне от оси цилиндра. Заметим, что формула (14) в случае кругового цилиндра давала бы абсолютно точные результаты при пересчете значений Δg, если бы сумма ее коэффициентов была равна двум (см. ниже формулу (29)).

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_n = 2,$$

в то время как у нас

$$\sum_{n=-7}^{+7} k_n = k_0 + 2k_1 + 2k_2 + \ldots + 2k_7 = 2{,}004,$$

т. е. разница составляет лишь доли процента.

Таблица 1

z	Теоретические значения Δg	Значения Δg, вычисленные по формуле (14)	z	Теоретические значения Δg	Значения Δg, вычисленные по формуле (14)
0,00	100	100	10,04	—25 000	∞
1,00	111	111	11,00	—1 000	—1042
2,00	125	124	12,00	—500	—510
3,00	143	142	13,00	—333	—338
4,00	167	166	14,00	—250	—253
5,00	200	198	15,00	—200	—202
6,00	250	248	16,00	—167	—168
7,00	333	329	17,00	—143	—144
8,00	500	490	18,00	—125	—126
9,00	1000	962	19,00	—111	—112
10,00	∞	25000	20,00	—100	—100

Если ввести функцию

$$U^*(x, z) = \frac{1}{2}[U(x, z) + U(-x, z) + U(x, -z) + U(-x, -z)],$$

у которой $U_x^*(0, z) = 0$, $U_z^*(x, 0) = 0$, и воспользоваться уравнениями Коши-Римана [12], то тогда можно для U^* найти сопряженную функцию V^*, удовлетворяющую соотношениям $V^*(x, 0) = 0$, $V^*(0, z) = 0$. Используя эти соотношения, формуле (12) придадим следующий вид:

$$2\Phi[U(0, \Delta) + U(0, -\Delta)] =$$

$$= k_0 \Phi[2U(0, 0)] + \sum_{n=1}^{\infty} 2k_n \Phi[U(n\Delta, 0) + U(-n\Delta, 0)]. \qquad (15)$$

В практике гравиразведки и магниторазведки для вычисления потенциальной функции в нижней полуплоскости широкое распространение получила приближенная формула [9]

$$U(0, 0) \approx \frac{U(\Delta, 0) + U(-\Delta, 0) + U(0, \Delta) + U(0, -\Delta)}{4}. \qquad (16)$$

С помощью равенства (16), используя приведенные в данной статье соображения, получим приближенные соотношения, аналогичные формулам (12) и (15):

$$\Phi[W(0)] \approx \frac{\Phi[W(\Delta)] + \Phi[W(-\Delta)] + \Phi[W(i\Delta)] + \Phi[W(-i\Delta)]}{4}; \qquad (17)$$

$$\Phi[2U(0, 0) \approx \frac{\Phi[U(\Delta, 0) + U(-\Delta, 0)] + \Phi[U(0, \Delta) + (0, -\Delta)]}{2}. \qquad (18)$$

Хотя при использовании формул (15) и (18) объем вычислительных работ значительно меньше, чем с формулами (12) и (17), однако фор-

мулы (12) и (17) выгодно отличаются от выражений (15) и (18) благоприятным расположением нулей полинома $P(\tau)$.

Воспользовавшись обозначениями (13) и полагая $\Phi(W) = \frac{1}{W}$, соотношению (17) придадим следующий вид (см. рис. 2, *б*):

$$E_4 \approx 4E_0 - (E_1 + E_2 + E_3); \quad F_4 \approx 4F_0 - (F_1 + F_2 + F_3). \tag{19}$$

Для пласта и уступа формулы (19) из приближенных превращаются в точные. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся выведенным ниже выражением (32), которое запишем в следующем виде:

$$W_{xz} = A \ln \frac{\tau - \tau_1}{\tau - \tau_2}, \tag{20}$$

где

$$A = A' + iA''; \tag{21}$$

$$A' = -2k\sigma \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \sin(\varphi_1 + \varphi_2); \tag{22}$$

$$A'' = -2k\sigma \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cos(\varphi_1 + \varphi_2). \tag{23}$$

Продифференцируем равенство (20)

$$W_{xxz} = A\left(\frac{1}{\tau - \tau_1} - \frac{1}{\tau - \tau_2}\right) \tag{24}$$

и найдем обратную функцию

$$\frac{1}{W_{xxz}} = \frac{\tau^2 - (\tau_1 + \tau_2)\tau + \tau_1\tau_2}{A(\tau_1 - \tau_2)} = c_2\tau^2 + c_1\tau + c_0 \tag{25}$$

или

$$E = a_2(x^2 - z^2) - 2b_2xz + a_1x - b_1z + a_0; \tag{26}$$

$$F = b_2(x^2 - z^2) + 2a_2xz + b_1x + a_1z + b_0, \tag{27}$$

где

$$c_2 = a_2 + ib_2; \; c_1 = a_1 + ib_1; \quad c_0 = a_0 + ib_0;$$

a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 — некоторые постоянные.

Правая часть первого из уравнений (19), если в него подставить (26), будет равна

$$4a_0 - [a_2(-\Delta)^2 + a_1(-\Delta) + a_0 + a_2\Delta^2 + a_1\Delta + a_0 - a_2(-\Delta)^2 - b_1(-\Delta) + a_0] = -a_2\Delta^2 - b_1\Delta + a_0,$$

а левая обратится в

$$-a_2\Delta^2 - b_1\Delta + a_0,$$

что и доказывает наше утверждение.

2. Комплексная потенциальная функция для двухмерных тел, сечение которых ограничено ломаной линией

Введем функцию от τ

$$W = -2k\lambda \ln(\tau - \tau_0), \tag{28}$$

где λ — масса цилиндра единичной длины;
k — гравитационная постоянная;
$\tau = x + iz$;

$\tau_0 = \xi + i\zeta$ — некоторое фиксированное значение τ;
x, z — прямоугольные координаты.

Найдем первую производную от W по z

$$W_z = \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{dW}{d\tau} i = -\frac{2k\lambda i}{\tau - \tau_0} =$$

$$= 2k\lambda \frac{\zeta - z}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} + i2k\lambda \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}. \qquad (29)$$

В выражении (29) вещественная часть отвечает аномалии силы тяжести $\Delta g = U_z$, создаваемой горизонтальным круговым цилиндром бесконечной длины. Найдем вторую производную от W по x и z

$$W_{xz} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} i = \frac{2k\lambda i}{(\tau - \tau_0)^2} =$$

$$= 4k\lambda \frac{(\xi - x)(\zeta - z)}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^2} - i2k\lambda \frac{(\zeta - z)^2 - (\xi - x)^2}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^2} = U_{xz} - iU_\Delta. \qquad (30)$$

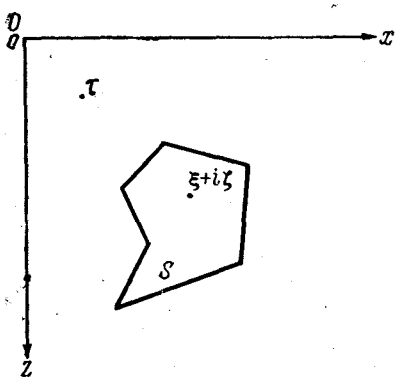


Рис. 3. Пояснение к формуле (31)

В выражении (30) вещественная часть совпадает с градиентом силы тяжести $U_{xz} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$, а мнимая отвечает „кривизне“ $U_\Delta = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, создаваемых горизонтальным круговым цилиндром бесконечной длины. В случае тела произвольной формы

$$W_{xz} = U_{xz} - iU_\Delta =$$

$$= \iint \frac{2k\sigma i}{(\tau - \xi - i\zeta)^2} d\xi d\zeta, \qquad (31)$$

где σ — избыточная плотность тела с поперечным сечением S (рис. 3).

