Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXVII, вып. 3, 1961 г.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ — ВРЕМЕНИ С ПОСТОЯННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ

А. С. Тер-Погосян

Согласно уравнению тяготения Эйнштейна, в отсутствие электромагнитного поля метрический тензор $g_{\mu\nu}$ связан с тензором массы $T_{\mu\nu}$ соотношением

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\varkappa T_{\mu\nu}, \tag{1}$$

где $R_{\mu\nu}$ — ковариантный тензор кривизны;
R — инвариант кривизны;
$\varkappa$ — постоянная тяготения.

При наложении гравитационного и электромагнитного полей уравнение Эйнштейна (1) надо представить в виде

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\varkappa (T_{\mu\nu} + U_{\mu\nu}), \tag{2}$$

где $U_{\mu\nu}$ — тензор энергии — импульса электромагнитного поля.

Тем самым метрический тензор $g_{\mu\nu}$ зависит не только от гравитационного, но и электромагнитного поля. Однако тогда уравнение (2) составляет совместно с уравнением Максвелла очень сложную систему уравнений, которую не удается решить. В настоящей статье, как обычно, пренебрегаем влиянием электромагнитного поля на метрику пространства—времени и определяем $g_{\mu\nu}$ из уравнения (1) по заданному распределению масс.

Как известно, для случая равномерного распределения масс решение уравнения (1) впервые получено А. А. Фридманом [1] и соответствует постоянной кривизне пространства—времени. Выбираем пространство—время Фридмана—Лобачевского с отрицательной кривизной и бесконечным объемом пространства (открытая модель).

Как известно [2], при этом интервал ds может быть выбран комформно-галилеевским (точнее комформно-квази-галилеевским)

$$ds^2 = H^2 [(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2], \tag{3}$$

где $x^0 = ct$;

$$H = \left(1 - \frac{a}{S}\right)^2;$$

$$S = [(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

и α — константа, определяемая наблюдением[1]. Следовательно, метрический тензор имеет вид

$$g_{\mu\nu}=H^2 e_\mu \delta_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu}=\frac{e_\mu}{H^2}\delta_{\mu\nu}, \quad \sqrt{-g}=H^4, \tag{5}$$

где g — определитель матрицы $g_{\mu\nu}$;

$$e_0=1, \quad e_1=e_2=e_3=-1$$

(значки при e_μ не участвуют в тензорных индексах).

Общековариантное уравнение Максвелла имеет вид (см., например [3])

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}F_{\sigma\tau}\right)=0, \tag{6}$$

где, как обычно, по повторяющимся тензорным индексам производится суммирование. Тензор электромагнитного поля $F_{\sigma\tau}$ связан с 4-потенциалом A_μ

$$F_{\sigma\tau}=\frac{\partial A_\tau}{\partial x^\sigma}-\frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\tau}. \tag{7}$$

Задача заключается в решении уравнений (6) при заданной метрике (5) пространства—времени.

Обычно в плоском пространстве—времени (в отсутствие тяготения) уравнение Максвелла решается в плоских волнах с целью удобства квантования. Однако в искривленном пространстве—времени не существует плоских волн, заполняющих все пространство—время [5]. Поэтому, учитывая также сферически симметричный характер нашего метрического тензора, поскольку

$$H=\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{c^2t^2-r^2}}\right)^2, \tag{8}$$

будем заниматься только сферическими решениями уравнения Максвелла. В сферических координатах

$$x^0=ct, \quad x^1\equiv r, \quad x^2\equiv\vartheta, \quad x^3\equiv\varphi$$

интервал

$$ds^2=H^2(c^2dt^2-dr^2-r^2d\vartheta^2-r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi^2). \tag{9}$$

В этих координатах неисчезающие компоненты $g_{\mu\nu}$ имеют вид

$$g_{00}=H^2, \quad g_{11}=-H^2, \quad g_{22}=-H^2r^2, \quad g_{33}=-H^2r^2\sin^2\vartheta. \tag{10}$$

Следовательно,

$$g^{00}=\frac{1}{H^2}, \quad g_{11}=-\frac{1}{H^2}, \quad g^{22}=-\frac{1}{H^2r^2}, \quad g^{33}=-\frac{1}{H^2r^2\sin^2\vartheta} \tag{11}$$

и

$$\sqrt{-g}=H^4r^2\sin\vartheta. \tag{12}$$

[1] По константе Хэббла для разбегания галактик.

