Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXVII, вып. 3, 1961 г.

К ТЕОРИИ СТОХАСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПАРАМЕТРОВ ВКРАПЛЕНИЙ

М. Л. Вержбинский

Введение

1. Во многих исследованиях оказывается необходимым располагать сведениями о законах распределения геометрических характеристик (размер, форма и т. п.) вкраплений, содержащихся в массе твердого вещества. Однако часто непосредственно измерение зерен, представляющих собой вкрапления, не осуществимо, так как механическое отделение их от связывающей среды без существенных повреждений оказывается невозможным (например, для электрокорунда [1]. Между тем можно высказать косвенное суждение о распределении геометрического параметра зерна по экспериментально найденным распределениям некоторых параметров плоских сечений вкраплений, наблюдаемых в шлифе.

В статье при известных исходных допущениях строится математическая теория перехода от заданных распределений параметров сечения к соответствующим распределениям параметров пространственного зерна.

Близкими вопросами в разное время и с разных позиций занимались многие исследователи. Интересные результаты получены А. М. Журавским [2], А. А. Глаголевым [3] и другими [9—15].

2. В предлагаемой работе изучаются только случаи, когда вкрапления имеют форму эллипсоидов. Средняя полуось l эллипсоидального зерна рассматривается как случайная величина, подчиненная некоторому закону распределения $P(l)$. Отношения μ и λ средней полуоси к двум другим ($\mu \leqslant 1$, $\lambda \geqslant 1$) — также случайные величины, законы распределения которых обозначены через $P_1(\mu)$ и $P_2(\lambda)$. Параметры μ и λ называются параметрами формы.

Величина $2l$ представляет собой то из трех измерений зерна, которое определяет возможность его проникновения через отверстие данного диаметра (ситовый анализ). Параметр l называется контрольным параметром зерна.

Случайные величины l, μ, λ в общем случае нельзя считать независимыми. Однако мыслимы модели, в которых эти параметры суть независимые величины. В настоящей статье исследуются только такие модели.

Предполагается, что центры зерен расположены в веществе произвольно. Ориентировка каждого зерна в пространстве подчинена закону

равной вероятности; это значит, что любая ось, проходящая через центр вкрапления и жестко с ним связанная, с равной вероятностью может пройти через любую точку неподвижной сферы с центром в центре зерна.

3. Плоскость шлифа является случайной плоскостью, пересекающей некоторое множество зерен. В качестве параметров сечений вкраплений, имеющих, как легко видеть, форму эллипсов, принимаются их полуоси: малая σ и большая ρ.

Так как из трех параметров, характеризующих эллипсоидальное зерно, наибольшее значение для приложений имеет параметр l, задача сводится к нахождению функции распределения $P(l)$ по экспериментально наблюденным функциям распределения параметров сечения σ и ρ или одного из них.

Функцию $P(l)$ строим, применяя метод характеристических функций, что требует предварительного нахождения выражений значений моментов параметра l через моменты параметров сечений.

Вместо того чтобы рассматривать сечения множества зерен одной случайной плоскостью, можно вести исследование путем изучения одного зерна и всевозможных его сечений разными плоскостями, считая, что параметры зерна являются независимыми случайными величинами, подчиненными своим законам распределения. Эта новая трактовка становится возможной благодаря тому, что моменты суть математические ожидания степеней случайной величины, а математическое ожидание суммы (сечение одной плоскостью многих зерен) равно сумме математических ожиданий слагаемых (сечение одного зерна многими плоскостями).

4. В первом пункте настоящей статьи содержатся вспомогательные предложения, касающиеся вопроса о нахождении элементов эллипса, получающегося при пересечении эллипсоида плоскостью.

Второй пункт посвящен исследованию связи между моментами контрольного параметра l и параметрами сечений σ и ρ или некоторыми функциями от них (например, $S=\pi\sigma\rho$ — площади сечения).

