Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXVII, вып. 3, 1961 г.

РАСЧЕТ ВЕРОЯТНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ОБОГАЩЕНИЯ УГЛЕЙ

Б. М. Звягин

1. Параметры, определяющие результаты гравитационного обогащения мелкораздробленных углей. Раскрытие минералов, выходы и составы фракций, качество полученного концентрата зависят от степени дробления. Чем мельче дробится уголь, тем больше раскрытие минералов при дроблении, тем в большем количестве из угля выделяются пирит и минеральные примеси (или богатые ими сростки), тем лучше качество угля, полученного при гравитационном обогащении раздробленной массы.

Расчет содержания включений в дробленых частицах проводился методами статистики [1]. При этом предполагалось, что включения, содержащиеся в угле, являются протяженными, что они могут попасть в дробленую частицу как целиком, так и частично и что в дробленую частицу могут попасть отдельные куски от различных включений.

Выход и состав концентрата при гравитационном обогащении мелкораздробленного угля определяются двумя переменными [1]

$$A = y\left(\frac{k+1}{k}\right)^3 \text{ и } T = \frac{2y\,(3k^2+1)}{k^3}\,X,$$

где y — объемное содержание примеси в недробленом угле;

$k = \frac{\alpha}{\beta}$ — степень дробления (отношение среднего размера включения α к среднему размеру дробленой частицы β);

X — демаркационный объемный состав примеси в дробленой частице: частицы с объемным содержанием примеси меньше X попадут в концентрат, а больше X — в хвосты.

Обозначив удельный вес чистого беззольного угля через δ_y, удельный вес примеси через $\delta_{пр}$, удельный вес тяжелой жидкости через δ, получим

$$X = \frac{\delta - \delta_y}{\delta_{пр} - \delta_y}.$$

Установим пределы изменения переменных A и T. При изменении степени измельчения k от 0 до ∞ переменная A изменяется от $8y$ до y, Если предположить, что y изменяется от 0 до 50%, то переменная A изменяется от 0 до 4.

При $k = 1 T = 8yX$, при $k = \infty$ $T = 0$. Следовательно, переменная T изменяется от 0 до $8yX$. Даже в крайнем случае, когда $X = 1$, переменная T может изменяться в пределах от 0 до $8y$, т. е. от 0 до 4.

Для расчетов обогащения мелкораздробленных углей (на основании приведенных в специальных таблицах [5] данных для значения функции $i_2(x) = x^{-2} I_2(x)$) составлена таблица значений функции Бесселя второго порядка $I_2(x)$ от мнимого аргумента при x, изменяющемся от 0 до 4,09 через 0,01 [4].

2. Теоретический анализ результатов обогащения мелкораздробленных углей. Объемный выход концентрата при гравитационном обогащении [1]

$$W = e^{-y\left(\frac{k+1}{k}\right)^3} I_0\left(2\sqrt{\frac{2y(3k^2+1)}{k^3}X}\right), \qquad (1)$$

объемное содержание примеси в концентрате

$$\bar{x} = X\frac{I_2\left(2\sqrt{\frac{2y(3k^2+1)}{k^3}X}\right)}{I_0\left(2\sqrt{\frac{2y(3k^2+1)}{k^3}X}\right)}, \qquad (2)$$

где $I_2(x)$ и $I_0(x)$ — функции Бесселя второго и нулевого порядков от мнимого аргумента.

При $k \to \infty$, т. е. при очень мелком дроблении,

$$W \to e^{-y} I_0(0)$$

и, так как $I_0(0) = 1$, то

$$W \to e^{-y}.$$

Разлагая e^{-y} в ряд и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим

$$W = 1 - y,$$

а объемный выход хвостов

$$N = y,$$

что совпадает с результатом, даваемым теорией мелкого дробления [2, 3], и соответствует случаю полного разделения угля и примеси.