Подставляя (7), (11) и (12) в уравнение Максвелла (6), получаем (придавая значку μ последовательно значения 0, 1, 2, 3) следующую систему четырех уравнений для 4-потенциала

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta\left(\frac{\partial A_2}{\partial r}-\frac{\partial A_1}{\partial\vartheta}\right)\right]+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial A_3}{\partial r}-\frac{\partial A_1}{\partial\varphi}\right)-$$

$$-r^2\sin^2\vartheta\frac{\partial}{c\partial t}\left(\frac{\partial A_0}{\partial r}-\frac{\partial A_1}{c\partial t}\right)=0,$$

$$\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial A_1}{\partial\vartheta}-\frac{\partial A_2}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial A_3}{\partial\vartheta}-\frac{\partial A_2}{\partial\varphi}\right)-$$

$$-\sin\vartheta\frac{\partial}{c\partial t}\left(\frac{\partial A_0}{\partial\vartheta}-\frac{\partial A_2}{c\partial t}\right)=0, \tag{13}$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial A_1}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_3}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\left(\frac{\partial A_2}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_3}{\partial\vartheta}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{c\partial t}\left(\frac{\partial A_0}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_3}{c\partial t}\right)=0,$$

$$\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(\frac{\partial A_1}{c\partial t}-\frac{\partial A_0}{\partial r}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta\left(\frac{\partial A_2}{c\partial t}-\frac{\partial A_0}{\partial\vartheta}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial A_3}{c\partial t}-\frac{\partial A_0}{\partial\varphi}\right)=0.$$

Как видно, метрика пространства Фридмана—Лобачевского отличается тем, что уравнения Максвелла в этом пространстве и в плоском пространстве—времени полностью совпадают. В самом деле, подставляя (5) в (6), видим, что функция Н сокращается и уравнение Максвелла принимает вид

$$e_\mu e_\nu\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\nu}=0.$$

Однако если принять во внимание добавочное условие калибровки, например, в форме условия Лоренца, то решение уравнений Максвелла будет отличаться для двух пространств — с постоянной отрицательной и с нулевой кривизной. В самом деле, общековариантное условие Лоренца имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\nu}A_\nu\right)=0. \tag{14}$$

Подставляя в него выражение метрического тензора (11) и (12), получаем

$$r^2\sin\vartheta\frac{\partial}{c\partial t}(H^2A_0)-\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r}(H^2r^2A_1)-$$

$$-H^2\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(A_2\sin\vartheta)+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_3}{\partial\varphi}\right]=0. \tag{15}$$

Функция H уже не сокращается. Задача нашей статьи — найти решения уравнений (13), совместные с условием (15).

Как известно, в плоском пространстве—времени условие Лоренца упрощает систему уравнений Максвелла и ее решения, так как при этом возможно распадение системы на четыре отдельных уравнения для компонент A_μ. Как видно из (13), в рассматриваемом искривленном пространстве — времени условие Лоренца не только не упрощает систему уравнений Максвелла, но даже усложняет ее решение, так как представляет дополнительное условие, которому должно удовлетворять искомое решение.

Решение обобщенных уравнений Максвелла. Решение уравнений Максвелла в искривленном пространстве—времени мало изучено. Уэно и Такэно [6, 7, 8] дали решение этих уравнений в тех же приближениях, что и в нашей статье, однако для некоторых частных пространств с метрикой иной, чем в нашем случае пространства Фридмана—Лобачевского.

Следуя Уэно, будем различать три типа решений[1]:

TEM-решение

$$E_r = H_r = 0, \tag{16}$$

где

$$E_r = \frac{1}{H^2}\left(\frac{\partial A_0}{\partial r} - \frac{\partial A_1}{c\partial t}\right), \quad H_r = \frac{1}{H^2 r^2 \sin\vartheta}\left(\frac{\partial A_3}{\partial\vartheta} - \frac{\partial A_2}{\partial\varphi}\right) \tag{17}$$

в обычном трехмерном пространстве соответствует поперечной электромагнитной волне;

TE-решение,

где

$$E_r = 0, \quad H_r \neq 0 \tag{18}$$

соответствует поперечной электрической волне;

TM-решение,

где

$$E_r \neq 0, \quad H_r = 0 \tag{19}$$

соответствует поперечной магнитной волне.

Можно показать, что для TE- и TEM-решений возможно такое градиентное преобразование потенциалов, чтобы $A_0 = A_1 = 0$, чего нельзя сделать для TM-решения. Этим обстоятельством воспользуемся впоследствии.

TEM-решение. Предположим, что в уравнениях Максвелла (13) и Лоренца (15)

$$A_0 = A_1 = 0. \tag{20}$$

Тогда функция H сокращается также из условия Лоренца, а следовательно, решение уравнений Максвелла для 4-потенциала полностью такое же, что в неискривленном пространстве—времени. Однако даже в этом случае сами поля, т. е. электрический и магнитный векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$, все же отличны для обоих пространств, так как они содержат функцию H.