В третьем пункте решается основная задача настоящей статьи — восстановление закона распределения $P(l)$ контрольного параметра зерна по известному закону распределения параметра сечения. Задача решается для зерен, имеющих форму эллипсоидов вращения, что позволяет опираться только на распределение $f(\sigma)$ малой полуоси сечения.

В заключении рассматривается вопрос об условиях единственности распределения $P(l)$, отвечающего заданному распределению $f(\sigma)$.

1. Плоские сечения эллипсоида

1. Рассмотрим эллипсоид с полуосями l, μl, λl, где $\mu \leqslant 1$, $\lambda \geqslant 1$ (рис. 1).

Пусть орты прямоугольной системы координат $X_1X_2X_3$, оси которой совпадают с осями эллипса, будут обозначены

$$\boldsymbol{e}_1=(1,\ 0,\ 0),\ \boldsymbol{e}_2=(0,\ 1,\ 0),\ \boldsymbol{e}_3=(0,\ 0,\ 1).$$

Введем другую систему прямоугольных координат с тем же началом и ортами

$$\boldsymbol{e}_1'=(\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \alpha_{13}),\ \boldsymbol{e}_2'=(\alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \alpha_{23}),$$
$$\boldsymbol{e}_3'=(\alpha_{31},\ \alpha_{32},\ \alpha_{33}).$$

Очевидно соотношение

$$\sum_{k=1}^{3}\alpha_{ik}\alpha_{jk}=\begin{cases}1 & \text{для } j=i\\ 0 & \text{для } j\neq i.\end{cases} \qquad (1)$$

Обозначив через x_1, x_2, x_3 и через x_1', x_2', x_3' координаты точки в пространстве соответственно в первой и второй системе координат, получим

$$x_i = x_1'\alpha_{1i} + x_2'\alpha_{2i} + x_3'\alpha_{3i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Тогда уравнение эллипсоида в системе $X_1'X_2'X_3'$ будет иметь вид

$$(\boldsymbol{A}_1x_1' + \boldsymbol{A}_2x_2' + \boldsymbol{A}_3x_3')(\boldsymbol{A}_1x_1' + \boldsymbol{A}_2x_2' + \boldsymbol{A}_3x_3') = l^2, \tag{3}$$

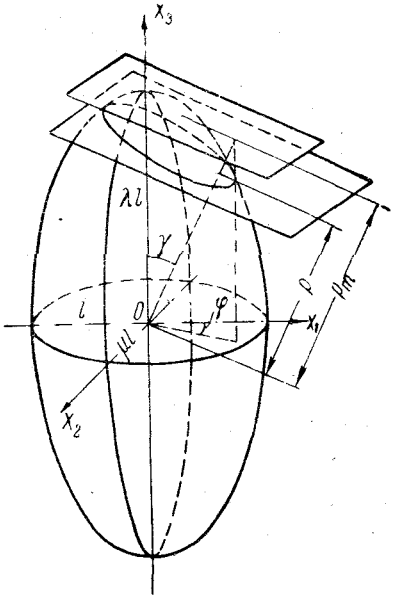


Рис. 1

где умножение скобок — скалярное, а векторы A_i определены соотношением

$$\boldsymbol{A}_i = \alpha_{i1}\boldsymbol{e}_1 + \mu'\alpha_{i2}\boldsymbol{e}_2 + \lambda'\alpha_{i3}\boldsymbol{e}_3, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Здесь и ниже принято

$$\mu' = \frac{1}{\mu} \geqslant 1, \quad \lambda' = \frac{1}{\lambda} \leqslant 1.$$