При $k = 1$

$$W = e^{-8y} I_0\left(2\sqrt{8yX}\right).$$

Приравняв производную W'_k нулю, получим, что W как функция от k есть функция с максимумом. Максимум имеет место при значении k, определяемом при каждых данных y и X из уравнения

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 I_0\left(2\sqrt{\frac{2y(3k^2+1)}{k^3}X}\right) = \frac{2X(k^2+1)}{k^2}\frac{I_1\left(2\sqrt{\frac{2y(3k^2+1)}{k^3}X}\right)}{\sqrt{\frac{2y(3k^2+1)}{k^3}X}}.$$

Это уравнение имеет решение не при всяких значениях y и X. При заданном y уравнение при некоторых X имеет решение и, следовательно, для этих значений X объемный выход концентрата W как функция от k есть функция с максимумом. При других значениях X уравнение решения не имеет и в этих случаях W как функция от k монотонно возрастает.

На рис. 1 изображена зависимость объемного выхода концентрата W от параметра $u_0 = \frac{k-1}{k+1}$, характеризующего степень измельчения для $y = 0{,}05$ при X, изменяющемся от 0 до 1 через 0,1. Так как $I_0(0) = 0$, то при $k \to \infty$ величина $\bar{x} = 0$, что также совпадает с результатом, даваемым ранее разработанной теорией мелкого дробления, согласно которой при $k \to \infty$ объемный состав хвостов $\bar{\bar{x}} = 1$, а так как при этом $W = 1 - y$, то из уравнения баланса

$$\bar{x}W + \bar{\bar{x}}(1 - W) = y$$

получим $\bar{x} = 0$. Это соответствует случаю полного разделения угля и примеси, имеющему место при очень мелком дроблении. В результате обогащения такого очень мелкораздробленного угля в концентрат попадает только чистый уголь без примеси, а вся примесь уйдет в хвосты.

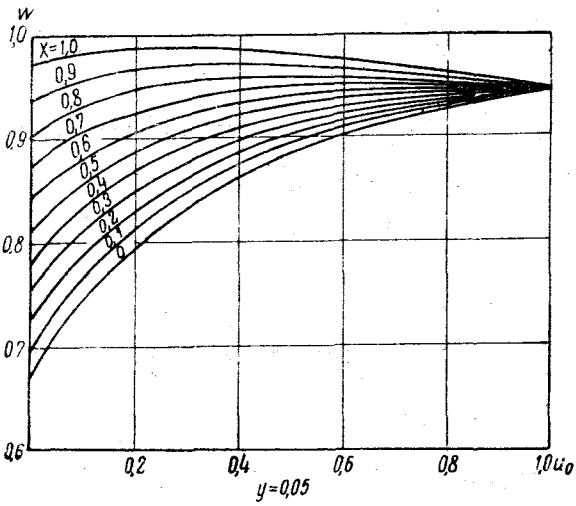


Рис. 1

При $k = 1$

$$\bar{x} = X\frac{I_2(2\sqrt{8yX})}{I_0(2\sqrt{8yX})}.$$

Производная

$$(\bar{x})_k' = -\frac{3X(k^2+1)}{I_0^2 k(3k^2+1)} \times$$

$$\times (I_1^2 - I_0 I_2) < 0.$$

При любых значениях параметров y, k и X численное значения выражения в скобках остается положительным и, следовательно, производная $(\bar{x})_k'$ отрицательна, т. е. с ростом k величина $\bar{x}$ убывает. Таким образом, при возрастании k от 1 до ∞ величина $\bar{x}$ убывает от значения $X\frac{I_2(2\sqrt{8yX})}{I_0(2\sqrt{8yX})}$ до нуля.

На рис. 2 показана зависимость объемного состава концентрата $\bar{x}$ от параметра u_0, характеризующего степень измельчения, для $y = 0{,}05$ при X, изменяющемся от 0 до 1 через 0,1.