Вид решения можно получить путем разделения переменных в указанных уравнениях

$$A_2 = R_2(r, t) X_2(\vartheta, \varphi),$$
$$A_3 = R_3(r, t) Y_3(\vartheta, \varphi). \tag{21}$$

Подставив (16), (20) и (21) в (13) и (15), получаем

$$X_2 = \frac{1}{\sin\vartheta}\psi_2(\vartheta, \varphi), \quad Y_3 = \psi_3(\vartheta, \varphi),$$

[1] Общее решение получается комбинацией этих трех типов решений.

где ψ_2 и ψ_3 удовлетворяют уравнению

$$\sin\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial\psi_i}{\partial\vartheta}\right)+\frac{\partial^2\psi_i}{\partial\varphi^2}=0,$$

а R_2 и R_3 — уравнению

$$\frac{\partial^2 R_i}{c^2\partial t^2}-\frac{\partial^2 R_i}{\partial r^2}=0.$$

Следовательно,

$$R_i=f_1(ct-r)+f_2(ct+r),$$

где первый член представляет расходящуюся, а второй — сходящуюся волну.

Таким образом, в пространстве с постоянной отрицательной кривизной поперечные электромагнитные волны (ТЕМ) также бездисперсионны и распространяются с такой же скоростью c, как и в неискривленном пространстве, и потенциал имеет вид

$$A_0=A_1=0,$$
$$A_2=\frac{a}{\sin\vartheta}\,[f_1(ct-r)+f_2(ct+r)]\,\psi_2(\vartheta,\varphi), \qquad (22)$$
$$A_3=b\,[f_1(ct-r)+f_2(ct+r)]\,\psi_3(\vartheta,\varphi),$$

где a и b — константы;

f_1 и f_2 — произвольные функции.

ТЕ-решение. Вновь положим в уравнениях (13) и (15) $A_0=A_1=0$. а также условие (18) и разделим переменные по типу (21). После несложных вычислений получаем

$$A_2=-\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial Y_{l_m}}{\partial\varphi}\,R(r,t),$$

$$A_3=\sin\vartheta\,\frac{\partial Y_{l_m}}{\partial\vartheta}\,R(r,t)\qquad l\neq 0^*,\quad m\neq 0,$$

где R удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 R}{c^2\partial t^2}-\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+\frac{l(l+1)}{r^2}R=0,\quad l>0. \qquad (23)$$

Как можно показать в уравнении (23), ввиду наличия третьего члена ТЕ-решение не является бездисперсионной волной, распространяющейся с постоянной скоростью [4]. Так, в частности, если положить

$$R=f(u),$$

где

$$u=\omega\left(t-\frac{r}{v}\right),$$

является фазой волны, то для удовлетворения (23) надо допустить, что скорость волны зависит не только от r и t, но и от частоты волны ω.

ТМ-решение. Здесь $H_r=0$, следовательно,

$$F_{23}=0. \qquad (24)$$

* Значение $l=0$ надо исключить, так как оно приводит к $H_r=0$, что соответствует не ТЕ-решению, а ТЕМ-решению.

Ввиду невозможности градиентного преобразования $A_0 = A_1 = 0$ решение уравнений Максвелла для потенциала с добавочным условием Лоренца довольно сложно. Проще решать задачу сначала для тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$, для чего обратимся к уравнению Максвелла (6), придадим μ значения 0, 1, 2, 3 и подставим в полученные четыре уравнения условие (24). К ним добавим второе тензорное уравнение Максвелла

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} = 0, \tag{25}$$

которое еще не рассматривалось в статье, так как было использовано уравнение Максвелла для компонент потенциала, для которых уравнение (25) выполняется автоматически, если подставить

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}. \tag{26}$$

Придавая значкам μ, ν, λ значения 0, 1, 2, 3, получаем из (25) еще четыре уравнения. Таким образом, окончательно имеем систему восьми уравнений Максвелла для компонент $F_{\mu\nu}$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\vartheta}(F_{12}\sin\vartheta) - \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial F_{31}}{\partial\varphi} - r^2\sin\vartheta\frac{\partial F_{10}}{c\partial t} = 0,\\
\frac{\partial F_{12}}{\partial r} + \frac{\partial F_{20}}{c\partial t} = 0,\\
\frac{\partial F_{31}}{\partial r} - \frac{\partial F_{30}}{c\partial t} = 0,\\
\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_{10}) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}(F_{20}\sin\vartheta) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial F_{30}}{\partial\varphi} = 0,\\
\frac{\partial F_{12}}{c\partial t} - \frac{\partial F_{10}}{\partial\vartheta} + \frac{\partial F_{20}}{\partial r} = 0,\\
\frac{\partial F_{20}}{\partial\varphi} - \frac{\partial F_{30}}{\partial\vartheta} = 0,\\
\frac{\partial F_{31}}{c\partial t} - \frac{\partial F_{30}}{\partial r} + \frac{\partial F_{10}}{\partial\varphi} = 0,\\
\frac{\partial F_{12}}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_{31}}{\partial\vartheta} = 0.
\end{gathered} \tag{27}$$