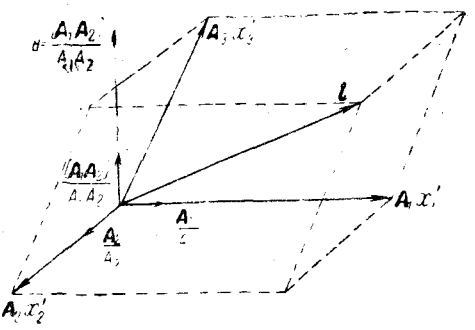


Рис. 2

Из выражения (3) вытекает

$$\boldsymbol{A}_1x_1' + \boldsymbol{A}_2x_2' + \boldsymbol{A}_3x_3' = \boldsymbol{l}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{l}$ — вектор, имеющий величину l и направленный по диагонали параллелепипеда, построенного на векторах (рис. 2)

$$\boldsymbol{A}_1x_1', \quad \boldsymbol{A}_2x_2', \quad \boldsymbol{A}_3x_3'.$$

Пусть плоскость, пересекающая эллипсоид, будет параллельна плоскости $X_1'X_2'$. Ее нормаль имеет фиксированную величину $x_3' = p$ и фиксированные направляющие косинусы α_{31}, α_{32}, α_{33}. Уравнение сечения эллипсоида этой плоскостью

$$\boldsymbol{A}_1x_1' + \boldsymbol{A}_2x_2' + \boldsymbol{A}_3p = \boldsymbol{l}. \tag{6}$$

Здесь вектор $\boldsymbol{l}$ (см. рис. 2) описывает конус с вершиной в центре зерна, с осью, направленной нормально к плоскости векторов $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$, и высотой H, равной высоте параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{A}_1x_1'$, $\boldsymbol{A}_2x_2'$, $\boldsymbol{A}_3p$ (основание в плоскости векторов $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$).

Пусть α_{ik} (i, $k = 1, 2, 3$) выбраны так, чтобы векторы $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ были взаимно-ортогональными. Это обеспечивается условием

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2) = \alpha_{11}\alpha_{21} + \mu'^2\alpha_{12}\alpha_{22} + \lambda'^2\alpha_{13}\alpha_{23} = 0. \tag{7}$$

Тогда

$$\boldsymbol{l} = H\left[\frac{\boldsymbol{A}_1}{A_1}\frac{\boldsymbol{A}_2}{A_2}\right] + \boldsymbol{B}, \tag{8}$$

где

$$\boldsymbol{B}=\sqrt{l^2-H^2}\left(\frac{\boldsymbol{A}_1}{A_1}\cos\varphi+\frac{\boldsymbol{A}_2}{A_2}\sin\varphi\right);$$

$$H=\frac{p}{\mu\lambda A_1 A_2} \tag{9}$$

(φ — угол между $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{B}$).

Из выражений (6), (8) и (9) вытекает

$$\boldsymbol{A}_1 x_1' + \boldsymbol{A}_2 x_2' + \boldsymbol{A}_3 p = \frac{p}{\mu\lambda A_1^2 A_2^2}[\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2] +$$

$$+\sqrt{l^2-\frac{p^2}{\mu^2\lambda^2 A_1^2 A_2^2}}\left(\frac{\boldsymbol{A}_1}{A_1}\cos\varphi+\frac{\boldsymbol{A}_2}{A_2}\sin\varphi\right). \tag{10}$$

Если обе части (10) скалярно помножить на $\boldsymbol{A}_1$ или на $\boldsymbol{A}_2$, получим параметрические уравнения (параметр φ) эллипса, лежащего в рассматриваемом сечении. Из этих уравнений, во-первых, следует, что полуоси сечения представляются

$$a_i=\frac{1}{A_i}\sqrt{l^2-\frac{p^2}{\mu^2\lambda^2 A_1^2 A_2^2}},\quad i=1,\ 2, \tag{11}$$

во-вторых, при выбранном направлении нормали секущей плоскости значение p, при котором сечение существует, должно удовлетворять неравенствам

$$0\leqslant p\leqslant l\mu\lambda A_1 A_2. \tag{12}$$

2. Чтобы решить, какое из чисел a_1 или a_2 есть меньшая полуось сечения и какое — большая, надо, как это видно из (11), сравнить величины A_1 и A_2. Очевидно, меньшая полуось соответствует большей из этих величин.

