Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXVII, вып. 3, 1961 г.

ОБ ОБТЕКАНИИ ПЛОСКИМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КОНТУРОВ

Н. П. Неронов

Цель статьи — изучение обтекания плоским потенциальным потоком жидкости некоторых алгебраических кривых, а также нахождение профилей аэропланного типа с точкой возврата и указание способа их построения.

Для решения поставленной задачи в начале работы применяется конформное преобразование, приводящее к некоторым алгебраическим контурам с двумя критическими точками нулевой скорости, затем путем комбинации этого преобразования с другим одна из критических точек преобразуется в точку возврата. Таким образом получаются новые профили аэропланных крыльев и как частный случай — известный профиль Н. Е. Жуковского. Уравнение обтекаемого контура представляется в параметрической форме, которая позволяет непосредственно вычислять координаты его точек и, следовательно, чрезвычайно облегчает построение контура.

Поскольку задача ограничивается лишь отысканием контуров определенного типа, потенциал скоростей считается однозначной функцией, а циркуляция скорости вдоль произвольной замкнутой кривой равной нулю. Наличие циркуляции только изменит положение критической точки вступления жидкости на найденный контур, оставляя без изменения точку схода (точку возврата) с него, конечно, при соответствующих ограничениях в ориентации контура относительно скорости потока.

Таким образом, изучение аэродинамических характеристик полученных профилей не входит в план настоящей работы.

1. Контуры с двумя критическими точками

Величина и направление скорости идеальной и несжимаемой жидкости на бесконечно большом расстоянии от твердого тела постоянны. Движение жидкости предполагается плоским, безвихревым, непрерывным и установившимся.

Обозначим через z и w два комплексных переменных $(i = \sqrt{-1})$

$$z = x + iy; \quad w = \varphi + i\psi, \tag{1}$$

где x, y и φ, ψ — прямоугольные декартовы координаты точек в плоскостях z и w.

Взаимно-однозначное конформное преобразование

$$z = f(w) \tag{2}$$

дает в плоскости z (плоскости движения жидкости) две системы взаимно-ортогональных кривых

$$\varphi = \text{const}, \quad \psi = \text{const}. \tag{3}$$

Пусть φ — потенциал скоростей, а ψ — функция тока. Положим, что

$$\psi = 0 \tag{4}$$

есть уравнение линии тока l, состоящей из двух бесконечных ветвей и контура цилиндра (рис. 1).

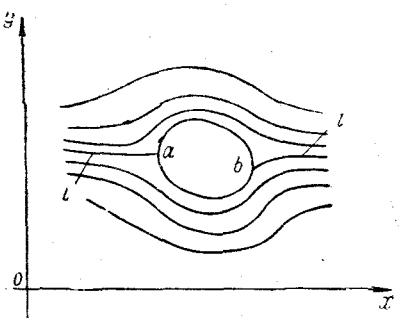


Рис. 1

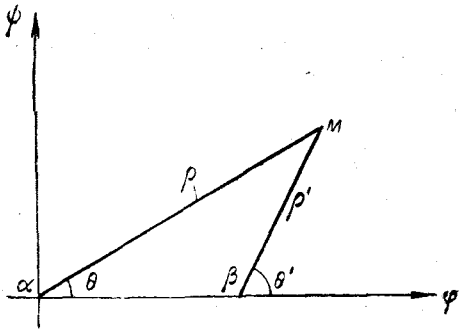


Рис. 2

Обозначим через a точку контура, в которой элемент жидкости, описывающий траекторию l, вступает на поверхность цилиндра, и через b — точку, в которой упомянутый элемент покидает эту поверхность.

Кривым (3) соответствуют в плоскости w прямые, параллельные координатным осям, в частности ось абсцисс φ соответствует линии тока l.

Пусть точкам α (начало координат) и β плоскости w, расположенным на оси абсцисс, для которых $w_\alpha = 0$ и $w_\beta = w_0$ соответствуют точки a и b плоскости z (рис. 2).

Как следствие преобразования, контур цилиндра преобразуется на плоскости w в прямолинейный отрезок $\alpha\beta$, который рассматривается как сплющенный контур с верхней и нижней сторонами. Предположим, что верхняя и нижняя части контура цилиндра преобразуются соответственно в верхнюю и нижнюю стороны отрезка $\alpha\beta$.

Зададим зависимость (2) между комплексными переменными z и w

$$z = c_0 + c_1 w + \sum_{p+q=n} c_n(p, q)\, w^{\frac{p}{n}} (w - w_0)^{\frac{q}{n}}. \tag{5}$$

Коэффициенты конформного преобразования (5) являются, вообще говоря, мнимыми количествами

$$c_0 = a_0 + ib_0; \quad c_1 = a_1 + ib_1; \quad c_n(p, q) = a_n(p, q) + ib_n(p, q). \tag{6}$$

Целые положительные числа p, q, n удовлетворяют неравенствам

$$p \geqslant 1, \quad q \geqslant 1, \quad n \geqslant 2. \tag{7}$$

Каждое из чисел p, q принимает все значения ряда чисел 1, 2, 3 ... ... n. Наконец, суммирование распространено на систему значения p и q, удовлетворяющих равенству

$$p+q=n. \tag{8}$$

В силу формулы (5) функция z оказывается многозначной с двумя точками разветвления α и β порядка n на оси абсцисс φ плоскости w, где соответственно $w_\alpha=0$, $w_\beta=w_0$ (см. рис. 2).

Производная $\frac{dz}{dw}$ дает распределение скоростей v в различных точках пространства, занятого жидкостью. Ее модуль равен $\frac{1}{v}$, а аргумент дает направление скорости в соответствующей точке [5]. Из выражения для производной $\frac{dz}{dw}$ легко убедиться, что ее модуль становится бесконечно большим в точках α и β, а соответствующее этим точкам значение скорости обращается в нуль.

Для бесконечно удаленных точек

$$z=w\left[c_1+\sum_{p+q=n} c_n(p,\ q)\right];\quad \frac{dz}{dw}=c_1+\sum_{p+q=n} c_n(p,\ q). \tag{9}$$

Таким образом, величина и направление скорости на бесконечно большом расстоянии от твердого тела оказываются постоянными.