Аналогичное выражение для магниторазведки было указано В. Н. Страховым [14]. Для произвольно расположенного пласта постоянной плотности во всех случаях, представленных на рис. 4, формула (31) приобретает следующий вид:

$$W_{xz} = -2k\sigma i \sin(\varphi_2 - \varphi_1) e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)} \ln \frac{\tau - \tau_1}{\tau - \tau_2}, \qquad (32)$$

где в числителе стоит „комплексная координата“ τ_1, отнесенная к точке M, расположенной выше точки N. Отсчет углов φ_1 и φ_2 производится по часовой стрелке вокруг точки τ_1 от горизонтального луча, выходящего из точки M и направленного в сторону оси абсцисс. Равенство (32) показывает, что в угловых точках пласта M и N есть логарифмическая особенность. Если обе части равенства (32) продифференцировать по x, то у третьей производной $W_{xxz} = U_{xxz} - iU_{\Delta x}$ угловые точки M и N становятся полюсами первого порядка

$$W_{xxz} = -2k\sigma i \sin(\varphi_2 - \varphi_1) e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)} \frac{\tau_1 - \tau_2}{(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)}. \qquad (33)$$

Так как с полюсами проще иметь дело, то в дальнейшем займемся аналитическим продолжением третьих производных W_{xxz}. Формулы

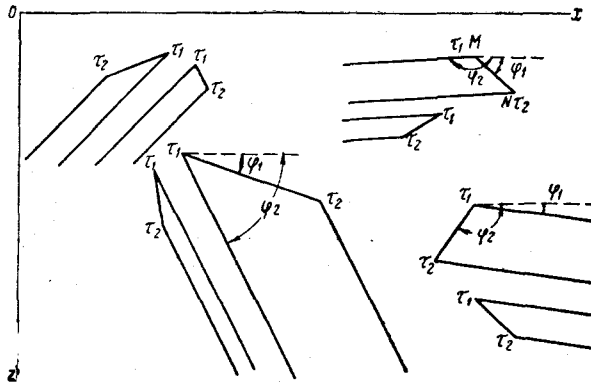


Рис. 4. Пояснение к формуле (32)

для пласта с горизонтально расположенной верхней кромкой и для уступа получаются из выражения (33) при $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \varphi$.

Представляя произвольную n-угольную призму (рис. 5) в виде разности нескольких уступов [18], согласно выражению (33) для n-угольной призмы, найдем

$$W_{xxz} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{\tau - \tau_k}, \qquad (34)$$

где A_k — некоторая комплексная постоянная.

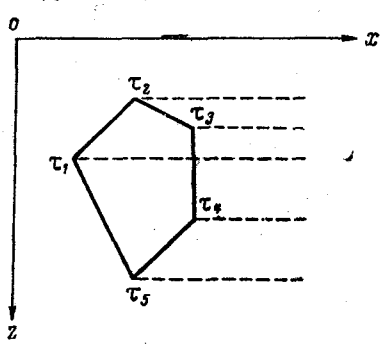


Рис. 5. Пояснение к формуле (34)

Для тел с поперечным сечением в виде угла (рис. 6,*а*) ($0 < \varphi_1, \varphi_2 < \pi$)

$$W_{xxz} = -2k\sigma i \sin(\varphi_2 - \varphi_1) e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)} \frac{1}{\tau - \tau_1}; \qquad (35)$$

в виде отрезка (рис. 6, *б*)

$$W_{xxz} = 2k\lambda i e^{-i\varphi} \left[\frac{1}{(\tau - \tau_1)^2} - \frac{1}{(\tau - \tau_2)^2} \right] \qquad (36)$$

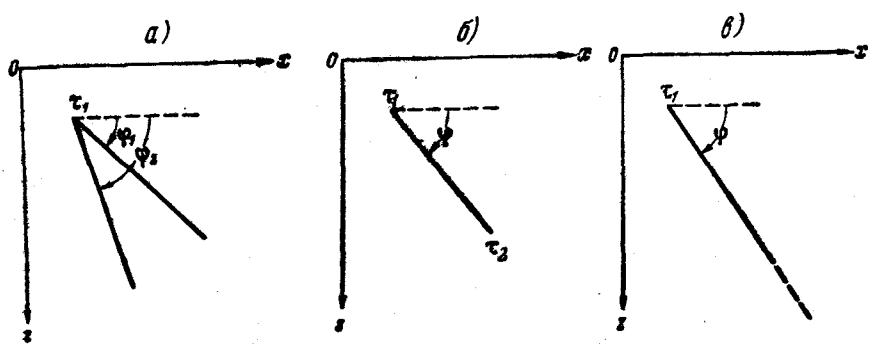


Рис. 6. Тела с поперечным сечением в виде:
а — угла; *б* — отрезка; *в* — луча

и в виде луча (рис. 6, *в*)

$$W_{xxz}=2k\lambda ie^{-i\varphi}\frac{1}{(\tau-\tau_1)^2}. \tag{37}$$

Формулы (36) и (37), выведенные для идеализированных тел с поперечными сечениями в виде отрезка и луча, соответствуют тонким пластам, горизонтальная мощность которых мала по сравнению с глубиной их залегания.

Таким образом, для одного или нескольких двухмерных тел постоянной плотности, сечения которых ограничены ломаной линией с конечным числом звеньев, третья производная W_{xxz} представляет собой рациональную дробь

$$W_{xxz}=\frac{P(\tau)}{D(\tau-\tau_1)\dots(\tau-\tau_n)}, \tag{38}$$

знаменатель которой имеет простые корни, а числитель есть некоторый полином $P(\tau)$. У отрезка (рис. 6, *б*) и луча (рис. 6, *в*) порядок корней знаменателя третьей производной W_{xxz} равен двум, а у цилиндра — трем. Если рассматривать обратную функцию

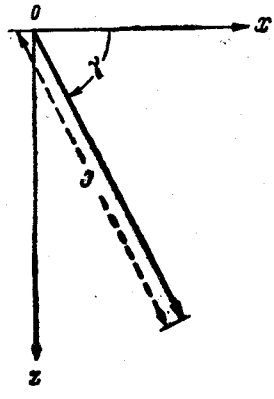


Рис. 7. Положение вектора намагничения I

$$\frac{1}{W_{xxz}}=\frac{D(\tau-\tau_1)\dots(\tau-\tau_n)}{P(\tau)}, \tag{39}$$

то угловые точки $\tau_1,\dots,\tau_n$ перестают играть роль особых точек для функции $\frac{1}{W_{xxz}}$, которая в этих точках оказывается равной нулю. Особыми точками этой функции становятся корни полинома $P(\tau)$. Часто расположение корней этого полинома не мешает определению положения наиболее интересных угловых точек. У тел, имеющих только два угла (например, пласта или уступа), корни полинома $P(\tau)$ отсутствуют.

