Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова. т. XXXVII, вып. 3, 1961 г.

ЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВКЛЮЧЕНИЙ ПО РАЗМЕРАМ

О. М. Тодес, Б. М. Звягин

Определение размеров включений и функции их распространения по размерам в объеме минерала является важной для практики задачей. Так как в подавляющем большинстве минералы, содержащие включения, непрозрачны, то экспериментально измерить размеры включений не удается. Обычно измеряются размеры сечений включений на шлифе, и по картине на шлифе приходится судить об истинных размерах включений в минерале и о распределении включений по размерам.

Даже в простейшем случае, когда все включения являются шарами одинакового диаметра D, на шлифе наблюдаются кружки различных диаметров ($\Delta \leqslant D$). Если же размеры включений неодинаковы ($0 \leqslant D \leqslant Dm$) и подчинены какому-либо закону распределения в минерале, то на шлифе также получатся круги различных диаметров ($0 \leqslant \Delta \leqslant Dm$), причем закон распределения диаметров кругов на шлифе зависит от закона распределения диаметров включений в объеме.

При планиметрическом методе на шлифе измеряются диаметры (площади) различных круговых сечений и с помощью специальных математических методов пересчитывают и находят распределение включений в минерале.

При линейном методе в минерале проводится произвольная прямая (на шлифе) и измеряются длины отрезков, получающихся при пересечении этой прямой включений. Затем производят пересчет и по закону распределения длин отрезков на прямых находят закон распределения включений по размерам.

Задача разработки математического аппарата для подобных пересчетов ставилась и решалась рядом авторов [1, 2, 4, 5].

Нормировка функции распределения включений по размерам определяется поставленной задачей. Так, для гравитационного обогащения целесообразно рассматривать относительную долю включений различных размеров в объеме минерала (нормировка на единицу). Поэтому нами были разработаны методы определения функции распределения включений по размерам по известным функциям распределения диаметров сечений (площадей) на плоскости или отрезков на линии, причем последний метод оказался более удобным [3].

Для петрографических задач и в металлургии важно знать не только относительное, но и абсолютное число частиц различных размеров в единице объема. Нормировка функции распределения для этих случаев наиболее удачно решена Чен Кай-цзяном (Нанкинский универ-

ситет) [6], который исходил из экспериментального определения распределения и абсолютного числа сечений (планиметрический метод). Разработанный Чен Кай-цзяном метод достаточно строг, но громоздок. Так же, как и для гравитационного обогащения, здесь более целесообразен не планиметрический, а линейный метод. При этом экспериментально должно быть измерено распределение отрезков сечений включений прямой, проведенной в кристалле (на шлифе), рассчитанное на единицу длины этой прямой. По экспериментальным данным надо уметь рассчитать распределение включений в единице объема включающей фазы.

Рассмотрим случай включения сферической формы.

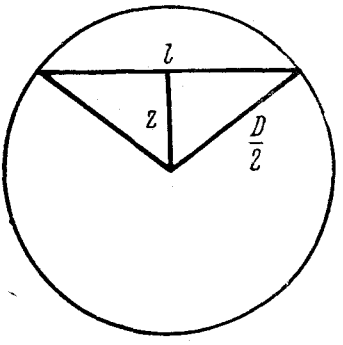


Рис. 1. Сечение шарового включения произвольной прямой

1. Все включения — шарики одинакового диаметра D. Проведем в кристалле прямую линию. В единице объема вероятность пересечь проведенной прямой включение равна $\frac{\pi D^2}{4} N_1$ (где N_1 — число включений в единице объема кристалла), причем единичный объем выбираем в виде кубика с ребром, равным единице, и гранью, перпендикулярной рассматриваемой прямой. Если расстояние секущей прямой от центра включения лежит в пределах от z до $z + dz$, то число сечений этой прямой включений с длинами от l до $l + dl$, рассчитанное на единицу длины проведенной прямой,

$$d\nu = \frac{2\pi z dz}{\frac{\pi D^2}{4}} \frac{\pi D^2}{4} N_1 = 2\pi N_1 z dz.$$

Так как (рис. 1)

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - l^2}$$

и

$$dz = \frac{l\,|dl|}{2\sqrt{D^2 - l^2}},$$

то

$$d\nu = \frac{\pi}{2} N_1 l dl. \qquad (1)$$

Число сечений с длиной меньше l, приходящееся на единицу длины проведенной прямой,

$$\nu = \frac{\pi}{2} N_1 \int_0^l l dl = \frac{\pi}{4} l^2 N_1. \qquad (2)$$

График зависимости ν от $\frac{\pi}{4} l^2$ изображен на рис. 2. Наклон прямой, даваемой этим графиком, определяет число включений в единице объема N_1. Отсюда для включений одинаковых размеров получаем удобный способ экспериментального определения N_1. Проводя на шлифе ряд прямых и произведя соответствующие замеры, строим график зависимости ν от $\frac{\pi}{4} l^2$ и находим $N_1 = \operatorname{tg}\alpha$.