Отделяем в уравнении (9) вещественную и чисто мнимую части

$$\frac{v_{x\infty}}{v_\infty^2}=a_1+\sum_{p+q=n} a_n(p,\ q);\quad \frac{v_{y\infty}}{v_\infty^2}=b_1+\sum_{p+q=n} b_n(p,\ q), \tag{10}$$

где v_∞ — скорость жидкости в упомянутых точках;
$v_{x\infty}$, $v_{y\infty}$ — проекции скорости на координатные оси.

Установим соответствие между верхней полуплоскостью w и частью плоскости z, расположенной со стороны положительного направления координатной оси oy и ограниченной бесконечными ветвями линии тока l, а также верхней частью контура цилиндра. Тогда нижней полуплоскости w будет соответствовать часть плоскости z, лежащая со стороны отрицательного направления оси oy и ограниченная прежними бесконечными ветвями линии тока l и нижней частью контура цилиндра. Получим

$$a_1+\sum_{p+q=n} a_n(p,\ q)>0. \tag{11}$$

В силу условий (10) и (11) $v_{x\infty}>0$ и, следовательно, движение жидкости совершается в положительном направлении координатной оси ox.

Для изучения всех ветвей многозначной функции z проведем на плоскости w разрез $\alpha\beta$ и построим соответствующую многолистную поверхность Римана, осуществляющую непрерывный переход одной ветви функции z в другую, после чего эта функция может рассматриваться как однозначная. Решение поставленной задачи зависит от того, на каком именно листе рассматривается значение z. Каждое из совокупности возможных решений соответствует определенным образом выбранному значению множителя $\overline{w^{\frac{n}{n}}}$ и подобных ему, входящих в выражение для z и определяющих ту или другую ветвь упомянутой функции z.

С этой целью вводим на плоскости w полярные координаты (см. рис. 2) по формулам

$$w = \rho e^{\theta i}; \quad w - w_0 = \rho' e^{\theta' i}, \tag{12}$$

где e — основание натуральных логарифмов.

Границы изменения полярных углов θ и θ' зависят от индекса листа поверхности Римана. Действительно, для первого листа

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta' \leqslant 2\pi;$$

для второго

$$2\pi \leqslant \theta \leqslant 4\pi, \quad 2\pi \leqslant \theta' \leqslant 4\pi \text{ и т. д.}$$

Для последнего листа

$$2\pi(n-1) \leqslant \theta \leqslant 2\pi n, \quad 2\pi(n-1) \leqslant \theta' \leqslant 2\pi n.$$

Выражение для производной $\frac{dz}{dw}$ позволяет изучить получающееся поле скоростей на всей части плоскости z, занятой жидкостью. Для осуществления в действительности движения рассматриваемого типа необходимо, чтобы корни уравнения $\frac{dz}{dw} = 0$ соответствовали точкам плоскости z, расположенным внутри контура цилиндра. Это условие накладывает некоторые ограничения в форме неравенств на произвольные коэффициенты формулы (5) конформного преобразования (пример подобных ограничений приведен ниже).

Если в формуле (5) все коэффициенты c_0, c_1, $c_n(p, q)$ вещественны, т. е. $b_1 = b_2 = b_n(p, q) = 0$, в движении жидкости существует плоскость симметрии. Ось абсцисс на плоскости z является одной из линий тока и служит для контура цилиндра осью симметрии. Можно показать, что корни уравнения $\frac{dz}{dw} = 0$ будут удовлетворять сформулированному выше условию, если коэффициенты c_0, c_1, $c_n(p, q)$ имеют одинаковый знак (достаточное условие).

Применим формулу (5) конформного преобразования для некоторых частных значений n.

1. Случай $n = 2$. Формула (5) принимает вид

$$z = x + iy = c_0 + c_1 w + c_2 w^{\frac{1}{2}} (w - w_0)^{\frac{1}{2}}, \tag{13}$$

где

$$c_0 = a_0 + ib_0, \quad c_1 = a_1 + ib_1, \quad c_2 = a_2 + ib_2 \tag{14}$$

и в силу неравенства (11)

$$a_1 + a_2 > 0.$$

Пусть, кроме того, $a_1 a_2 + b_1 b_2 > 0$. Тогда будет удовлетворено предыдущее условие относительно корней уравнения $\frac{dz}{dw} = 0$.

Переходим к полярным координатам (12) и рассмотрим значение функции z на первом листе поверхности Римана.

Для точек верхней стороны отрезка $\alpha\beta$

$$\theta = 0, \quad \theta' = \pi, \quad \rho' = w_0 - \rho, \quad w - w_0 = (w_0 - \rho) e^{\pi i}. \tag{15}$$

Для точек нижней стороны того же отрезка

$$\theta = 2\pi, \quad \theta' = \pi, \quad \rho' = w_0 - \rho, \quad w = \rho e^{2\pi i}, \quad w - w_0 (w_0 - \rho) e^{\pi i}. \tag{16}$$

Подстановка в формулу (13) дает для верхней стороны отрезка $\alpha\beta$

$$z = c_0 + c_1\rho + c_2\rho^{\frac{1}{2}}(w_0 - \rho)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\pi i}{2}} \tag{17}$$

и соответственно для нижней стороны

$$z = c_0 + c_1\rho + c_2\rho^{\frac{1}{2}}e^{\pi i}(w_0 - \rho)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\pi i}{2}}. \tag{18}$$

Наконец, отделяя в равенствах (17) и (18) вещественную и чисто мнимую части, получаем параметрическое уравнение верхней и нижней частей контура цилиндра

$$x = a_0 + a_1\rho \pm \rho^{\frac{1}{2}}(w_0 - \rho)^{\frac{1}{2}}, \tag{19}$$

$$y = b_0 + b_1\rho \pm a_2\rho^{\frac{1}{2}}(w_0 - \rho)^{\frac{1}{2}},$$

где параметр ρ изменяется в пределах $0 \leqslant \rho \leqslant w_0$.

Верхние знаки в равенствах (19) относятся к верхней части контура, а нижние к нижней.