Заметим, что все приведенные выше формулы вне тела дают истинные значения третьей производной W_{xxz}, а внутри тела совпадают со значением W_{xxz}, аналитически продолженными внутрь тела.

Обратимся к магниторазведке и допустим, что вектор интенсивности намагничения $\vec{I}$ расположен в вертикальной плоскости, перпендикулярной простиранию тела. Намагничение будем считать однородным, что для двухмерных тел, сечение которых ограничено ломаной линией с конечным числом звеньев, выполняется лишь приближенно. При этих предположениях, согласно соотношениям Пуассона, получим

$$\frac{\partial H}{\partial x}-i\frac{\partial Z}{\partial x}=-i\frac{I}{k\sigma}e^{i\gamma}W_{xxz}, \tag{40}$$

где I — абсолютная величина вектора интенсивности намагничения;

γ — угол, который образует вектор интенсивности намагничения с осью x (рис. 7);

H, Z — горизонтальная и вертикальная составляющие напряженности магнитного поля.

Как следует из формулы (40), выводы, полученные для гравиразведки, будут иметь место и в магниторазведке в тех пределах, при которых верны соотношения Пуассона.

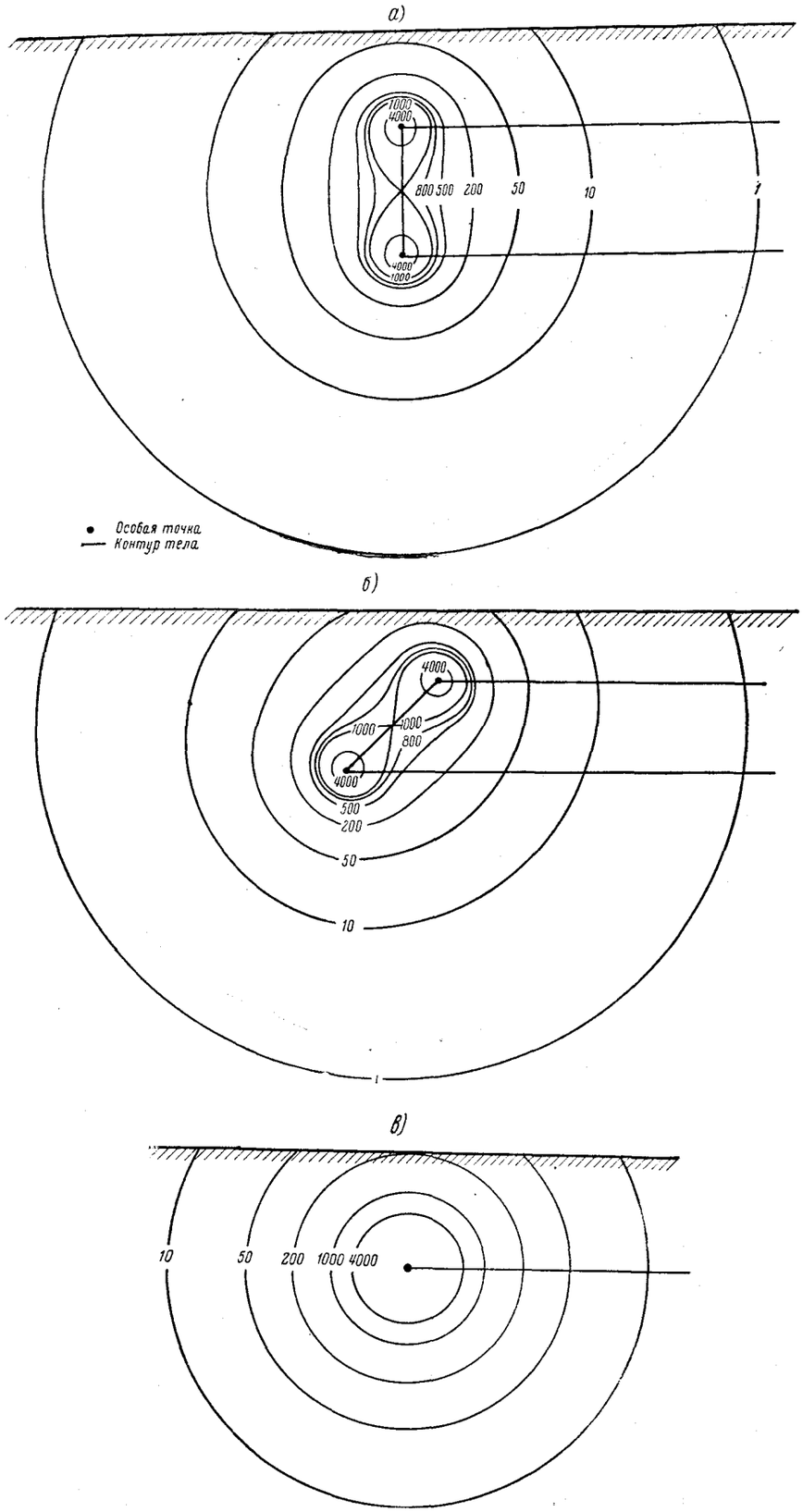


Рис. 8. Изолинии $\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2$ уступов:
а — вертикального; *б* — наклонного; *в* — малой мощности