При $X = 0$, когда удельный вес разделяющей жидкости равен удельному весу угольного вещества ($\delta = \delta_y$), в концентрат попадут только чисто угольные частицы. Выход и состав концентрата при этом

$$W = e^{-y\left(\frac{k+1}{k}\right)^3}; \quad \bar{x} = 0.$$

С увеличением X объемный выход концентрата W, согласно (1), возрастает, так как функция

$$I_0\left(2\sqrt{\frac{2y(3k^2+1)}{k^3}X}\right)$$

монотонно возрастает с увеличением аргумента

$$2\sqrt{\frac{2y\,(3k^2+1)}{k^3}}\,X,$$

а сам аргумент увеличивается при увеличении X. Это соответствует положению: с увеличением удельного веса разделяющей жидкости растет выход концентрата.

При $X = 1$, т. е. когда удельный вес разделяющей жидкости равен удельному весу примеси, в концентрат пападут все дробленые частицы, за исключением частиц, состоящих из чистой примеси. Действительно [1] при $X = 1$ получим

$$W = e^{-y\left(\frac{k+1}{k}\right)^3} \times$$

$$\times\, I_0\left(2\sqrt{\frac{2y\,(3k^2+1}{k^3}}\right),$$

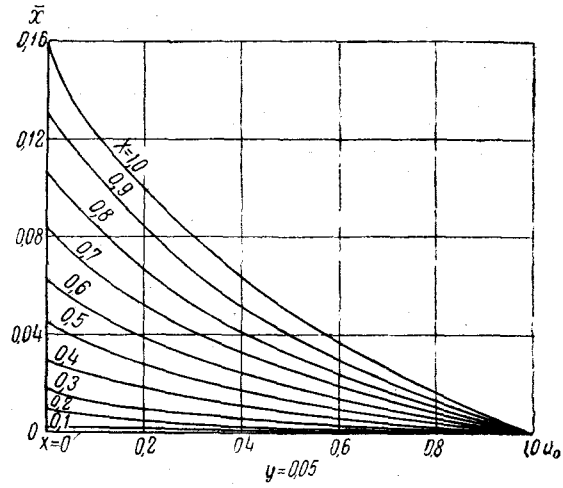


Рис. 2

или

$$W = 1 - N_1,$$

где N_1 — относительное число дробленых частиц, состоящих из чистой примеси [1].

Следовательно, при возрастании X от 0 до 1 объемный выход концентрата увеличивается от

$$e^{-y\left(\frac{k+1}{k}\right)^3}$$

до

$$e^{-y\left(\frac{k+1}{k}\right)^3} I_0\left(2\sqrt{\frac{2y\,(3k^2+1)}{k^3}}\right)$$

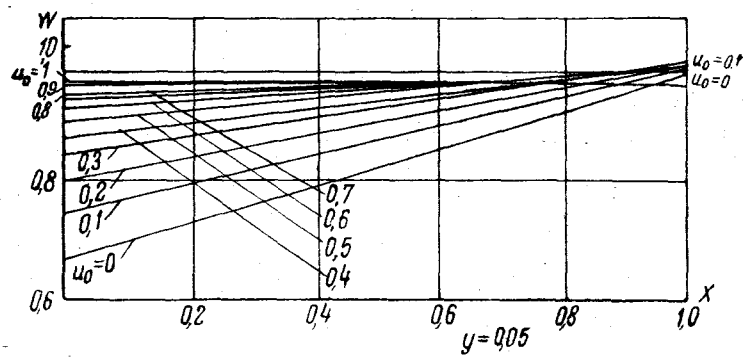


Рис. 3

при любых y и k. Зависимость W от X для $y = 0{,}05$ при u_0, изменяющемся от 0 до 1 через 0,1, приведена на рис. 3.