Исключая в равенствах (19) параметр ρ, получаем уравнение эллипса

$$[a_2(x - a_0) + b_2(y - b_0)]^2 - w_0(a_1a_2 + b_1b_2)[a_2(x - a_0) + b_2(y - b_0)] + [a_1(y - b_0) - b_1(x - a_0)]^2 = 0. \tag{20}$$

Итак, путем конформного преобразования рассматриваемого типа, примененного к простейшему частному случаю ($n = 2$), переходим к обтеканию жидкостью эллиптического контура, произвольно ориентированного в потоке. Такого рода движение жидкости при помощи иного метода изучалось Г. Ламбом [6].

Рассмотрим теперь поведение функции z на втором листе поверхности Римана. Ограничиваясь точками, лежащими на отрезке $\alpha\beta$, имеем для верхней его стороны

$$\theta = 2\pi, \quad \theta' = 3\pi, \quad \rho' = w_0 - \rho, \quad w = \rho e^{2\pi i},$$
$$w - w_0 = (w_0 - \rho)e^{3\pi i} \tag{21}$$

и для нижней стороны

$$\theta = 4\pi, \quad \theta' = 3\pi, \quad \rho' = w_0 - \rho, \tag{22}$$
$$w = \rho e^{4\pi i}, \quad w - w_0 = (w_0 - \rho)e^{3\pi i}.$$

Доведя до конца вычисления, аналогичные приведенным выше, получим по-прежнему равенства (19). Таким образом, нового решения в данном случае не получаем.

Представляет некоторый интерес исследование вида бесконечных ветвей линии тока l. Ограничиваясь первым листом поверхности Римана, имеем для левой бесконечной ветви

$$\theta = \theta' = \pi, \quad \rho' = w_0 + \rho, \quad w = \rho e^{\pi i}, \tag{23}$$
$$w - w_0 = (w_0 + \rho)e^{\pi i}$$

и аналогично для правой

$$\theta = \theta' = 0, \quad \rho' = \rho - w_0, \quad w = \rho, \quad w - w_0 = \rho - w_0. \tag{24}$$

Произведем подстановку в формулу (13) конформного преобразования и, отделяя вещественную и чисто мнимую части, получаем параметрические уравнения искомых бесконечных ветвей:

для левой ветви

$$x = a_0 - a_1\rho - a_2\rho^{\frac{1}{2}}(w_0+\rho)^{\frac{1}{2}},$$

$$y = b_0 - b_1\rho - b_2\rho^{\frac{1}{2}}(w_0+\rho)^{\frac{1}{2}}, \tag{25}$$

где параметр ρ изменяется в пределах $0 \leqslant \rho < +\infty$;

для правой

$$x = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^{\frac{1}{2}}(\rho - w_0)^{\frac{1}{2}},$$

$$y = b_0 + b_1\rho + b_2\rho^{\frac{1}{2}}(\rho - w_0)^{\frac{1}{2}}, \tag{26}$$

где

$$w_0 \leqslant \rho < +\infty.$$

В обоих случаях исключение параметра ρ приводит к одной и той же гиперболе

$$[b_2(x-a_0) - a_2(y-b_0)]^2 + w_0(a_2b_1 - a_1b_2)[b_2(x-a_0) - a_2(y-b_0)] - [b_1(x-a_0) - a_1(y-b_0)]^2 = 0. \tag{27}$$

Найденные кривые оказываются различными ветвями этой гиперболы, имеющими общую ассимптоту.

Если $c_1 = c_2 (a_1 = a_2,\ b_1 = b_2)$, эллипс обращается в круг.

2. Случай $n = 3$. Формула (5) переписывается в виде

$$z = c_0 + c_1 w + c_3(1,2)w^{\frac{1}{3}}(w-w_0)^{\frac{2}{3}} + c_3(2,1)w^{\frac{2}{3}}(w-w_0)^{\frac{1}{3}}, \tag{28}$$

где

$$c_0 = a_0 + ib_0; \quad c_1 = a_1 + ib_1;$$
$$c_3(1,2) = a_3(1,2) + ib_3(1,2);$$
$$c_3(2,1) = a_3(2,1) + ib_3(2,1). \tag{29}$$

Приведем результаты вычислений только для первого листа поверхности Римана, опуская промежуточные выкладки, поскольку метод остается прежним.

Параметрическое уравнение верхней части контура цилиндра

$$x = a_0 + a_1\rho - \left[\frac{1}{2}a_3(1,2) + \frac{\sqrt{3}}{2}b_3(1,2)\right]\rho^{\frac{1}{3}}(w-w_0)^{\frac{2}{3}} + \left[\frac{1}{2}a_3(2,1) - \frac{\sqrt{3}}{2}b_3(2,1)\right]\rho^{\frac{2}{3}}(w_0-\rho)^{\frac{1}{3}};$$

$$y = b_0 + b_1\rho + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}a_3(1,2) - \frac{1}{2}b_3(1,2)\right]\rho^{\frac{1}{3}}(w_0-\rho)^{\frac{2}{3}} + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}a_3(2,1) + \frac{1}{2}b_3(2,1)\right]\rho^{\frac{2}{3}}(w_0-\rho)^{\frac{1}{3}} \tag{30}$$

и соответственно нижней части

$$x = a_0 + a_1\rho + \left[-\frac{1}{2}a_3(1,2) + \frac{\sqrt{3}}{2}b_3(1,2)\right]\rho^{\frac{1}{3}}(w_0-\rho)^{\frac{2}{3}} + \\ + \left[\frac{1}{2}a_3(2,1) + \frac{\sqrt{3}}{2}b_3(2,1)\right]\rho^{\frac{2}{3}}(w_0-\rho)^{\frac{1}{3}};$$

$$y = b_0 + b_1\rho + \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}a_3(1,2) - \frac{1}{2}b_3(1,2)\right]\rho^{\frac{1}{3}}(w_0-\rho)^{\frac{2}{3}} + \\ + \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}a_3(2,1) + \frac{1}{2}b_3(2,1)\right]\rho^{\frac{2}{3}}(w_0-\rho)^{\frac{1}{3}}, \qquad (31)$$

где изменение параметра ρ ограничено неравенствами $0 \leqslant \rho \leqslant w_0$.

Исключение параметра ρ из уравнений (30) и (31) приведет к двум различным алгебраическим кривым третьего порядка, совокупность которых и представляет контур цилиндра. Их уравнения содержат девять параметров a_0, b_0, a_1, b_1, $a_3(1,2)$, $b_3(1,2)$, $a_3(2,1)$, $b_3(2,1)$, w_0, связанных двумя уравнениями (10), поскольку $v_{x\infty}$ и $v_{y\infty}$ заданы. Таким образом, независимых параметров будет только семь, т. е. на два меньше числа произвольных параметров, входящих в уравнение самой общей алгебраической кривой третьего порядка.