Выразим компоненты орта $\boldsymbol{e}_2' = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23})$ через компоненты орта $\boldsymbol{e}_1' = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})$. Для этого рассмотрим систему уравнений, составленную из тех уравнений (1), в которые не входят компоненты вектора $\boldsymbol{e}_3' = (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33})$ и уравнение (7). Эта система дает

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{21}^2&=\frac{(\mu'^2-\lambda'^2)\,\alpha_{12}^2\alpha_{13}^2}{(\mu'^2-\lambda'^2)^2\alpha_{12}^2\alpha_{13}^2+(\lambda'^2-1)^2\alpha_{13}^2\alpha_{11}^2+(\mu'^2-1)^2\alpha_{11}^2\alpha_{12}^2};\\
\alpha_{22}^2&=\frac{(\lambda'^2-1)^2\alpha_{13}^2\alpha_{11}^2}{(\mu'^2-\lambda'^2)^2\alpha_{12}^2\alpha_{13}^2+(\lambda'^2-1)^2\alpha_{13}^2\alpha_{11}^2+(\mu'^2-1)^2\alpha_{11}^2\alpha_{12}^2};\\
\alpha_{23}^2&=\frac{(\mu'^2-1)^2\alpha_{11}^2\alpha_{12}^2}{(\mu'^2-\lambda'^2)^2\alpha_{12}^2\alpha_{13}^2+(\lambda'^2-1)^2\alpha_{13}^2\alpha_{11}^2+(\mu'^2-1)^2\alpha_{11}^2\alpha_{12}^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Если ввести обозначения

$$\alpha_{11}^2=x,\quad \alpha_{12}^2=y,\quad \alpha_{13}^2=z,$$

где x, y, z окажутся связанными соотношением

$$x+y+z=1, \tag{14}$$

то будет справедливо

$$A_1^2-A_2^2=[(\mu'^2-1)\,y+(\lambda'^2-1)\,z]\times$$
$$\times\frac{(\mu'^2-\lambda'^2)^2\,yz+(\lambda'^2-1)^2\,zx+(\mu'^2-1)^2\times}{\times\,xy-(\mu'^2-1)(\lambda'^2-1)\,x}{(\mu'^2-\lambda'^2)^2\,yz+(\lambda'^2-1)^2\,zx+(\mu'^2-1)^2\,xy}. \tag{15}$$

Так как x, y, z не отрицательны и не могут одновременно равняться нулю и $\mu' \geqslant 1$, $\lambda \leqslant 1$, дробь в правой части (15) — положительна. Если $\mu' = 1$ (случай эллипсоида вращения), эта дробь будет положительной и при $\lambda' > 1$. Следовательно, знак разности $A_1^2 - A_2^2$ совпадает со знаком линейной формы

$$(\mu'^2 - 1)\, y - (1 - \lambda'^2)\, z. \tag{16}$$

Если эту форму приравнять нулю, получим *линию круговых сечений*, т. е. линию, каждая точка которой определяет квадраты таких компонентов орта e_1', при которых сечение эллипсоида будет круговым. Уравнение линии круговых сечений имеет вид

$$z = \frac{\mu'^2 - 1}{1 - \lambda'^2}\, y \quad \text{или} \quad z = \frac{(1 - \mu^2)\,\lambda}{(\lambda^2 - 1)\,\mu}\, y. \tag{17}$$

Примечание. Для случая эллипсоида вращения ($\mu' = \mu = 1$) уравнение линии круговых сечений будет $z = 0$. Так как $z = \alpha_{13}^2$, круговые сечения появляются в плоскостях, перпендикулярных оси X_3. Результат остается верным и для случая $\lambda > 1$, т. е. как для вытянутых, так и для сплюснутых по полюсам эллипсоидов вращения.

Так как $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ и $y + z \leqslant 1$, нас интересует только тот участок линии круговых сечений, который налагается на прямоугольный треугольник $\triangle$, построенный как на катетах на ортах осей y и z (рис. 3).