В системе (27) подвергаем первое уравнение операции $-\frac{\partial}{c\partial t}$, четвертое — операции $-\frac{\partial}{\partial r}$, пятое — операции $\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta$, седьмое — операции $-\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$ и складываем эти результаты. Получаем дифференциальное уравнение для F_{10}

$$r^2\frac{\partial^2 F_{10}}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2F_{10}) - \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial F_{10}}{\partial\vartheta}\right) - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 F_{10}}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{28}$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$F_{10} = Y_{lm}(\vartheta, \varphi)R_g(r, t), \tag{29}$$

где функция $R_g(r, t)$ удовлетворяет уравнению

$$r^2 \frac{\partial^2 R_g}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2 R_g) + l(l+1) R_g = 0, \quad l > 0^*. \tag{30}$$

Остальные компоненты $F_{\mu\nu}$ выражаются через F_{10}.

В результате подстановки формул (29) и (31) в (27)

$$F_{20} = \frac{1}{l(l+1)} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \vartheta}(r^2 F_{10}), \quad F_{31} = \frac{1}{l(l+1)} \frac{\partial^2}{c \partial t \partial \varphi}(r^2 F_{10}),$$

$$F_{30} = \frac{1}{l(l+1)} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}(r^2 F_{10}), \quad F_{12} = -\frac{1}{l(l+1)} \frac{\partial^2}{c \partial t \partial \vartheta}(r^2 F_{10}). \tag{31}$$

Для нахождения компонент потенциала A_μ подставляем найденные значения $F_{\mu\nu}$ в формулы (26) и решаем их совместно с условием Лоренца (15) также методом разделения переменных

$$A_\mu = \theta_\mu(\vartheta)\, \Phi_\mu(\varphi)\, R_\mu(r, t).$$

После несложных вычислений получаем

$$A_0 = Y_{lm}(\vartheta, \varphi)\left[\frac{\partial R}{c \partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(r^2 R_g)\right],$$

$$A_1 = Y_{lm}(\vartheta, \varphi)\left(\frac{\partial R}{\partial r} + r^2 \frac{\partial R_g}{c \partial t}\right),$$

$$A_2 = \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \vartheta} R,$$

$$A_3 = \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi} R,$$

где R подчиняется уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(H^2 r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) - r^2 \frac{\partial}{c \partial t}\left(H^2 \frac{\partial R}{c \partial t}\right) - l(l+1) H^2 R =$$

$$= r^2 \frac{\partial}{c \partial t}\left[H^2 \frac{\partial}{\partial r}(r^2 R_g)\right] - \frac{\partial}{\partial r}\left(H^2 r^4 \frac{\partial R_g}{c \partial t}\right). \tag{32}$$

Из уравнения (32) видно, что ТМ-волны, так же как и ТЕ-волны, не распространяются в вакууме без искажения и дисперсии.

Таким образом, сравнивая три типа решений, приходим к выводу, что только поперечные электромагнитные волны (ТЕМ-решение) могут распространяться без дисперсии в вакууме при наличии постоянной отрицательной кривизны, причем с такой же скоростью, что и в неискривленном пространстве—времени (в сделанном приближении, т. е. без учета влияния электромагнитного поля на метрику).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фридман А. А. Журнал Русского физико-химического общества. Часть физическая, 1924, 56, № 1, стр. 59.
2. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. ГИТТЛ, 1955, § 94.
3. Эйнштейн А. Сущность теории относительности. ИЛ, 1955, стр. 88.
4. Гильберт Д., Курант Р. Методы математической физики, т. II. ОГИЗ, 1945, стр. 170.
5. Schrödinger E. Expanding Universes. Cambridge, 1956.
6. Ueno J. Progr. theor. phys. 1954, v. 12, N 4, p. 461.
7. Takeno H., Ueno J. Progr. theor. phys., 1956, v. 15, N 4, p. 322.
8. Takeno H. Tensor, 1954, v. 4, N 1.

* Значение $l=0$ исключено, так как оно приводит к ТЕМ-решению.