Угловой коэффициент касательной к верхней части контура цилиндра в точке a

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\rho=0} = \frac{-a_3(1,2)\sqrt{3} + b_3(1,2)}{a_3(1,2) + b_3(1,2)\sqrt{3}} \qquad (32)$$

и нижней части

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\rho=0} = \frac{a_3(1,2)\sqrt{3} + b_3(1,2)}{a_3(1,2) - b_3(1,2)\sqrt{3}}, \qquad (33)$$

где $c_3(1,2) \neq 0$.

В противном случае полученные формулы без труда заменяются другими. Подобные же вычисления производят и для точки b контура. Формулы (32) и (33) показывают, что точки a и b контура являются угловыми.

Составим параметрические уравнения бесконечных ветвей линии тока l. Для левой ветви имеем

$$x = a_0 - a_1\rho - a_3(1,2)\rho^{\frac{1}{3}}(w_0+\rho)^{\frac{2}{3}} - a_3(2,1)\rho^{\frac{2}{3}}(w_0+\rho)^{\frac{1}{3}}; \qquad (34)$$

$$y = b_0 - b_1\rho - b_3(1,2)\rho^{\frac{1}{3}}(w_0+\rho)^{\frac{2}{3}} - b_3(2,1)\rho^{\frac{2}{3}}(w_0+\rho)^{\frac{1}{3}},$$

где параметр ρ изменяется в пределах $0 \leqslant \rho < +\infty$;

для правой ветви

$$x = a_0 + a_1\rho + a_3(1,2)\rho^{\frac{1}{3}}(\rho-w_0)^{\frac{2}{3}} + a_3(2,1)\rho^{\frac{2}{3}}(w-w_0)^{\frac{1}{3}};$$

$$y = b_0 + b_1\rho + b_3(1,2)\rho^{\frac{1}{3}}(\rho-w_0)^{\frac{2}{3}} + b_3(2,1)\rho^{\frac{2}{3}}(\rho-w_0)^{\frac{1}{3}}, \qquad (35)$$

где $w_0 \leqslant \rho < +\infty$.

Обе ветви принадлежат к алгебраическим кривым третьего порядка. Полагая

$$a_0 = b_0 = b_1 = b_3(1, 2) = b_3(2, 1) = 0;$$
$$a_1 = a_3(1, 2) = a_3(2, 1),$$

переходим к контуру цилиндра с двумя осями симметрии (рис. 3).

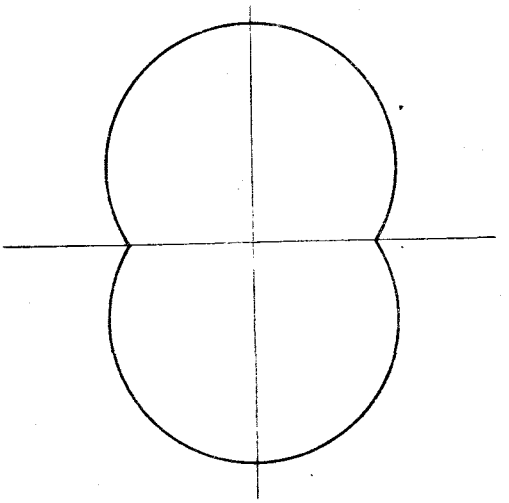


Рис. 3

2. Контуры с одной точкой возврата

В случае аэропланного крыла одна из точек — a или b — контура является точкой возврата. Это будет точка b, если обтекание совершается в положительном направлении оси абсцисс, т. е. удовлетворяется неравенство (11). Скорость жидкости в этой точке имеет конечное, отличное от нуля значение. Конформное преобразование, соответствующее случаю аэропланного крыла, представим в форме следующего соотношения между комплексным переменным Z и вспомогательным комплексным переменным z

$$Z = X + iY = \frac{\Phi(z)}{\Psi(z)}. \tag{36}$$

В свою очередь z связано с w уравнением (5). Через $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ обозначены целые полиномы степеней соответственно $m+1$ и m с постоянными коэффициентами, которые могут иметь комплексные значения,

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= z^{m+1} + d_1 z^m + d_2 z^{m-1} + \ldots + \\ &+ d_m z + d_{m+1} = \Phi_1(x, y) + i\Phi_2(x, y);\\ \Psi(z) &= z^m + e_1 z^{m-1} + e_2 z^{m-2} + \ldots + \\ &+ e_{m-1} z + e_m = \Psi_1(x, y) + i\Psi_2(x, y).\end{aligned} \tag{37}$$

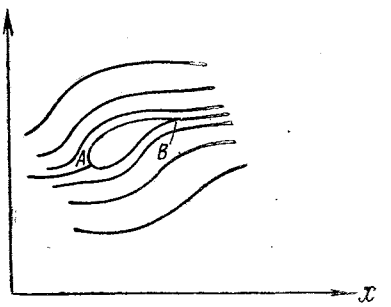


Рис. 4

Конформное преобразование (36) при надлежащем выборе параметров видоизменяет линии тока плоскости z (рис. 1) в линии тока плоскости Z (рис. 4). При этом линия тока l превращается в линию тока L. Точкам a и b будут теперь соответствовать точки A и B.

Для бесконечно удаленных точек $Z = z$ и, следовательно, введение переменного Z не изменяет линий тока плоскости на бесконечно большом расстоянии от обтекаемого контура.

Конформное преобразование вида

$$Z = \frac{z(z+d)}{z+e'}, \quad z = c_0 + c_1 w + c_2 w^{\frac{1}{2}} (w - w_0)^{\frac{1}{2}} \tag{38}$$

представляет простейший пример комбинации двух конформных преобразований указанного выше типа.

Предположим, что $a_1 + a_2 > 0$. Рассмотрим два варианта в зависимости от характера параметров, определяющих конформное преобразование (38).