Покажем, что при возрастании X от 0 до 1, т. е. при возрастании удельного веса разделяющей жидкости от значения, равного удельному весу угольного вещества, до значения, равного удельному весу

примеси ,объемный состав концентрата монотонно возрастает при любых значениях y и k. Значение $\bar{x}$ определяется по формуле (2). Взяв производную от $\bar{x}$ по X и приравняв ее нулю, получим

$$I_1\left(2\sqrt{\frac{2y(3k^2+1)}{k^3}}X\right)=0.$$

Это условие выполнимо лишь при $X=0$, когда $\bar{x}=0$. Так как в этой точке не может быть экстремума, то объемный состав концентрата $\bar{x}$ изменяется монотонно с возрастанием X. Так как при $X=0$ $\bar{x}=0$, то это монотонное изменение может быть

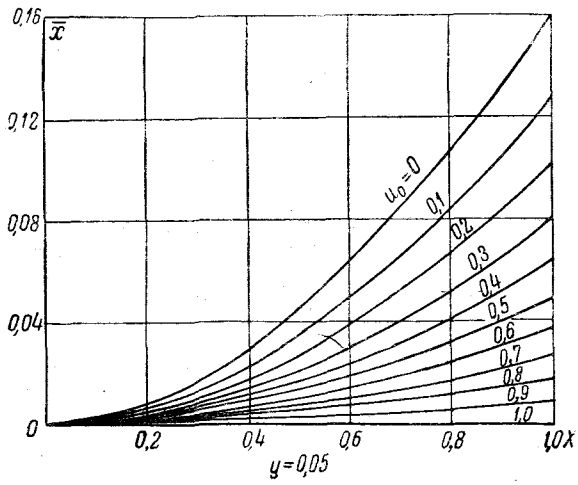


Рис. 4

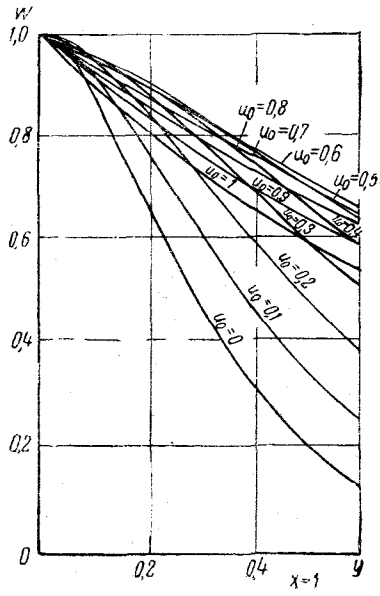


Рис. 5.

только возрастанием. Следовательно, при возрастании X от 0 до 1 объемный состав концентрата возрастает от 0 до

$$\frac{I_2\left(2\sqrt{\frac{2y(3k^2+1)}{k^3}}\right)}{I_0\left(2\sqrt{\frac{2y(3k^2+1)}{k^3}}\right)}$$

при любых значениях y и k. Зависимость $\bar{x}$ от X для $y=0{,}05$ при u_0, изменяющемся от 0 до 1 через 0,1, приведена на рис. 4.

При $y=0$ объемный выход концентрата $W=1$. С увеличением y выход концентрата уменьшается. Действительно производная от W по y равна

$$W_y'=e^{-y\left(\frac{k+1}{k}\right)^3}\left[-\left(\frac{k+1}{k}\right)^3 I_0+\sqrt{\frac{2(3k^2+1)}{yk^3}}XI_1\right].$$

При любых значениях параметров y, k и X численное значение выражения в скобках остается положительным и, следовательно, производная W_y' отрицательная, т. е. с ростом y величина W убывает. Зависимость W от y для $X=1$ при u_0, изменяющемся от 0 до 1 через 0,1, изображена на рис. 5.

При $y=0$ объемный состав концентрата $\bar{x}=0$. Производная

$$(\bar{x})_y'=\frac{X}{yI_0^2}(I_1^2-I_0I_2).$$

При любых значениях параметров y, k и X численное значение выражения в скобках остается положительным и, следовательно, производная $(\bar{x})'_y$ положительная, т. е. с ростом y величина $\bar{x}$ возрастает. На рис. 6 изображена зависимость x от y для $X = 1$ при u_0, изменяющемся от 0 до 1 через 0,1.