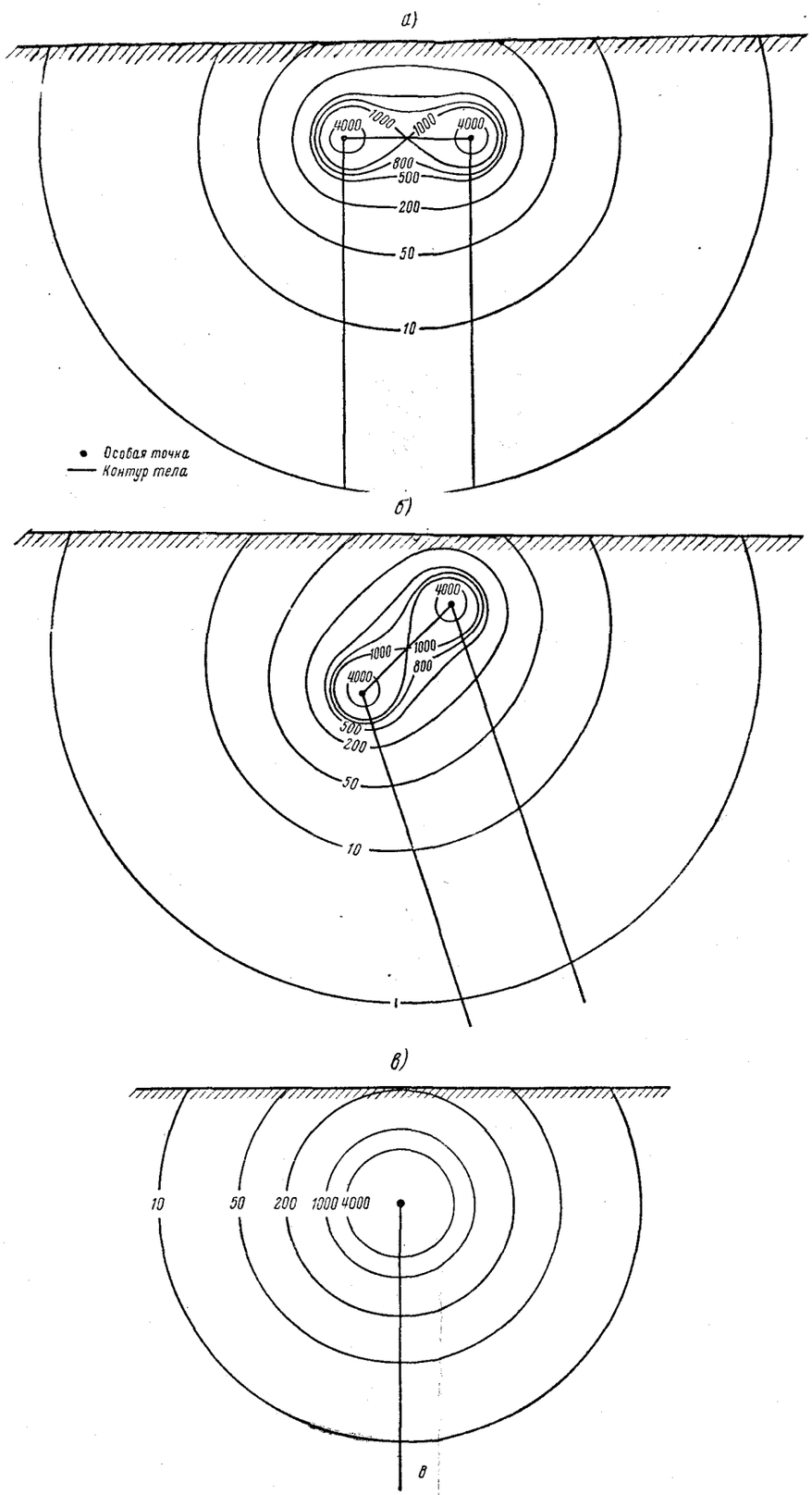


Рис. 9. Изолинии $\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2$ пластов:
а — вертикального; *б* — наклонного; *в* — малой мощности

Способ аналитического продолжения в нижнюю полуплоскость целесообразно использовать для пересчета третьих производных W_{xxz}, создаваемых телами, сечение которых ограничено ломаной линией с конечным числом звеньев, а плотность или интенсивность намагничения удовлетворяют перечисленным выше условиям. Этот способ особенно удобен в магниторазведке: для его применения необходимо предварительно найти лишь первую производную по x от H и Z, в то время как в гравиразведке приходится находить от Δg вторые производные. Для магниторазведки в формулах (13) следует положить $U=\frac{\partial H}{\partial x}$, $V=-\frac{\partial Z}{\partial x}$, а для гравиразведки $U=U_{xxz}$, $V=-U_{\Delta x}$.

3. Примеры

Для применения разработанного в данной работе метода необходимо иметь значения производных $\frac{\partial H}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial x}$ (или U_{xxz} и $U_{\Delta x}$) в точках верхней полуплоскости. Если в полевых условиях измерено лишь Z (или U_{xz}), то нужные производные следует вычислять по формулам [7, 10, 15]

$$\frac{\partial H(0,\ z)}{\partial x}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-z^2}{(x^2+z^2)^2}Z(x,\ 0)\,dx; \tag{41}$$

$$\frac{\partial Z(0,\ z)}{\partial x}=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2xz}{(x^2+z^2)^2}Z(x,0)\,dx. \tag{42}$$

Используя квадратичную интерполяцию, можно преобразовать интегральные выражения [6]

$$\frac{\partial H(0,-M)}{\partial x}=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left[Z(r_kM,\ 0)+Z(-r_kM,\ 0)\right]; \tag{43}$$

$$\frac{\partial Z(0,-M)}{\partial x}=\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{\infty}c'_k\left[Z(r_kM,\ 0)-Z(-r_kM,\ 0)\right], \tag{44}$$

где M — масштабная единица, т. е. число единиц длины в натуре, приходящееся на 1 *см* оси абсцисс дифференцируемой функции (Z). Значения r_k, c_k, c'_k приведены в табл. 2.

Таблица 2

k	r_k	c_k	c_k'	k	r_k	c_k	c_k'
0	0,0	—0,05772	—	6	7,0	0,01043	0,00231
1	0,5	—0,10520	0,11746	7	11,0	0,01480	0,00302
2	1,0	0,01158	0,07846	8	15,0	0,00476	0,00051
3	2,0	0,04652	0,07804	9	23,0	0,00687	0,00065
4	3,0	0,02459	0,01294	10	31,0	0,00933	
5	5,0	0,03238	0,01504				

В точках, расположенных вблизи правого и левого концов дифференцируемой кривой, по формулам (43) и (44) производные находятся

с заметными относительными ошибками. В связи с этим соотношение (14) оказывается мало пригодным для практического применения. Ниже используется равенство (19).

Имея значения $\frac{\partial H}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial x}$, которые мы считаем известными в некоторых точках верхней полуплоскости, согласно соотношениям (13), находим

$$E = \frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2}; \quad F = \frac{\frac{\partial Z}{\partial x}}{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2}. \tag{45}$$

Результаты вычислений по формуле (19) графически представлены на рис. 8, 9, 10. При сравнении рис. 8, *а, б* и 9, *а, б* нетрудно заметить

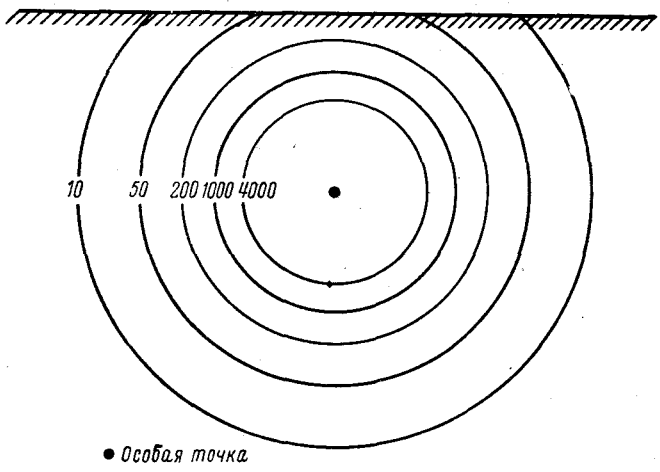


Рис. 10. Изолинии $\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2$ цилиндра

сходство форм соответствующих изолиний. Особенно характерна изолиния, форма которой похожа на восьмерку. Она называется лемнискаттой Бернулли. Отличие наблюдается лишь в расположении и в общем случае может быть различной их оцифровка. На указанных рисунках значения сходных изолиний совпадают в результате соответствующим образом подобранной интенсивности намагничения I. На рис. 8, *а, б*, 9, *а, б* особые точки являются полюсами первого порядка, на рис. 8, *в* и 9, *в* — полюсами второго порядка и на рис. 10 имеется полюс третьего порядка.