Вариант I. Пусть

$$c_0 = a_0 + ib_0, \quad c_1 = c_2 = a_1 + ib_1, \qquad (39)$$
$$a_1 > 0,$$

т. е. обтекаемый контур на плоскости z представляется кругом. Далее предположим, что параметры d и e вещественны. Если при этом d и e одного знака, то окружность на плоскости z радиуса r, $r = \sqrt{de}$ с центром в начале координат преобразуется на плоскости Z в дугу окружности радиуса $|d|$ с центром в начале координат.

Как известно, положение критических точек α и β на плоскости w определяется равенствами $w_\alpha = 0$ и $w_\beta = w_0$. Отсюда находим положение критических точек a и b на плоскости z

$$z_a = c_0, \quad z_b = c_0 + c_1 w_0. \qquad (40)$$

Отделяя вещественную и чисто мнимую части, вычисляем координаты точек a и b

$$x_a = a_0, \quad y_a = b_0, \quad x_b = a_0 + a_1 w_0, \qquad (41)$$
$$y_b = b_0 + b_1 w_0.$$

Координаты точек A и B на плоскости Z можно найти путем отделения вещественной и чисто мнимой частей в равенствах

$$Z_A = \frac{z_a (z_a + d)}{z_a + e'}, \quad Z_B = \frac{z_b (z_b + d)}{z_b + e'}. \qquad (42)$$

Определим скорость жидкости в точке B. В выражении производной

$$\frac{dZ}{dw} = \frac{dZ}{dz} \frac{dz}{dw} \qquad (43)$$

второй из множителей правой части принимает бесконечно большое значение по модулю при $w = w_0$. Поэтому скорость в точке B может иметь конечное, отличное от нуля, значение только в том случае, если первый множитель при $z = z_b$ обращается в нуль. Отсюда

$$\left.\frac{dZ}{dz}\right|_{z=z_b} = \frac{z_b^2 + 2e'zb + de'}{(z_b + e')^2} = 0 \qquad (44)$$

и, следовательно,

$$z_b^2 + 2e'z_b + de' = 0, \quad z_b = e' \pm \sqrt{e'^2 - de'}. \qquad (45)$$

Если $e' > 0$, $e' > d$ или $e' < 0$, $e' < d$, что, в частности, имеет место при разных знаках параметров d и e', корни уравнения (44) вещественны и различны. Если же $e' > 0$, $e' < d$ или $e' < 0$, $e' > d$, что осуществляется только при одинаковых знаках параметров d и e', корни уравнения (44) комплексные сопряженные. Поэтому, отождествляя два выражения (40) и (45) для z_b, приходим к двум случаям.

В первом случае вещественных корней уравнения (45) будем иметь систему уравнений, связывающую параметры конформного преобразования (38),

$$a_0 + a_1 w_0 = -e' \pm \sqrt{e'^2 - de'}, \quad b_0 + b_1 w_0 = 0 \qquad (46)$$

и во втором случае мнимых корней

$$a_0 + a_1 w_0 = -e', \quad b_0 + b_1 w_0 = \pm \sqrt{de' - e'^2}. \tag{47}$$

В первом случае точка b расположена на оси абсцисс, во втором совпадает с некоторой точкой окружности радиуса r, $r = \sqrt{de'}$, с центром в начале координат плоскости z.

Величина и направление скорости жидкости в точке B определяются значением производной

$$\left.\frac{dZ}{dz}\right|_{z=z_b} = \frac{c^2 w_0}{z_b + e'} = \frac{c^2 w_0}{c_0 + c w_0 + e'}. \tag{48}$$

Приведем параметрическое уравнение линии тока L, отделяя вещественную и чисто мнимую части в уравнениях (38) и принимая во внимание равенства (19), (25), (26).

Придерживаясь прежнего правила знаков, получим параметрическое уравнение контура цилиндра на плоскости Z в следующей форме

$$X = \frac{x^3 + xy^2 + (d + e')x^2 + (d - e')y^2 + de'x}{(x + e')^2 + y^2} \equiv X(x, y);$$

$$Y = \frac{y^3 + x^2 y + 2e'xy + de'y}{(x + e')^2 + y^2} \equiv Y(x, y); \tag{49}$$

$$x = a_0 + a_1\rho \pm b_1\rho^{\frac{1}{2}}(w_0 - \rho)^{\frac{1}{2}};$$

$$y = b_0 + b_1\rho \pm a_1\rho^{\frac{1}{2}}(w_0 - \rho)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$0 \leqslant \rho \leqslant w_0.$$

Параметрическое уравнение левой бесконечной ветви линии тока L

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y),$$

$$x = a_0 - a_1\rho - a_1\rho^{\frac{1}{2}}(w_0 + \rho)^{\frac{1}{2}}, \quad y = b_0 - b_1\rho - b_1\rho^{\frac{1}{2}}(w_0 + \rho)^{\frac{1}{2}}, \tag{50}$$

где

$$0 \leqslant \rho < +\infty.$$

Параметрическое уравнение правой бесконечной ветви линии тока L

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y),$$

$$x = a_0 + a_1\rho + a_1\rho^{\frac{1}{2}}(\rho - w_0)^{\frac{1}{2}}, \quad y = b_0 + b_1\rho + b_1\rho^{\frac{1}{2}}(\rho - w_0)^{\frac{1}{2}}, \tag{51}$$

где

$$w_0 \leqslant \rho < +\infty.$$

Уравнения (49), (50), (51) сохраняют силу независимо от соотношений (46) или (47), существующих между параметрами конформного преобразования (38).

Поставим дальнейшей задачей установление связи между аналитическим исследованием вопроса в настоящей статье и геометрическим методом Н. Е. Жуковского [2, стр. 142—146], относящимся к случаю комплексных корней уравнения (45), когда имеют силу равенства (47).