Совокупность треугольника $\triangle$ и лежащего на нем отрезка линии круговых сечений назовем *диаграммой сечений*. Для любой точки диаграммы сечений определяются величины x, y, z (см. рис. 3). Если точка лежит на гипотенузе $\triangle$, то $x = 0$, если на катетах — соответственно $y = 0$ или $z = 0$.

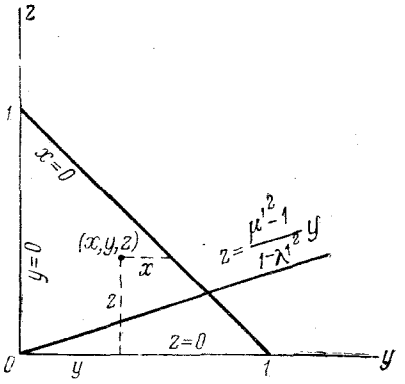


Рис. 3

Сопоставляя сформулированный выше критерий распознания полуосей сечения и соображения о совпадении знака разности $A_1^2 - A_2^2$ и формы (16), приходим к заключению: если точка на диаграмме сечений лежит выше (ниже) линии круговых сечений, то a_1 есть бо́льшая (меньшая), а a_2 — меньшая (бо́льшая) полуось сечения.

Замечание. Так как для случая эллипсоида вращения ($\mu = 1$, $\lambda \lessgtr 1$) уравнение линии круговых сечений есть $z = 0$, то всякая точка на диаграмме сечений расположена не ниже линии круговых сечений. Следовательно, для эллипсоида вращения величина a_2 *всегда* является меньшей полуосью.

3. Исследуем изменение направления нормали к плоскости сечения (орт e_3') при движении точки (x, y, z) по диаграмме сечений.

Обозначим знаменатель правых частей в выражениях α_{21}^2, α_{22}^2, α_{23}^2 [формулы (13)] через τ^2.

В условиях ортогональности ортов e_1' и e_2' имеем

$$\alpha_{21} = -\frac{\mu'^2 - \lambda'^2}{\tau}\,\alpha_{12}\alpha_{13}, \quad \alpha_{22} = \frac{1 - \lambda'^2}{\tau}\,\alpha_{13}\alpha_{11},$$

$$\alpha_{23} = \frac{\mu'^2 - 1}{\tau}\,\alpha_{11}\alpha_{12}. \tag{18}$$

Учитывая, что $\boldsymbol{e}_3' = [\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2']$, получим

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{31} &= \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} = \frac{\alpha_{11}}{\tau}\left((\mu'^2 - 1)\,\alpha_{12}^2 - (1 - \lambda'^2)\,\alpha_{13}^2\right), \\
\alpha_{32} &= \begin{vmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{11} \\ \alpha_{23} & \alpha_{21} \end{vmatrix} = -\frac{\alpha_{12}}{\tau}\left(\mu'^2 - \lambda'^2\right)\alpha_{13}^2 + (\mu'^2 - 1)\,\alpha_{11}^2), \\
\alpha_{33} &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \frac{\alpha_{13}}{\tau}\left((1 - \lambda'^2)\,\alpha_{11}^2 + (\mu'^2 - \lambda'^2)\,\alpha_{12}^2\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Стохастическая задача, которая будет решаться в последующих параграфах, нуждается в том, чтобы направление нормали к плоскости сечения определялось в системе координат $X_1X_2X_3$ (рис. 4) углом процессии γ (угол между $\boldsymbol{e}_3'$ и $\boldsymbol{e}_3$) и азимутом φ (угол между плоскостью ортов $\boldsymbol{e}_3'$, $\boldsymbol{e}_3$ и плоскостью ортов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3$).