Выразим в явном виде объемный выход и объемный состав концентрата через параметр u_0, причем

$$u_0 = \frac{k-1}{k+1}, \quad k = \frac{1+u_0}{1-u_0}.$$

Тогда получим

$$W = e^{-\frac{8y}{(1+u_0)^3}} \times \times I_0\left(4\sqrt{\frac{2y(1-u_0^3)}{(1+u_0)^3}X}\right), \qquad (3)$$

$$\bar{x} = X\frac{I_2\left(4\sqrt{\frac{2y(1-u_0^3)}{(1+u_0)^3}X}\right)}{I_0\left(4\sqrt{\frac{2y(1-u_0^3)}{(1+u_0)^3}X}\right)}. \qquad (4)$$

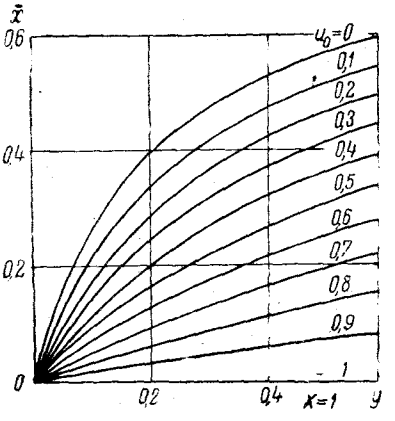


Рис. 6

Согласно формулам (3) и (4) вычислены объемный выход W и объемный состав $\bar{x}$ концентрата при различных y и u_0 при данном X [4]. Эти данные могут быть использованы для практических расчетов выходов и составов фракций при заданной степени измельчения, для угля данного состава при обогащении в жидкости определенного удельного веса.

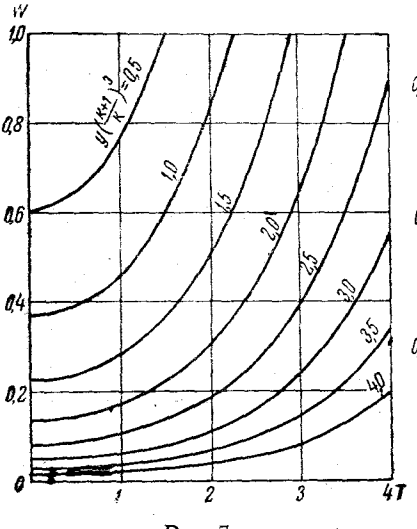


Рис. 7

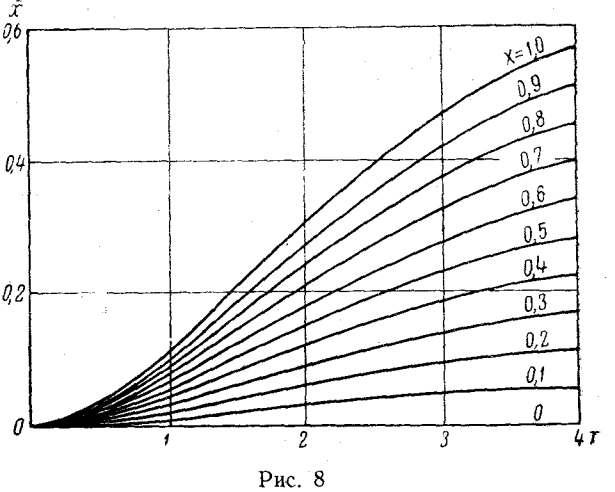


Рис. 8

Из формул (1) и (2) следует, что объемный выход концентрата может быть представлен как функция двух переменных