Пусть

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \tag{52}$$

уравнение некоторой окружности в плоскости z радиуса R с центром в точке $C(x_0, y_0)$. Предположим, что эта окружность представляет контур, обтекаемый плоским потенциальным потоком жидкости, скорость которого в бесконечности известна как по величине, так и по направ-

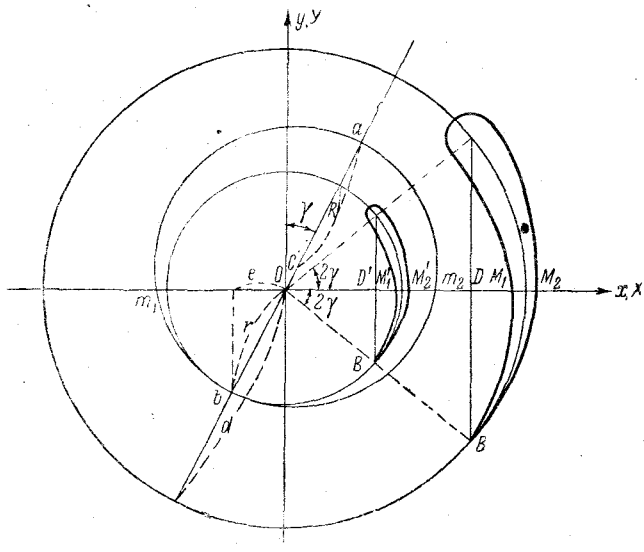


Рис. 5

лению. Тогда, отождествляя уравнения (20) и (52), получаем значения параметров конформного преобразования (38)

$$a_0 + a_1 w_0 = -e', \quad b_0 + b_1 w_0 = \pm\sqrt{de'^2 - e'^2},$$

$$a_0 = x_0 - R\frac{v_{x\infty}}{v_\infty}, \quad b_0 = y_0 - R\frac{v_{y\infty}}{v_\infty}, \tag{53}$$

$$a_1 = \frac{v_{x\infty}}{2v_\infty^2}, \quad b_1 = \frac{v_{y\infty}}{2v_\infty^2}, \quad w_0 = 4Rv_\infty.$$

Подчиним теперь параметры, входящие в предыдущие равенства, некоторым специальным условиям, для чего проведем на плоскости z окружность радиуса r с центром в начале координат. Пусть она касается окружности (52) в некоторой точке, которую отождествим с точкой b. Конечно, при отсутствии циркуляции критические точки a и b окружности (52) оказываются расположенными на диаметре, параллельном направлению скорости в бесконечно удаленных точках и образующем с осью ординат некоторый угол γ (рис. 5). Получаем систему равенств, реализующую выполнение указанных условий в следующем виде:

$$R \pm \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = r = \sqrt{de'},$$

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{v_{x\infty}}{v_{y\infty}} = \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{-e'}{\pm\sqrt{de' - e'^2}} = \operatorname{tg}\gamma. \tag{54}$$

Н. Е. Жуковский, излагая идею образования предложенного им профиля, оперирует с упомянутыми выше двумя окружностями, ра-

диусы которых r и R мало отличаются один от другого. Рис. 6 представляет профиль аэропланного крыла типа Н. Е. Жуковского, построенного по его параметрическому уравнению (49) с сохранением цифровых данных примера [2, стр. 153], а именно $(0 < e' < d)$

$$r = 750 \text{ мм}, \quad R = 762{,}5 \text{ мм}, \quad \gamma = 10°.$$

В равенствах (53) и (54) для рассматриваемого числового примера перед радикалами надо взять нижние знаки. Затем

$$\sin\gamma = \frac{e'}{r} = \frac{r}{d} = \sqrt{\frac{e'}{d}}.$$

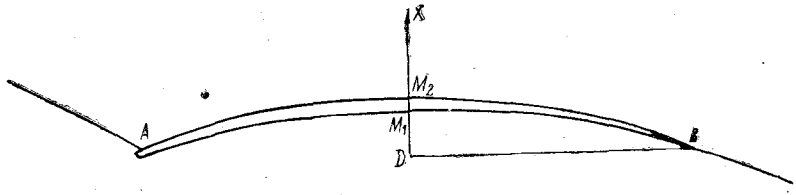


Рис. 6

Конформное преобразование в настоящей статье

$$Z = \frac{z(z+d)}{z+e'}$$

отличается от переписанного в наших обозначениях преобразования С. А. Чаплыгина

$$\zeta = \frac{e'}{r}\,\frac{z(z+d)}{z+e'} = \frac{e'}{r}Z,$$

которым пользуется Н. Е. Жуковский, только отсутствием постоянного множителя $\frac{e'}{r}$, $\frac{e'}{r} = \sin\gamma$. Поэтому, сохраняя геометрический закон образования профиля и исходные данные числового примера, мы должны получить профиль, подобный профилю, изображенному Н. Е. Жуковским. Отношение размеров профилей будет равно $\sin\gamma$.

Как уже отмечалось, наличие циркуляции на форме профиля нисколько не отразится. Уравнение окружности (52) останется неизменным, как и положение точки b на ней, а также положение соответствующих ей точек B и B' профиля в плоскостях Z и ζ (см. рис. 5).

Вычислим отношение средней толщины M_1M_2 профиля, отсчитываемой по оси абсцисс, к его полухорде, т. е. длине перпендикуляра BD, опущенного из точки B на ось абсцисс (см. рис. 5). С этой целью обратимся к уравнению окружности (52) и, полагая в нем $y = 0$, найдем абсциссы x_1 и x_2 точек m_1 и m_2 ее пересечения с осью абсцисс. Положим далее $z_1 = x_1$ и $z_2 = x_2$. После этого приведенные выше формулы конформных преобразований дадут соответствующие значения переменных Z и ζ, иначе абсциссы Z_1 и Z_2 точек M_1 и M_2 в плоскости Z, а также абсциссы ζ_1 и ζ_2 точек M_1' и M_2' в плоскости ζ (см. рис. 5).

Наконец, вычисляем полухорду BD центрального угла 4γ окружности радиуса d в плоскости Z, а также полухорду $B'D'$ того же центрального угла радиуса r, $r = d\sin 2\gamma$, в плоскости ζ. В первом случае $BD = d\sin 2\gamma$ и во втором $B'D' = r\sin 2\gamma$. Искомое отношение принимает вид

$$\frac{M_1M_2}{BD} = \frac{M_1'M_2'}{B'D'} = \frac{Z_2 - Z_1}{d\sin 2\gamma} = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{r\sin 2\gamma} = \frac{2\varepsilon}{\cos\gamma} + \ldots,$$

где введено сокращенное обозначение

$$\varepsilon = \frac{R-r}{r} = \frac{1}{60}$$

и в силу малости ε удержан только первый член целого ряда относительно ε. Подстановка числовых значений дает

$$\frac{M_1M_2}{BD} = \frac{M_1'M_2'}{B'D'} = \frac{1}{30}.$$

Таким образом, указанное отношение остается неизменным для обоих конформных преобразований, что очевидно, так как является непосредственным следствием подобия. Между тем, рассмотрев чертежи, убеждаемся, что указанное отношение выдержано для профиля рис. 6 и не согласуется с профилем, приведенным Н. Е. Жуковским, хотя в тексте приведенная форма профиля названа точной [2, стр. 153]. Следовательно, исходные данные для этой формы должны быть изменены в сторону увеличения радиуса R соприкасающегося круга.