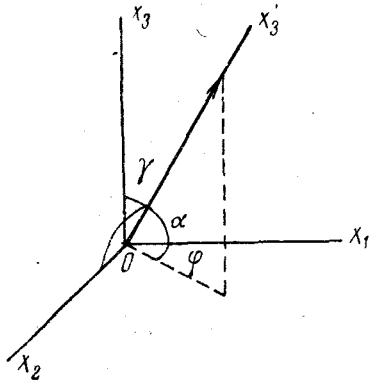


Рис. 4

Очевидные соотношения

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{31} &= \sin\gamma\cos\varphi, \\
\alpha_{32} &= \sin\gamma\sin\varphi, \\
\alpha_{33} &= \cos\gamma.
\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Выясним, в каких соотношениях должны находиться параметры φ и γ, чтобы точка (x, y, z) лежала выше или ниже линии круговых сечений. Путем несложных выкладок получаем, что для всякого положения точки на диаграмме сечений соответствующие ей значения азимута и прецессионного угла удовлетворяют условиям

$$\sin^2\gamma\left((\mu'^2 - 1)(1 - h)(h(1 - \lambda'^2) - (\mu'^2 - 1))\sin^2\varphi + \right.$$
$$\left. + (h(1 - \lambda'^2) + (\mu'^2 - 1)^2) = h(h(1 - \lambda'^2) + (\mu'^2 - 1)^2\right), \qquad (21)$$

$$-\frac{h(1-h)(h - \sin^2\gamma)}{(1-h^2)(1-\lambda'^2) - (\mu'^2 - \lambda'^2)\cos^2\gamma} \leqslant h \leqslant 1 -$$
$$-\frac{(\mu'^2 - \lambda'^2)\,h(1-h)(h - \sin^2\gamma)}{(\mu'^2 - 1)\left((1-h^2)(1-\lambda'^2) - (\mu'^2 - \lambda'^2)\cos^2\gamma\right)}. \qquad (22)$$

Соотношения между φ и γ, характерные для положения точки x, y, z) выше или ниже линии круговых сечений, получаются из (21) и (22) в зависимости от выбора знака h.

Чтобы по данным величинам азимута φ, прецессионного угла γ и нормали p вычислить полуоси сечения a_1 и a_2, необходимо найти выражения A_1 и A_2 через φ и γ. Для этого надо решить систему (19) относительно α_{11}, α_{12}, α_{13}. В общем виде выражения α_{11}, α_{12}, α_{13} через φ и γ чрезвычайно громоздки. Упрощения получаются в двух случаях: если рассматривать эллипсоид вращения или если для трехосного эллипсоида в качестве наблюдаемой в шлифе величины брать не полуоси сечения, а его площадь S. В последнем случае

$$S = \pi a_1 a_2 = \frac{\mu\lambda\pi}{\sqrt{\alpha_{31}^2 + \mu^2\alpha_{32}^2 + \lambda^2\alpha_{33}^2}}\left(l^2 - \frac{p^2}{\alpha_{31}^2 + \mu^2\alpha_{32}^2 + \lambda^2\alpha_{33}^2}\right) \qquad (23)$$

или на основании выражения (20)

$$S = \frac{\mu\lambda\pi}{\sqrt{\sin^2\gamma\cos^2\varphi + \mu^2\sin^2\gamma\sin^2\varphi + \lambda^2\cos^2\gamma}} \times$$

$$\times\left(l^2 - \frac{p^2}{\sin^2\gamma\cos^2\varphi + \mu^2\sin^2\gamma\sin^2\varphi + \lambda^2\cos^2\gamma}\right). \qquad (24)$$

Соответственно формула (12), дающая границы изменения p, преобразуется

$$0 \leqslant p \leqslant l\sqrt{\sin^2\gamma\cos^2\varphi + \mu^2\sin^2\gamma\sin^2\varphi + \lambda^2\cos^2\gamma}. \qquad (25)$$

Таким образом, если в качестве наблюдаемой в шлифе величины рассматривать S, отпадает необходимость распознания полуосей сечения. Благодаря этому становится несущественным вопрос о положении точки (x, y, z) на диаграмме сечений и углы φ и γ могут независимо изменяться в пределах своих естественных границ.