Для пласта и уступа можно указать более простые и точные приемы решения обратной задачи. Согласно формулам (32) и (40),

$$H - iZ = B \ln \frac{\tau - \tau_1}{\tau - \tau_2}, \tag{46}$$

где

$$\left.\begin{aligned} B = B' + iB'' = -2I \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\, e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2 - \gamma)}; \\ B' = -2I \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \gamma) \\ B'' = 2I \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \sin(\varphi_1 + \varphi_2 - \gamma) \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

или

$$\frac{\partial H}{\partial x} - i\frac{\partial Z}{\partial x} = B\left(\frac{1}{\tau - \tau} - \frac{1}{\tau - \tau_2}\right).$$

Вводя функции E и F, получим

$$E + iF = \frac{1}{\frac{\partial H}{\partial x} - i\frac{\partial Z}{\partial x}} = \frac{\tau^2 - (\tau_1 + \tau_2)\tau + \tau_1\tau_2}{B(\tau_1 - \tau_2)} =$$

$$= c_2\tau^2 + c_1\tau + c_0, \tag{48}$$

где

$$\left.\begin{aligned} c_2 &= a_2 + ib_2 = \frac{1}{B(\tau_1 - \tau_2)} \\ c_1 &= a_1 + ib_1 = -\frac{\tau_1 + \tau_2}{B(\tau_1 - \tau_2)} \\ c_0 &= a_0 + ib_0 = \frac{\tau_1\tau_2}{B(\tau_1 - \tau_2)} \end{aligned}\right\} \tag{48'}$$

На оси абсцисс $z = 0$, а $\tau = x$, поэтому равенство (48) приобретает следующий вид:

$$f(x) = E + iF = c_2x^2 + c_1x + c_0. \tag{49}$$

Соотношение (49) показывает, что вместо $\frac{\partial H}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial x}$ целесообразно использовать функции E и F, графики которых представляют собой параболу или прямую линию. В этом можно убедиться и не прибегая к теории функций комплексного переменного, если с помощью выражений для $\frac{\partial H}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial x}$ найти величины E и F, согласно формулам (45).

Так как значения E и F в точках какой-нибудь линии, параллельной плоскости наблюдений, известны, то с помощью уравнения (49) найдем постоянные c_2, c_1 и c_0. Для этого достаточно, имея значения $f(x)$ в трех точках, решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными c_2, c_1 и c_0. Для использования большего числа точек найдем первые разности от E

$$\Delta_1 E(x, l) = E(x + l) - E(x - l),$$

где l — некоторая постоянная, которую следует выбрать достаточно большой: чем больше l, тем больше первая разность $\Delta_1 E(x, l)$ и тем меньше относительная ошибка, с которой она определяется.

С помощью формул (43) и (44) производные $\frac{\partial H}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial x}$, а следовательно, и функции E и F, вблизи правого и левого концов дифференцируемой кривой Z, находятся с заметными относительными ошибками. В связи с этим величину l нельзя брать слишком большой, чтобы не выйти за пределы области надежного определения функций E и F. Различные значения x, для которых находятся первые разности $\Delta_1 E(x, l)$, надо располагать близко друг от друга, на расстоянии в несколько раз меньшем l (рис. 11).

Нетрудно установить, что первая разность от полинома второй степени превращается в полином первой степени

$$\Delta_1 E(x, l) = \Delta_1(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 4a_2lx + 2a_1l,$$

который изображается графически в виде прямой линии.

Тангенс угла наклона этой прямой $\operatorname{tg}\alpha$ и значения $\Delta_1 E(0, l)$ равны

$$\operatorname{tg}\alpha = 4a_2 l, \quad \Delta_1 E(0) = 2a_1 l,$$

что позволяет вычислить коэффициенты a_2 и a_1. Зная a_2 и a_1, по кривой $E(x)$ находим a_0.

Постоянную a_2 можно также определить с помощью функции

$$\delta E(x, l) = E(x) - \frac{E(x+l) + E(x-l)}{2},$$

введенной в практику интерпретации гравитационных и магнитных данных Б. А. Андреевым [3]. Нетрудно видеть, что

$$\delta E(x, l) = -a_2 l^2.$$

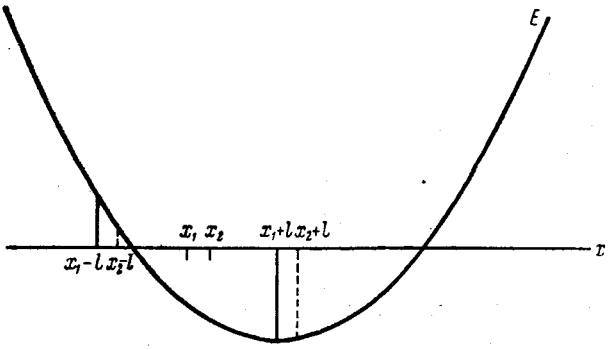


Рис. 11. Выбор точек для вычисления первых разностей

Аналогичным путем находятся постоянные b_2, b_1 и b_0, входящие в

$$F = b_2 x^2 + b_1 x + b_0.$$

Чтобы аналитически продолжить значения $f(x)$ в нижнюю полуплоскость, достаточно заменить в равенстве (49) x на $\tau = x + iz$

$$c_2\tau^2 + c_1\tau + c_0 = f(\tau).$$

Так как в угловых точках $f(\tau)$ равно нулю, то корни уравнения

$$c_2\tau^2 + c_1\tau + c_0 = 0 \qquad (49')$$

будут совпадать с $\tau_1 = a_1 + ic_1$ и $\tau_2 = a_2 + ic_2$ (рис. 4 и 12).

Кратному корню будет соответствовать бесконечно тонкий пласт. С помощью любого из соотношений (48′) находим $B = B' + iB''$.

Выделяя в равенстве (46) мнимую часть, получим

$$Z_1 = -B'' \ln\frac{r_1}{r_2} - B'\theta, \qquad (50)$$

где r_1 и r_2 — расстояние от точки наблюдения P до угловой точки M и N соответственно;

$\theta = \theta_2 - \theta_1$ — угол, под которым виден отрезок MN из точки наблюдения P (рис. 13).