$$A = y\left(\frac{k+1}{k}\right)^3$$

Таблица 1

Значения W при различных $y\left(\frac{k+1}{k}\right)^3$ и T

$y\left(\frac{k+1}{k}\right)^3$										
0	$W=1$									
0,5	T	0	0,5	1,0	1,5					
	W	0,60653	0,6450	0,7679	0,9988					
1,0	T	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,24			
	W	0,36788	0,3912	0,4568	0,6058	0,8386	0,9959			
1,5	T	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	2,89		
	W	0,22313	0,2373	0,2825	0,3674	0,5086	0,7340	0,9967		
2,0	T	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	
	W	0,1353	0,1439	0,1714	0,2229	0,3085	0,4452	0,6606	0,9986	
2,5	T	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
	W	0,08209	0,08730	0,1039	0,1352	0,1871	0,2701	0,4007	0,6057	0,9278
3,0	T	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
	W	0,04979	0,05295	0,06304	0,08199	0,1135	0,1638	0,2430	0,3674	0,5627
3,5	T	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
	W	0,03020	0,03212	0,03824	0,04973	0,06884	0,09935	0,1474	0,2228	0,3413
4,0	T	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
	W	0,01832	0,01948	0,02320	0,03017	0,04176	0,06027	0,08492	0,1352	0,2071

и

$$T = 2\sqrt{\frac{2y\,(3k^2+1)}{k^3}}\,X.$$

Объемный состав концентрата может быть также представлен как функция двух переменных X и T. Вычисленный объемный выход концентрата как функция переменных A и T и объемный состав концентрата как функция переменных X и T представлены в табл. 1 и 2. По данным этих таблиц построены графики зависимости W от T при заданных значениях A (рис. 7) и x от T при заданных значениях X (рис. 8). Эти графики могут быть использованы для практических расчетов объемного выхода и объемного состава концентрата.

Таблица 2

Значения $\bar{x}$ при различных T и X

T	X									
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,5	0	0,00300	0,00600	0,00900	0,01200	0,01500	0,01800	0,02100	0,02400	0,02700	0,03001
1,0	0	0,01072	0,02144	0,03216	0,04288	0,05360	0,06432	0,07504	0,08576	0,09648	0,1072
1,5	0	0,02052	0,04104	0,06156	0,08208	0,10260	0,12312	0,14364	0,16416	0,18468	0,2052
2,0	0	0,03022	0,06044	0,09066	0,12088	0,15110	0,18132	0,21154	0,24176	0,27198	0,3022
2,5	0	0,03880	0,07760	0,11640	0,15520	0,19400	0,23280	0,27160	0,31040	0,34920	0,3880
3,0	0	0,04600	0,09200	0,13800	0,18400	0,23000	0,27600	0,32200	0,36800	0,41400	0,4600
3,5	0	0,05194	0,10388	0,15582	0,20776	0,25970	0,31164	0,36358	0,41552	0,46746	0,5194
4,0	0	0,05682	0,11364	0,17046	0,22728	0,28410	0,34092	0,39774	0,45456	0,51138	0,5682

3. **Порядок расчета обогащения мелкораздробленных углей.** Разработанная схема расчета обогащения мелкораздробленных углей дает возможность рассчитывать обогащение высокозагрязненных углей. Она значительно упрощает расчеты и делает их менее трудоемкими в отличие от ранее разработанной схемы. Рассмотрим порядок расчета обогащения мелкораздробленных углей по новой схеме на примере обеззоливания двухкомпонентной системы уголь — зола.

Пусть имеется уголь, содержащий 16,67% золы по весу, т. е. весовая доля золы $z_з = 0{,}1667$. Удельный вес золы $\delta_з = 2{,}25$, удельный вес чистого беззольного угля $\delta_у = 1{,}25$. Средний размер зольных включений $\alpha = 500\mu$. Все включения считаем имеющими практически близкие размеры.

Средний удельный вес системы уголь—зола рассчитывается по формуле

$$\delta_{ср} = \frac{1}{\frac{z_з}{\delta_з} + \frac{1 - z_з}{\delta_у}}. \qquad (5)$$

В нашем примере $z_з = 0{,}1667$ и $\delta_{ср} = 1{,}35$ $г/см^3$.

Поскольку при инженерных расчетах нас всегда интересует весовая доля золы z в угле, а формулы выражены через объемную долю y, то нужен дополнительный пересчет от весовой доли к объемной и обратно.

Объемная доля золы в угле рассчитывается по формуле

$$y = \frac{\delta_у z_з}{\delta_у z_з + \delta_з (1 - z_з)}. \qquad (6)$$

В нашем примере $y = 0{,}10$.