Если зерно — эллипсоид вращения ($\mu = 1$, $\lambda \gtrless 1$), малая полуось равна

$$\sigma = \sqrt{l^2 - \frac{p^2}{\sin^2\gamma + \lambda^2\cos^2\gamma}}. \qquad (26)$$

Легко найти геометрическое объяснение тому, что σ для эллипсоида вращения не зависит от азимута нормали плоскости сечения. В рассматриваемом случае (так же как и в предыдущем) азимут и прецессионный угол нормали секущей плоскости изменяются в своих естественных границах. Границы изменения p по-прежнему определяются неравенствами (12), которые в данном случае могут быть записаны в форме

$$0 \leqslant p \leqslant l\sqrt{\sin^2\gamma + \lambda^2\cos^2\gamma}. \qquad (27)$$

2. Связь между моментами параметров зерна и сечения

1. Величину, наблюдаемую в шлифе (σ, ρ или S), обозначим символом w.

Пусть границы изменения параметров l, μ, λ эллипсоидального зерна будут

$$L_1 \leqslant l \leqslant L_2, \quad M_1 \leqslant \mu \leqslant M_2, \quad \Lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda_2.$$

Тогда

$$\int_{L_1}^{L_2} P(l)\,dl = \int_{M_1}^{M_2} P_1(\mu)\,d\mu = \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} P_2(\lambda)\,d\lambda = 1,$$

где $P(l)$, $P_1(\mu)$, $P_2(\lambda)$ — законы распределения l, μ, λ.

Если значение некоторой случайной величины заключено между числами a и $a + da$, будем считать, что рассматриваемая случайная величина принимает значение a. Тогда вероятность $P(l, \mu, \lambda)$ того, что контрольный параметр и параметры формы зерна приняли значение l, μ и λ, в силу предположения о независимости этих случайных параметров, выразится произведением

$$P(l, \mu, \lambda) = P(l)\,dl P_1(\mu)\,d\mu P_2(\lambda)\,d\lambda. \qquad (28)$$

При пересечении зерна случайной плоскостью предполагается, что нормаль к этой плоскости, проходящая через центр зерна, с равной вероятностью может пересечь любую точку неподвижной сферы с центром

в центре зерна. Это значит, что все значения азимута нормали φ и ее прецессионного угла γ будут равновероятны.

В силу симметричности эллипсоида относительно координатных плоскостей для получения различных сечений достаточно рассматривать нормали, лежащие в первом октанде. Тогда φ и γ будут независимыми случайными величинами, изменяющимися в границах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, и каждая из них будет иметь плотность вероятности, равную $\frac{2}{\pi}$. Поэтому вероятность $P(\varphi, \gamma)$ того, что азимут и прецессионный угол нормали плоскости сечения примут значения φ и γ, равна

$$P(\varphi, \gamma) = \frac{2}{\pi} d\varphi \frac{2}{\pi} d\gamma. \tag{29}$$

Так как параметры зерна, азимут и прецессионный угол нормали плоскости сечения есть взаимно-независимые случайные величины, то вероятность того, что эти случайные величины принимают значения l, μ, λ, φ, γ, равна

$$P(l, \mu, \lambda) P(\varphi, \gamma) = \frac{4}{\pi^2} P(l) P_1(\mu) P_2(\lambda) dl d\mu d\lambda d\varphi d\gamma. \tag{30}$$

Для фиксированных l, μ, λ, φ и γ величина нормали p секущей плоскости колеблется между нулем и

$$p_m = l \sqrt{\sin^2\gamma \cos^2\varphi + \mu^2 \sin^2\gamma \sin^2\varphi + \lambda^2 \cos^2\gamma} \tag{31}$$