С помощью формулы (50) следует вычислить значение Z_1 на поверхности земли и сравнить их с исходной кривой Z. Обнаружившиеся при этом расхождения можно уменьшить, подбирая значения

B', B'', τ_1, τ_2. Удобный графический способ для определения угла видимости θ указан Б. А. Андреевым в методе предельных распределений [3]. Полезно повторить все выкладки сначала, вычислив

$$\frac{\partial H_1(0,-M)}{\partial x} = -\frac{\partial Z_1(0,-M)}{\partial z}$$

и

$$\frac{\partial Z_1(0,-M)}{\partial x}$$

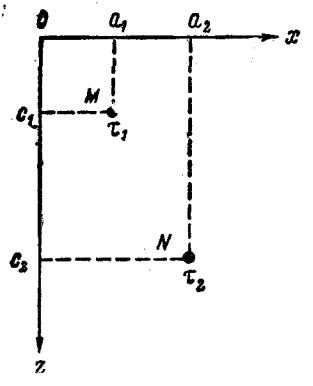


Рис. 12. Положение точек, определяющихся корнями уравнения (49′)

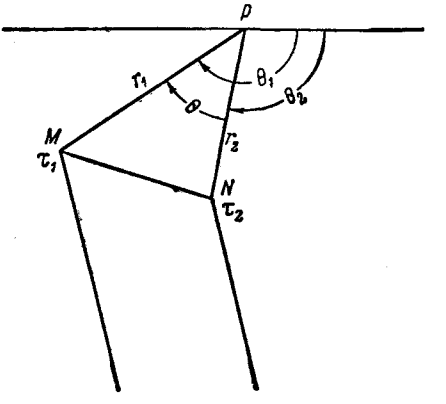


Рис. 13. Пояснение к формуле (50)

аналитическим способом путем дифференцирования выражения (50). Производные от разности $Z - Z_1$ находятся с помощью формул (43) и (44). Складывая значения производных

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial (H - H_1)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial (Z - Z_1)}{\partial x},$$

найдем производные $\frac{\partial H}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial x}$ со значительно меньшей относительной ошибкой. Затем вычислим функции E и F, определим постоянные c_2, c_1 и c_0 и найдем величины B, τ_1, τ_2.

В общем случае, если неизвестен угол γ, определить величины I, φ_1 и φ_2 по постоянным B', B'', τ_1 и τ_2 с помощью формул (47) невозможно. В гравиразведке аналогичная задача может быть доведена до конца. В этом случае вместо равенств (47) следует воспользоваться соотношениями (22) и (23), откуда, зная A' и A'', найдем

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{A'}{A''}. \qquad (51)$$

Как следует из рис. 4, $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$, если отсчет углов происходит вокруг точки M с „комплексной координатой“ τ_1 и расположенной выше точки N. Если обе точки расположены на одном уровне, то отсчет производится вокруг левой точки. Это неравенство

показывает, что $\sin(\varphi_2 - \varphi_1) > 0$, поэтому, согласно (22) и (23), знак $\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$ совпадает со знаком $-A''$, а знак $\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$ совпадает со знаком $-A'$.

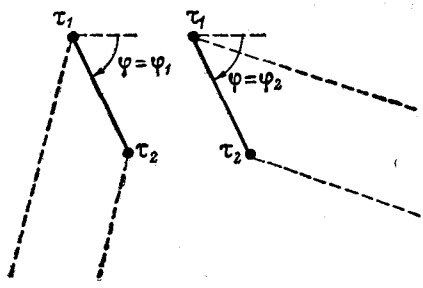


Рис. 14. Различные положения пласта относительно особых точек τ_1 и τ_2

Зная знаки $\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$ и $\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$, по формуле (51) найдем $\varphi_1 + \varphi_2$. Так как расположение двух угловых точек τ_1 и τ_2 известно, то, следовательно, известен угол φ, который совпадает или с углом φ_1 или φ_2 (рис. 14). Из неравенства $2\varphi_1 < \varphi_1 + \varphi_2 < 2\varphi_2$, имея значение $\varphi_1 + \varphi_2$, устанавливаем, соответствует ли φ углу φ_1 или φ_2. Зная φ_1 и φ_2, с помощью соотношений (22) или (23) находим σ.

На рис. 15, *а* приведена кривая вертикальной составляющей напряженности магнитного поля Z, полученная в результате измерений, произведенных на поверхности земли над свитой железистых кварцитов [13]. По значениям Z с помощью формул (43) и (44) вычислены

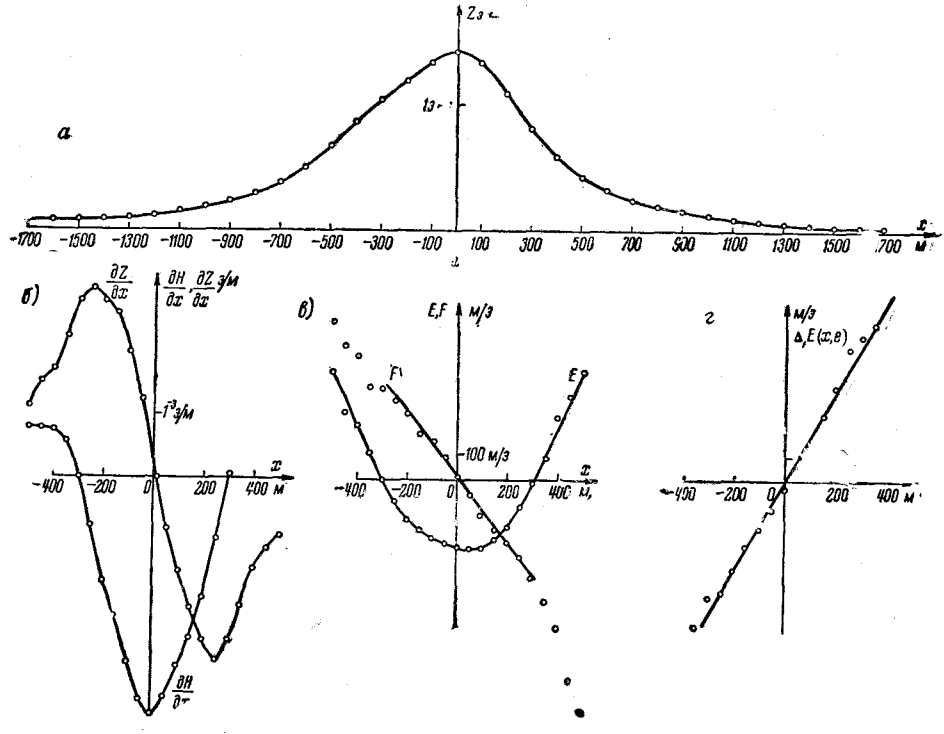


Рис. 15. Определение элементов залегания рудного тела.

производные $\frac{\partial H}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial x}$ (рис. 15, *б*) для точек, расположенных выше земной поверхности на 50 *м* ($M = 50$ *м*).

Согласно выражению (45) были найдены E и F (рис. 15, *в*) и построен график $\Delta_1 E$ при $l = 150$ *м*, который оказался прямой линией (рис. 15, *г*), что позволило определить постоянные

$$a_2 = 0{,}00292^1/\text{эм};\ a_1 = 0.$$

Непосредственно с графика E снято значение $a_0 = -265$ *м/э*. Кривая F близка к прямой линии, что позволило сразу определить ее параметры $b_2 = 0$, $b_1 = -1{,}20^1/_9$, $b_0 = 0$.