Дробление угля. Пусть исходный уголь дробится до частиц среднего размера $\beta = 250\mu$. Степень дробления $k = \frac{500}{250} = 2$ и параметр измельчения

$$u_0 = \frac{k-1}{k+1} = \frac{2-1}{2+1} = 0{,}333.$$

Относительная доля дробленых частиц, не содержащих зольных включений, вычисляется по следующей формуле [1] и в рассматриваемом случае равна

$$N_0 = e^{-0{,}10\left(\frac{2+1}{2}\right)^3} = e^{-0{,}3375} = 0{,}7132 = 71{,}32\%.$$

Относительная доля дробленых частиц, содержащих в той или иной степени золу, равна

$$N(0) = 1 - N_0 = 1 - 0{,}7132 = 0{,}2868 = 28{,}68\%.$$

Относительная доля дробленых частиц, состоящих из чистой золы, вычисляется по формуле [1]

$$N_1 = 1 - e^{-y\left(\frac{k+1}{k}\right)^3} I_0\left(2\sqrt{\frac{2y(3k^2+1)}{k^3}}\right) =$$

$$= 1 - 0{,}7132 I_0(1{,}14) = 1 - 0{,}7132 \cdot 1{,}3523 = 0{,}0355 = 3{,}55\%.$$

Следовательно, относительная доля сростков

$$0{,}2868 - 0{,}0355 = 0{,}2513 = 25{,}13\%.$$

Таким образом, баланс дробления будет следующий, %:

Беззольные дробленые частицы	71,32
Сростки	25,13
Чисто зольные частицы	3,55
	100,00

Обогащение в тяжелой жидкости. Пусть вся раздробленная масса помещена в жидкость удельного веса $\delta = 1{,}27$ *г/см*^{3}. В этом случае

$$X = \frac{1{,}27 - 1{,}25}{2{,}25 - 1{,}25} = 0{,}02.$$

Согласно уравнению (1) объемный выход концентрата

$$W = 0{,}7132 I_0(0{,}16) = 0{,}7132 \cdot 1{,}0064 = 0{,}718 = 71{,}8\%.$$

Объемный выход хвостов

$$N = 1 - W = 0{,}282 = 28{,}2\%.$$

Объемная доля золы в концентрате, согласно уравнению (2),

$$\overline{x} = 0{,}02 \cdot \frac{0{,}0032}{1{,}0064} = 0{,}000064 = 0{,}0064\%.$$

Значения $I_0(x)$ и $I_2(x)$ находим из таблиц функций Бесселя нулевого и второго порядков от мнимого аргумента.

Средний удельный вес концентрата, согласно уравнению (5), $\overline{\delta} = 1{,}25$ *г/см*^{3}.

Весовой выход концентрата

$$\bar{\gamma} = W \frac{\bar{\delta}}{\delta_{ср}}. \tag{7}$$

В нашем случае

$$\bar{\gamma} = 0{,}7178 \frac{1{,}25}{1{,}35} = 0{,}665 = 66{,}5\%.$$

Весовой вывод хвостов

$$\bar{\bar{\gamma}} = 1 - \bar{\gamma} = 0{,}335 = 33{,}5\%.$$

Формула (6) позволяет рассчитать объемную долю золы в угле по известной весовой доле. Обратный переход от объемной доли y к весовой доле z дается формулой

$$z_з = \frac{\delta_з y}{\delta_з y + \delta_у (1 - y)}. \tag{8}$$

Для нахождения весовой доли золы в концентрате надо в формуле (8) вместо y подставить объемное содержание золы в концентрате, т. е. $\bar{x}$. Тогда для весовой доли золы в концентрате получим

$$\bar{z} = \frac{2{,}25 \cdot 0{,}000064}{2{,}25 \cdot 0{,}000064 + 1{,}25 \cdot 0{,}999936} = 0{,}00012 = 0{,}012\%.$$