Вариант II. Рассмотрим конформное преобразование (39) в самом общем его виде, считая параметры c_0, c_1, c_2, d, e' мнимыми, т. е.

$$c_0 = a_0 + ib_0; \quad c_1 = a_1 + ib_1; \quad c_2 = a_2 + ib_2;$$
$$d = d_1 + id_2; \quad e' = e_1' + ie_2'. \tag{55}$$

Для упрощения выкладок поместим начало координат на плоскости z в критической точке a контура и проведем ось абсцисс через точки a и b. Тогда

$$a_0 = 0; \quad b_2 = 0; \quad c_0 = 0; \quad b_1 = 0; \quad c_1 = a_1;$$
$$a_1 > 0; \quad a_2 > 0. \tag{56}$$

Далее можно положить $w_0 = 1$. После этого преобразование (38) принимает вид

$$Z = \frac{z(z+d)}{z+e'}; \quad z = c_1 w + c_2 w^{\frac{1}{2}} (w-1)^{\frac{1}{2}}. \tag{57}$$

Отделяем в первом из предыдущих уравнений вещественную и чисто мнимую части

$$X = \frac{x^3 + xy^2 + (d_1 + e_1')x^2 + (d_1 - e_1')y^2 + 2e_2'xy + (d_1e_1' + d_2e_2')x + (d_1e_2' - d_2e_1')y}{(x+l_1')^2 + (y+l_2')^2};$$

$$Y = \frac{y^3 + x^2y + (d_2 - e_2')x^2 + (d_2 + e_2')y^2 + 2e_1'xy + (d_2e_1' - d_1e_2')x + (d_1e_1' + d_2e_2')y}{(x+e_1')^2 + (y+e_2')^2}. \tag{58}$$

Уравнение (19) эллиптического контура на плоскости переписывается в форме

$$x = c_1\rho \pm b_2\rho^{\frac{1}{2}}(1-\rho)^{\frac{1}{2}}; \quad y = \pm a_2\rho^{\frac{1}{2}}(1-\rho)^{\frac{1}{2}}. \tag{59}$$

Условие (45), по которому скорость жидкости в точке B имеет конечное, отличное от нуля значение, т. е. точка B является точкой возврата, дает систему двух уравнений

$$c_1^2 + 2c_1e_1' + d_1e_1' - d_2e_2' = 0; \quad 2c_1e_2' + d_1e_2' + d_2e_1' = 0. \tag{60}$$

Решаем ее относительно d_1 и d_2

$$d_1 = \frac{c_1^2 e_1' + 2c_1 (e_1'^2 + e_2'^2)}{e_1'^2 + e_2'^2}; \quad d_2 = \frac{c_1^2 e_2'}{e_1'^2 + e_2'^2}. \tag{61}$$

Как отмечено выше, точке b на плоскости z соответствует точка B, на плоскости Z. Зная координаты первой точки ($x_b = e_1'$; $y_b = 0$) можно по формулам (58) найти координаты второй

$$X_B = \frac{c_1^3 + c_1^2 (d_1 + e_1') + c_1 (d_1 e_1' + d_2 e_2')}{(c_1 + e_1')^2 + e_2'^2};$$

$$Y_B = \frac{c_1^2 (d_2 - e_2') + c_1 (d_2 e_1' - d_1 e_2')}{(c_1 + e_1')^2 + e_2'^2}. \tag{62}$$

Если точка B предполагается лежащей на оси абсцисс (см. рис. 4), то $Y_B = 0$, поэтому

$$c_1^2 (d_2 - e_2') + c_1 (d_2 e_1' - d_1 e_2') = 0 \tag{63}$$

или, внося сюда значения d_1 и d_2 по уравнениям (61),

$$\frac{c_1^2 e_2'}{e_1'^2 + e_2'^2} [(c_1 + e_1')^2 + e_2'^2] = 0. \tag{64}$$

Отсюда

$$e_2' = 0. \tag{65}$$

Наконец, из выражений (61) для d_1 и d_2 вытекает, что

$$d_1 = -\frac{c_1}{e_1'} (c_1 + 2e_1'); \quad d_2 = 0 \tag{66}$$

Таким образом, коэффициенты конформного преобразования

$$Z = \frac{z (z + d)}{z + e'}$$

в рассматриваемом случае вещественны, т. е.

$$d = d_1; \quad e' = e'_1. \tag{67}$$

Абсцисса точки B оказывается равной

$$X_B = -\frac{c_1^2}{e'} \tag{68}$$

и, следовательно, положительной, так как ниже будет показано, что $e' < 0$.

Итак, на плоскости Z получен профиль аэропланного крыла в виде алгебраической кривой с точкой возврата B, определяемой системой уравнений $(0 \leqslant \rho \leqslant 1)$

$$X = \frac{x^3 + xy^2 + (d + e') x^2 + (d - e') y^2 + de'x}{(x - e')^2 + y^2};$$

$$Y = \frac{y^3 + x^2 y + 2e'xy + de'y}{(x + e')^2 + y^2}; \tag{69}$$

$$x = c_1 \rho \mp b_2 \rho^{\frac{1}{2}} (1 - \rho)^{\frac{1}{2}};$$

$$y = \pm a_2 \rho^{\frac{1}{2}} (1 - \rho)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$d = -\frac{c_1}{e'} (c_1 + 2e'). \tag{70}$$

При мнимом значении параметра $c_2(b_2 \neq 0)$ полученный контур не будет симметричен относительно оси абсцисс.

Так как вне аэропланного крыла скорость жидкости всюду должна сохранять конечное, отличное от нуля, значение, то появляются ограничительные неравенства для параметров рассматриваемого конформного преобразования

$$c_1 + e' > 0; \quad c_1 + 2e' < 0. \tag{71}$$

Отсюда следует, что $e' < 0$.