Уравнение (49′) в этом случае имеет следующий вид:

$$0{,}00292x^2 - 1{,}20ix - 265 = 0.$$

Решая его, получим

$$\tau_1 = -223 + i\,205;$$

$$\tau_2 = 223 + i\,205.$$

Учитывая, что в этих соотношениях ордината $z = 205$ *м* отсчитывается от горизонта, расположенного выше поверхности земли на 50 *м*, получим глубину залегания верхней кромки железистых кварцитов от поверхности земли 155 *м*. Фактическая глубина по данным бурения достигает 157—173 *м*.

Таким образом, уже первое приближение без последующих уточнений дало удовлетворительные результаты.

В заключение приношу благодарность за обсуждение работы проф. Б. А. Андрееву, возбудившему у автора интерес к вопросам, связанным с расчетами пространственного распределения потенциальных полей, Н. Н. Михайлову, советы которого содействовали улучшению данной работы и Г. А. Трошкову, рассчитавшему практический пример.

Приложение

К доказательству формулы (8). Проверим формулу (8) при условии, что функция $\frac{1}{W(\tau)}$ есть рациональная дробь.

Всякая рациональная дробь может быть представлена в виде суммы полинома и простейших дробей, так что в силу аддитивности интеграла (8) можем вместо $\frac{1}{W(x)}$ ограничиться рассмотрением выражений

$$x^n;\ \frac{1}{(x-s)^n};\ \frac{x+b}{(x^2+px+q)^n}.$$

Простейшую дробь $\frac{1}{(x-s)^k}$, равную бесконечности при $x = s$, из рассмотрения можно исключить, так как при $\frac{1}{W(x)} = \infty$ формула (8) теряет смысл.

Трехчлен $x^2 + px + q$, не имеющий вещественных корней, можно привести к виду

$$x^2 + px + q = (x+\alpha)^2 + \beta^2,$$

где

$$\alpha = \frac{p}{2};\ \beta^2 = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 > 0,$$

что позволяет вместо $\frac{x+b}{(x^2+px+q)^n}$ ограничиться рассмотрением выражений

$$\frac{1}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^n};\ \frac{x+\alpha}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^n}.$$

Таким образом, чтобы установить справедливость формулы (8) для рациональной дроби, достаточно доказать следующие три равенства

$$(iz)^n + (-iz)^n = \frac{2}{\pi} e^{-Bz^2} \int_0^\infty ch\omega z d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-Bx^2} \cos \omega x dx; \qquad (52)$$

$$\frac{1}{[(iz+\alpha)^2+\beta^2]^n} + \frac{1}{[(-iz+\alpha)^2+\beta^2]^n} =$$

$$= \frac{2}{\pi} e^{-Bz^2} \int_0^\infty ch\omega z d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-Bx^2} \cos \omega x dx}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^n}; \qquad (53)$$

$$\frac{iz+\alpha}{[(iz+\alpha)^2+\beta^2]^n} + \frac{-iz+\alpha}{[(-iz+\alpha)^2+\beta^2]^n} =$$

$$= \frac{2}{\pi} e^{-Bz^2} \int_0^\infty ch\omega z d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+\alpha}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^n} e^{-Bx^2} \cos \omega x dx. \qquad (54)$$

При n нечетном формула (52) обращается в тождество $0 = 0$. При $n = 0$ находим [11]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Bx^2} \cos \omega x dx = \sqrt{\frac{\pi}{B}} e^{-\frac{\omega^2}{4B}}; \qquad (55)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty ch\omega z d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Bx^2} \cos \omega x dx = \frac{2}{\sqrt{\pi B}} \int_0^\infty ch\omega z e^{-\frac{\omega^2}{4B}} d\omega = 2e^{Bz^2}, \qquad (56)$$

это совпадает с формулой (52) при $n = 0$. Для проверки формулы (52) при $n = 2$, дифференцируем формулу (56) по параметру B

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^\infty ch\omega z d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-Bx^2} \cos \omega x dx = 2z^2 e^{Bz^2},$$

откуда

$$\frac{2}{\pi} e^{-Bz^2} \int_0^\infty ch\omega z d\omega \int_0^\infty x^2 e^{-Bx^2} \cos \omega x dx = (iz)^2 + (-iz)^2,$$

что совпадает с уравнением (52) при $n = 2$. Дифференцирование по параметру B легко оправдать, так как соответствующие интегралы сходятся равномерно относительно B, что позволяет в уравнении (56) переставить порядок дифференцирования и интегрирования [16, стр 731, теорема III]

$$\frac{\partial}{\partial B} \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi B}} ch\omega z e^{-\frac{\omega^2}{4B}} d\omega = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi B}} ch\omega z e^{-\frac{\omega^2}{4B}} \right) d\omega =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ch\omega z \frac{\partial}{\partial B} \left(\sqrt{\frac{\pi}{B}} e^{-\frac{\omega^2}{4B}} \right) d\omega$$

или, согласно (55),

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} ch\omega z\,\frac{\partial}{\partial B}\left(\sqrt{\frac{\pi}{B}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4B}}\right)d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} ch\omega z\,\frac{\partial}{\partial B}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Bx^2}\cos\omega x dx.$$

Затем дифференцируется по параметру B интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Bx^2}\cos\omega x dx.$$

Аналогично рассматривается случай произвольного четного n.

Докажем формулу (53) при $n=1$. В ее внутреннем интеграле произведем замену переменной $t=x+\alpha$, затем получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+\alpha)^2+\beta^2}e^{-Bx^2}\cos\omega x dx=\cos\omega\alpha I_1(1)+\sin\omega\alpha I_2(1), \tag{57}$$

где

$$I_1(\varepsilon)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-B(\varepsilon t^2-2\alpha t+\alpha^2)}}{t^2+\beta^2}\cos\omega t dt=$$

$$=2\sqrt{\pi B}\,e^{B(\beta^2\varepsilon-\alpha^2)}\int_{\varepsilon^2}^{\infty} e^{\frac{4B^2\alpha^2-\omega^2}{4Bt^2}-\beta^2Bt^2}\cos\frac{\alpha\omega}{t^2}dt; \tag{58}$$

$$I_2(\varepsilon)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-B(\varepsilon t^2-2\alpha t+\alpha^2)}}{t^2+\beta^2}\sin\omega t dt=$$

$$=2\sqrt{\pi B}\,e^{B(\beta^2\varepsilon-\alpha^2)}\int_{\varepsilon^2}^{\infty} e^{\frac{4B^2\alpha^2-\omega^2}{4Bt^2}-\beta^2Bt^2}\sin\frac{\alpha\omega}{t^2}dt. \tag{59}$$

Для преобразования интегралов $I_1(\varepsilon)$ и $I_2(\varepsilon)$ к указанному выше виду надо продифференцировать их по параметру ε и решить найденные таким путем дифференциальные уравнения. Положим $\varepsilon=1$ в формулах (58) и (59) и подставим значения $I_1(1)$ и $I_2(1)$ в выражение (57)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+\alpha)^2+\beta^2}e^{-Bx^2}\cos\omega x dx=$$

$$=2\sqrt{\pi B}\,e^{B(\beta^2-\alpha^2)}\int_1^{\infty} e^{\frac{4B^2\alpha^2-\omega^2}{4Bt^2}-\beta^2Bt^2}\cos\left[\omega\alpha\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\right]dt. \tag{60}$$