Весовую долю золы в хвостах $\bar{\bar{z}}$ получим из уравнения баланса

$$\bar{z}\bar{\gamma} + \bar{\bar{z}}\bar{\bar{\gamma}} = z, \tag{9}$$

где z — весовая доля золы в исходном угле. Отсюда

$$\bar{\bar{z}} = \frac{z - \bar{z}\bar{\gamma}}{\bar{\bar{\gamma}}},$$

и в нашем случае

$$\bar{\bar{z}} = \frac{0{,}1667 - 0{,}665 \cdot 0{,}00012}{0{,}335} = 0{,}497 = 49{,}7\%.$$

Итак, получены следующие результаты обогащения раздробленного угля в жидкости удельного веса $\delta = 1{,}27$ *г/см*³.

	Выход, %	Содержание золы, %
Концентрат . . .	66,5	0,012
Хвосты	33,5	49,7

Пусть вся раздробленная масса помещена в жидкость удельного веса $\delta = 1{,}35$ *г/см*³. В этом случае

$$X = \frac{1{,}35 - 1{,}25}{2{,}25 - 1{,}25} = 0{,}1,$$

и мы получим

$$W = 0{,}7132 I_0(0{,}36) = 0{,}7132 \cdot 1{,}0327 = 0{,}736 = 73{,}6\%;$$

$$\bar{x} = 0{,}1 \frac{0{,}01638}{1{,}0327} = 0{,}001586 = 0{,}2\%;$$

$$\bar{\delta} = 1{,}252;$$

$$\bar{\gamma} = 0{,}736 \frac{1{,}252}{1{,}35} = 0{,}682 = 68{,}2\%;$$

$$\bar{\gamma} = 31{,}8\%;$$

$$\bar{z} = 0{,}003 = 0{,}3\%;$$

$$\bar{\bar{z}} = \frac{0{,}1667 - 0{,}682 \cdot 0{,}003}{0{,}318} = 0{,}519 = 51{,}9\%.$$

Результаты обогащения раздробленного угля в жидкости удельного веса $\delta = 1{,}35$ *г/см*^{3} следующие:

	Выход, %	Содержание золы, %
Концентрат . . .	68,2	0,3
Хвосты	31,8	51,9

Выводы

1. Общая теория дробления и последующего гравитационного обогащения углей рассмотрена подробно для мелкого дробления. Исследована зависимость выхода и состава концентрата от степени измельчения, удельного веса разделения и от содержания примесей в угле.

2. Составлены таблицы для вычисления объемного выхода и объемного состава концентрата по степени измельчения, удельному весу разделения и объемному составу примеси в исходном угле. В таблицах выход и состав концентрата даны как функция переменных X, A и T. Построены соответствующие графики.

3. На конкретном примере обеззоливания системы уголь — зола показано, как предлагаемая теория может быть применена для расчета доли дробленых частиц, не содержащих зольных включений, доли дробленых частиц, состоящих из чистой золы и доли сростков, а также для расчетов выходов и составов фракций при обогащении в жидкости заданного удельного веса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Звягин Б. М. Общая теория и методы расчета результатов дробления горных пород и их последующего гравитационного обогащения. Записки ЛГИ, 1958, т. XXXVI, вып. 3.

3. Звягин Б. М., Розенбаум Р. Б., Тодес О. М., Юровский А. З. К теории дробления горных пород. I. О раскрытии зерен минералов при мелком дроблении. Известия АН СССР, ОТН, 1950, № 7.

3. Звягин Б. М., Розенбаум Р. Б., Тодес О. М., Юровский А. З. К теории дробления горных пород. II. Разделение частиц продуктов дробления на две фракции и вычисление среднего состава этих фракций. Известия АН СССР, ОТН, 1951, № 8.

4. Звягин Б. М. Теория и методы расчета раскрытия минералов при дроблении и гравитационном обогащении углей. Канд. диссертация. Фонды ИГД АН СССР, 1955.

5. British association for the advancement of science, mathematical tables. V. X Bessel functions. P. II. Cambridge, 1952.