При $b_2 \neq 0$ получаем профиль, отличный от профиля Н. Е. Жуковского. Рис. 7, *а* представляет этот новый профиль при следующих числовых данных

$$c_1 = 1; \; a_2 = 1{,}1; \; b_2 = 0{,}1;$$

$$e' = -0{,}55;$$

$$d = -\frac{c_1}{e'} \times$$

$$\times (c_1 + 2e') = -01{,}818.$$

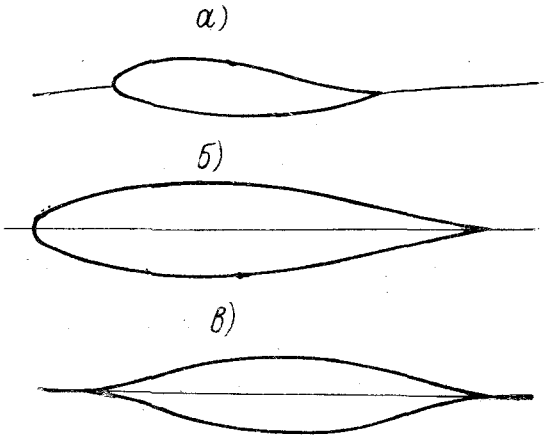


Рис. 7

Подбором числовых данных рассматриваемому профилю можно придать желаемый характер. Если $b_2 = 0$ и, следовательно, $c_2 = a_2$, ось абсцисс на плоскости z является осью симметрии эллипса. Получающийся на плоскости Z контур также будет симметричен относительно оси абсцисс. Его параметрическое уравнение

$$X = \frac{\rho\{\rho^2 c_1 (c_1^2 - c_2^2) + \rho[c_1 c_2^2 + d(c_1^2 - c_2^2) + e'(c_1^2 + c_2^2)] + c_2^2(d - e') + de'c_1\}}{\rho^2(c_1^2 - c_2^2) + \rho(2c_1 e' + c_2^2) + e'^2};$$

$$Y = -\frac{c_2 \rho^{\frac{1}{2}} (1-\rho)^{\frac{3}{2}} [\rho(c_1^2 - c_2^2) + c_1(c_1 + 2e')]}{\rho^2(c_1^2 - c_2^2) + \rho(2c_1 e' + c_2^2) + e'^2}, \tag{72}$$

где параметр ρ измеряется в пределах $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Наконец, случай $c_1 = c_2 = c$ соответствует на плоскости z кругу.

Таким образом, параметрическое уравнение (72) симметричного профиля в данном случае принимает вид

$$X = -\frac{\rho c^2 [e'(c + 2e')(1 - \rho) + (c + e')^2]}{e'[\rho c(c + 2e') + e'^2]};$$

$$Y = -\frac{c^2(c + 2e')\rho^{\frac{1}{2}}(1-\rho)^{\frac{3}{2}}}{\rho c(c + 2e') + e'^2}, \tag{73}$$

где

$$0 \leqslant \rho \leqslant 1.$$

На рис. 7, *б* показан симметричный профиль, соответствующий уравнению (72) с числовыми данными

$$c_1 = 1; \quad c_2 = 1{,}1; \quad e' = -0{,}55; \quad d = -\frac{c_1}{e'}(c_1 + 2e') = -0{,}1818.$$

Уравнение симметричного профиля получается и в рассмотренном выше первом варианте.

Симметричные профили рассматривались Н. Е. Жуковским, предложившим при соответствующем подборе значений параметров применять их для рулей. При этом Н. Е. Жуковский исходил из иного конформного преобразования.

Уравнения (72) позволяют перейти к симметричному профилю с двумя точками возврата A и B, если положить $d = 0$ и $c_1 + 2e' = 0$,

$$X = \frac{\rho\,[c_2^2 e' - \rho\,(\rho c_1 + e')\,(c_1^2 - c_2^2)]}{-e'^2 + \rho\,(1-\rho)\,(c_1^2 - c_2^2)};$$

$$Y = \frac{c_2 \rho^{\frac{3}{2}} (1-\rho)^{\frac{3}{2}} (c_1^2 - c_2^2)}{-e'^2 + \rho\,(1-\rho)\,(c_1^2 - c_2^2)}, \qquad (74)$$

где

$$0 \leqslant \rho \leqslant 1.$$

Этот профиль показан на рис. 7, *в* при следующих числовых данных:

$$c_1 = 1; \quad c_2 = 1{,}2; \quad e' = -\frac{1}{2}c_1 = -0{,}5.$$

Заключение. Рассматривая комбинацию конформных преобразований (5) и (36), **мы использовали конформное** преобразование (5) только для случая $n=2$, соответствующего на плоскости z алгебраическим кривым второго порядка (эллипс). Таким образом, другие случаи, представляющие практический интерес, остались неизученными. Например, случай $n = 4$, соответствующий на плоскости z алгебраическим кривым четвертого порядка, при специальном предположении $c_4(1, 3) = 0$ привел бы нас к сложному аэропланному крылу, которому на плоскости z соответствует контур, образованный двумя различными алгебраическими кривыми четвертого порядка с общей касательной в точке a.

Составные аэропланные крылья рассматривались С. А. Чаплыгиным [3, стр. 235—250], который предложил также использовать для контура аэропланных крыльев инверсию параболы и эллипса [3, стр. 205—245]. Вопрос о динамике движения аэропланного крыла в воздушной среде изложен также В. В. Голубевым [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Неронов Н. П. Об особенном случае безвихревого непрерывного движения в двух измерениях идеальной безграничной жидкости в присутствии неподвижного цилиндрического твердого тела. Математический сборник, 1931, т. 38, вып. 3—4, стр. 34.

2. Жуковский Н. Е. Теоретические основы воздухоплавания. Изд. II. Гостехиздат, 1925, стр. 142—146.

3. Чаплыгин С. А. Полное собрание сочинений, т. III. Подъемная сила составного крыла. Изд-во АН СССР, 1935.

4. Голубев В. В. Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке. Изд. II. Гостехиздат, 1938.

5. Kirchhoff G. Vorlesungen über mathematische Physik Mechanik, 1876, Vorl. 22.

6. Lamb N. Nydrodynamics, Cambridge, 1924, p. 79.