Заменяя в формуле (53) внутренний интеграл, согласно равенству (60), и переставляя порядок интегрирования по t и ω [16, стр. 734, теорема V], найдем

$$\frac{2}{\pi}e^{-Bz^2}\int_0^{\infty} ch\omega d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-Bx^2}\cos\omega x}{(x+\alpha)^2+\beta^2}dx=$$

$$=\frac{4\sqrt{B}}{\sqrt{\pi}}e^{B(\beta^2-\alpha^2-z^2)}\int_1^{\infty} e^{\frac{B\alpha^2}{t^2}-\beta^2Bt^2}dt\int_0^{\infty} ch\omega z e^{-\frac{\omega^2}{4Bt^2}}\cos\left[\omega\alpha\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\right]d\omega. \tag{61}$$

Зная, что $ch\omega z = \frac{e^{\omega z} + e^{-\omega z}}{2}$, разобьем внутренний интеграл в правой части равенства (61) на два интеграла I_3 и I_4. Совершив в I_3 и I_4 замену переменной по формулам $\zeta = \omega - 2zBt^2$ и $\zeta = \omega + 2zBt^2$ и произведя интегрирование, получим

$$I_3 = \frac{1}{2}\cos\left[2\alpha zB(t^2-1)\right]\left\{t\sqrt{\pi B}\,e^{-\alpha^2 B\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+z^2t^2B} - \right.$$

$$\left. - \int_{2zBt^2}^{\infty} e^{-\frac{\zeta^2}{4t^2B}+z^2t^2B}\cos\left[\alpha\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\zeta\right]d\zeta\right\}; \qquad (62)$$

$$I_4 = \frac{1}{2}\cos\left[2\alpha zB(t^2-1)\right]\left\{t\sqrt{\pi B}e^{-\alpha^2 B\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+z^2t^2B} + \right.$$

$$\left. + \int_{2zBt^2}^{\infty} e^{-\frac{\zeta^2}{4t^2B}+z^2t^2B}\cos\left[\alpha\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\zeta\right]d\zeta\right\}. \qquad (63)$$

Заменим внутренний интеграл в формуле (61) суммой $I_3 + I_4$

$$\frac{2}{\pi}e^{-Bz^2}\int_0^{\infty} ch\omega z\,d\omega \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-Bx^2}\cos\omega x}{(x+\alpha)^2+\beta^2}dx =$$

$$= 4Be^{B(\alpha^2+\beta^2-z^2)}\int_1^{\infty} e^{-t^2B(\alpha^2+\beta^2-z^2)}\cos\left[2\alpha zB(t^2-1)\right]tdt \qquad (64)$$

или, полагая $\eta = t^2 - 1$, найдем

$$\frac{2}{\pi}e^{-Bz^2}\int_0^{\infty} ch\omega z\,d\omega \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-Bx^2}\cos\omega x}{(x+\alpha)^2+\beta^2}dx =$$

$$= 2B\int_0^{\infty} e^{-B(\alpha^2+\beta^2-z^2)\eta}\cos(2\alpha zB\eta)\,d\eta. \qquad (65)$$

Пусть z^2 удовлетворяет неравенству $z^2 < \alpha^2 + \beta^2$, тогда интеграл (65) при $B > 0$ сходится и равен

$$\frac{2}{\pi}e^{-Bz^2}\int_0^{\infty} ch\omega z\,d\omega \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-Bx^2}\cos\omega x}{(x+\alpha)^2+\beta^2}dx =$$

$$= 2\frac{\alpha^2+\beta^2-z^2}{(\alpha^2+\beta^2-z^2)^2+4\alpha^2z^2} = \frac{1}{(iz+\alpha)^2+\beta^2} + \frac{1}{(-iz+\alpha)^2+\beta^2}, \qquad (66)$$

что совпадает с формулой (53) при $n = 1$.

Дифференцируя равенство (66) n раз по β^2, получим формулу (53) при любом n. Дифференцируя равенство (66) один раз по α, получим формулу (54) при $n = 2$.

Умножив на 2β обе части равенства (54), в котором положим $n = 2$, и интегрируя по β от β до $+\infty$, получим формулу (54) при $n = 1$. Полагая в равенстве (54) $n = 1$ и дифференцируя его n раз по β^2, получим формулу (54) при любом целом n. Законность использованных выше операций оправдывается ссылками на теорему о дифференцировании по параметру [16, стр. 731] и теорему об интегрировании по параметру [16, стр. 733]. Это делается точно так же, как и при обосновании формулы (52) при произвольном n.

Использованная литература

1. Андреев Б. А. Расчеты пространственного распределения потенциальных полей и их использование в разведочной геофизике. Изв. АН СССР, серия географич. и геофизич., 1949, № 3.
2. Андреев Б. А. Расчеты пространственного распределения потенциальных полей и их использование в разведочной геофизике. Изв. АН СССР, серия геофизич., 1952, № 2.
3. Андреев Б. А. Расчеты пространственного распределения потенциальных полей и их использование в разведочной геофизике. Изв. АН СССР, серия геофизич., 1954, № 1.
4. Заморев А. А. Определение формы тела по производным внешнего гравитационного потенциала. Изв. АН СССР, серия географич. и геофизич., 1942, № 1—2.
5. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехтеоретиздат, 1941.
6. Канторович Л. В., Крылов В. И., Чернин К. Е. Таблицы для решения граничных задач. Гостехтеоретиздат, 1956.
7. Малкин Н. Р. Зависимость между градиентами ньютоновского потенциала на плоскости в применении к исследованию гравитационных аномалий. Изв. АН СССР, серия VII, отд. физ.-мат. наук, 1930, № 8.
8. Маркушевич В. М. Теория аналитических функций. Гостехтеоретиздат, 1950.
9. Маловичко А. К. Методы аналитического продолжения аномалий силы тяжести и их приложения к задачам гравиразведки. Гостоптехиздат, 1956.
10. Пудовкин И. М. Применение проблемы Неймана к решению некоторых вопросов прикладной магнитометрии. Тр. НИИЗМ, 1950, вып. 5.
11. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехтеоретиздат, 1948.
12. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. III, ч. 2. Гостехтеоретиздат, 1950.
13. Соколов К. П. Геологическое истолкование магниторазведочных данных. Госгеолтехиздат, 1956.
14. Страхов В. Н. Некоторые вопросы методики интерпретации магнитных аномалий. Изв. АН СССР, серия геофизич., 1956, № 12.
15. Тяпкин К. Ф. К вопросу графического вычисления V_{zz} по результатам измерения Δg. Сб. «Прикладная геофизика», 1957, вып. 16.
16. Тичмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехтеоретиздат, 1948.
17. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, Гостехтеоретиздат, 1948.
18. Шванк О. А. и Люстих Е. Н. Интерпретация гравитационных наблюдений. Гостоптехиздат, 1947.
19. Яковлев К. П. Математическая обработка результатов измерений. Гостехтеоретиздат, 1953.
20. Rainbow H. The Interpretation of Torsion Balance Date. World Petroleum Congress. London, 1933.