2. Включения разных размеров с дифференциальной функцией распределения $\rho(D)$. Пусть $\rho(D)dD$ — число включений в единице объема,

имеющих диаметры в интервале от D до $D+dD$; $F(l)\,dl$ — число сечений с длинами сечений от l до $l+dl$ на единице длины сечения, так что $F(l)$ — дифференциальная функция распределения отрезков сечений на единице длины проведенной прямой. Тогда

$$F(l)\,dl = \int_{D>l} \rho(D)\,dD\,\frac{\pi}{2}\,l\,dl$$

и

$$F(l) = \frac{\pi}{2}\,l\int_{l}^{\infty}\rho(D)\,dD. \tag{3}$$

Это интегральное уравнение связывает распределение длин отрезков сечений на единицу длины сечения с распределением диаметров включений в единице объема.

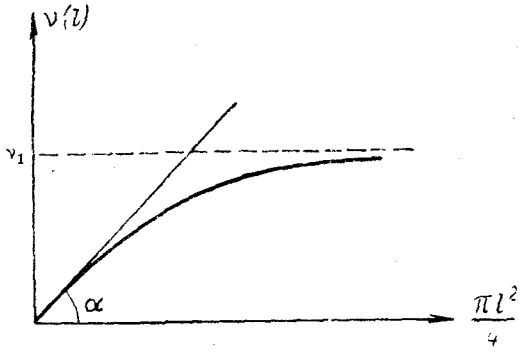


Рис. 2. Интегральная функция распределения длин отрезков для случая шариков одинакового диаметра

Заметим, что из (3) следует

$$\frac{2}{\pi}\frac{F(l)}{l} = \int_{l}^{\infty}\rho(D)\,dD.$$

есть убывающая функция с ростом l. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{2}{\pi}\frac{F(l)}{l} = -\int_{\infty}^{l}\rho(D)\,dD.$$

Продифференцируем обе части по l

$$\frac{2}{\pi}\frac{d}{dl}\left[\frac{F(l)}{l}\right] = -\rho(l).$$

Заменяя l на D, получаем решение интегрального уравнения (1) в виде

$$\rho(D) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{dD}\left[\frac{F(D)}{D}\right]. \tag{4}$$

Введем интегральную функцию распределения

$$N(D) = \int_{0}^{D}\rho(D)\,dD, \tag{5}$$

представляющую число включений в единице объема, диаметры которых не превышают данной величины D. Тогда полное число включений в единице объема

$$N_1 = N(\infty) = \int_{0}^{\infty}\rho(D)\,dD. \tag{6}$$

Интегрируя (4), получим

$$N(D) = \int_{0}^{D}\rho(D)\,dD = \frac{2}{\pi}\left[\lim_{D\to 0}\frac{F(D)}{D} - \frac{F(D)}{D}\right].$$

Введем интегральную функцию распределения по отрезкам $\nu(l)$. Тогда

$$F(l)=\frac{d\nu}{dl}$$

и

$$\frac{2}{\pi}\lim_{D\to 0}\frac{F(D)}{D}=\frac{2}{\pi}\lim_{D\to 0}\frac{1}{D}\frac{d\nu}{dD}=\frac{4}{\pi}\lim_{D\to 0}\frac{d\nu}{dD^2}=\lim_{D\to 0}\frac{d\nu}{d\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)}. \tag{7}$$

С другой стороны, из (3)

$$\lim_{D\to 0}\frac{F(D)}{D}=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \rho(D)\,dD$$

и, следовательно,

$$\frac{2}{\pi}\lim_{D\to 0}\frac{F(D)}{D}=\int_0^\infty \rho(D)\,dD=N_1. \tag{8}$$

Сопоставляя (7) и (8), получим

$$N_1=\lim_{D\to 0}\frac{d\nu}{d\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)}. \tag{9}$$

Имеем также

$$\frac{2}{\pi}\frac{F(D)}{D}=\frac{2}{\pi}\frac{1}{D}\frac{d\nu}{dD}=\frac{d\nu(D)}{d\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)}. \tag{10}$$

Таким образом, $\frac{2}{\pi}\frac{F(l)}{l}$ есть убывающая функция с ростом l. Из (10) очевидно, что если откладывать ν как функцию от $\frac{\pi}{4}l^2$, то это будет функция с монотонно убывающей производной (см. рис. 2).

Если ν_i — полное число отрезков сечений на единицу длины, то полное число включений в единице объема, согласно (9), измеряется тангенсом угла начального наклона этой кривой.

В случае включений одинаковых размеров соответствующий график является прямой линией, тангенс угла наклона которой равен числу частиц в единице объема N_1 (см. рис. 2). В случае же включений неодинаковых размеров графиком зависимости ν от $\frac{\pi}{4}l^2$ является кривая линия, причем N_1 численно измеряется тангенсом угла начального наклона этой кривой.

После того, как найдено N_1, находим

$$N(D)=N_1-\frac{d\nu(D)}{d\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)}. \tag{11}$$

Легко доказать, что относительная доля отрезков на линии шлифа равна относительной доле объема, занятого включениями. Действительно,

$$\int_0^\infty lF(l)\,dl=\frac{\pi}{2}\int_{l=0}^\infty l^2dl\int_{D=l}^\infty \rho(D)\,D=\frac{\pi}{2}\int_{D=0}^\infty \rho(D)\,dD\int_{l=0}^D l^2dl=$$

$$=\int_{D=0}^\infty \frac{\pi D^3}{6}\rho(D)\,dD=\int_{D=0}^\infty \frac{\pi D^3}{6}\,dN=\gamma. \tag{12}$$

Область интегрирования на рис. 3 покрыта штриховкой. Таким образом, относительная доля объема, занятого включениями,

$$\gamma = \int_0^\infty lF(l)\,dl = \int_0^\infty l\,d\nu.$$

Фактически интегрирование производится не до бесконечности, а до $l_m = L = D_m$. Интегрируя по частям, получим

$$\gamma = \int_0^L l\,d\nu = l\nu\Big|_0^L - \int_0^L \nu\,dl = \nu_1 L - \int_0^L \nu\,dl = \int_0^L (\nu_1 - \nu)\,dl. \qquad (13)$$

Зависимость ν от l находим экспериментально, проводя на шлифе прямые линии и измеряя отрезки сечения этими прямыми включений.

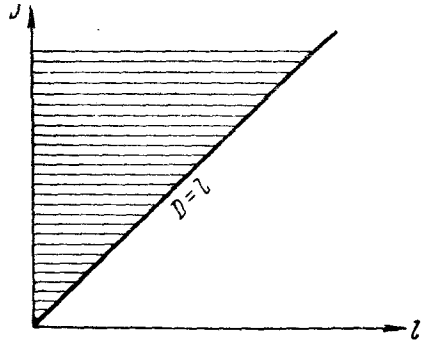


Рис. 3. Область интегрирования для уравнения (12)

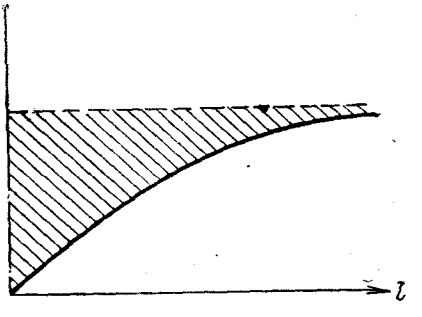


Рис. 4. Примерная зависимость ν от l для полидисперсных включений

Если графически изобразить экспериментально найденную зависимость ν от l (рис. 4), то на этом графике, согласно (13), заштрихованная площадь будет численно равна относительной доле объема, занятого включениями γ.

Таким образом, определив экспериментально зависимость ν от l и изобразив эту зависимость графически, можно: 1) найти полное число включений в единице объема N_1, согласно (9); 2) зная N_1 и применяя графическое дифференцирование, найти, согласно (11), численное значение функции $N(D)$ при различных D; 3) получив из экспериментальных данных ν_1, найти, согласно (13), относительную долю объема, занятого включениями.

Изложенный метод сравнительно прост, требуемые операции легко выполняются. Этот метод не требует знания аналитической зависимости для экспериментальной функции $\nu(l)$, и можно ограничиться табличным и графическим ее заданием.

Заключение

На основании статистического анализа дано решение проблемы нахождения распределения включений по размерам по данным измерений на шлифе. Получено аналитическое решение при упрощающем предположении о чисто сферической форме включений. Решение найдено для линейного метода, при котором измеряются длины отрезков пересечений включений произвольной прямой. Этот метод и теоретически и экспериментально проще планиметрического. Он позволяет также найти полное число включений в единице объема и относительную долю объема, занятого включениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавский А. М. Юбилейный сборник института Механобр, 1935, стр. 29—36.
2. Салтыков С. А. Введение в стереометрическую металлографию. Ереван, 1950.
3. Тодес О. М., Звягин Б. М. и Богорад Е. А. О петрографическом методе определения истинных размеров включений. Известия высших учебных заведений «Горный журнал», 1958, № 4.
4. Huber A. Z. f. Phys., 1935, N 3—4, S. 227.
5. Scheil E. Z. f. Metallkunde, 1935, N 9, S. 199.
6. Cheng Kai-chia, Acta physica sinica, 1957, N 1, p. 58—68.