[см. формулу (25)]. Причем вследствие того, что плоскость сечения случайна, любое значение нормали, выбранное в этих границах, будет равновероятным (см. рис. 1). Тогда плотность вероятности случайной величины p при условии, что l, μ, λ, φ, γ фиксированы, будет постоянна и равна $\frac{1}{p_m}$. Условная вероятность события, состоящего в том, что величина нормали принимает значение p при условии, что параметры зерна, азимут и прецессионный угол нормали к плоскости сечения приняли соответственно значения l, μ, λ, φ, γ выразится произведением

$$P(l, \mu, \lambda, \varphi, \gamma; p) = P(l, \mu, \lambda) P(\varphi, \gamma) \frac{1}{v_m} dp$$

или

$$P(l, \mu, \lambda, \varphi, \gamma; p) = \frac{4P(l) P_1(\mu) P_2(\lambda) dl d\mu d\lambda d\varphi d\gamma dp}{\pi^2 l \sqrt{\sin^2\gamma \cos^2\varphi + \mu^2 \sin^2\gamma \sin^2\varphi + \lambda^2 \cos^2\gamma}}. \tag{32}$$

Замечание. До сих пор предполагалось, что l, μ и λ являются случайными величинами непрерывного типа, имеющими плотности вероятностей. Если какой-нибудь из параметров окажется случайной величиной дискретного типа, то для этого параметра надо перейти от дифференциального закона распределения к интегральному. Пусть, например, дискретным будет параметр μ. Тогда в формулах (28), (30) и (32) вместо $P_1(\mu)d\mu$ надо писать $dF_1(\mu)$, где $F_1(\mu)$ — интегральный закон распределения μ, а в приводимых ниже интегральных формулах следует переходить к интегралам Стилтьеса. Если какой-нибудь параметр, например тот же μ, будет детерминированным, вопрос можно трактовать с тех же позиций: μ рассматривается как дискретная случайная величина, принимающая с вероятностью, равной единице, некоторое определенное значение μ_0. При этом можно говорить и о плотности вероятности $P_1(\mu)$ величины μ, понимая ее как δ-функцию, т. е. счи-

тая, что всюду, где $\mu \neq \mu_0$, выполняется условие $P_1(\mu) = 0$ и справедливо равенство

$$\int_{M_1}^{M_2} P_1(\mu)\, d\mu = 1.$$

В случае детерминированного параметра в формулах (28), (30) и (32), а также в приводимых ниже кратных интегралах дифференциальные сомножители (например, сомножитель $P_1(\mu)d\mu$) и интегрирование по соответствующему переменному опускаются.

2. Так как все элементы сечения эллипсоида определяются заданными значениями l, μ, λ, φ, γ и p, величина w, наблюдаемая в сечении, является функцией l, μ, λ, φ, γ, p. Момент k-го порядка случайной величины w выражается

$$Ew^k = \int_{L_1}^{L_2}\int_{M_1}^{M_2}\int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{p_m} w^k(l,\ \mu,\ \lambda,\ \varphi,\ \gamma,\ p)\, P(l,\ \mu,\ \lambda,\ \varphi,\ \gamma;\ p), \qquad (33)$$

или подробнее для общего случая трехосного эллипсоида

$$Ew^k = \frac{4}{\pi^2}\int_{L_1}^{L_2}\frac{P(l)}{l}\,dl \int_{M_1}^{M_2} P_1(\mu)\,d\mu \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} P_2(\lambda)\,d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\gamma \times$$

$$\times \int_0^{l\sqrt{\sin^2\gamma\cos^2\varphi+\mu^2\sin^2\gamma\sin^2\varphi+\lambda^2\cos^2\gamma}} \frac{w^k(l,\ \mu,\ \lambda,\ \varphi,\ \gamma,\ p)}{\sqrt{\sin^2\gamma\cos^2\varphi + \mu^2\sin^2\gamma\sin^2\varphi + \lambda^2\cos^2\gamma}}\, dp. \qquad (34)$$

Функция $w(l,\ \mu,\ \lambda,\ \varphi,\ \gamma,\ p)$ меняет вид в зависимости от аргументов φ и γ. Например, если w реализуется как σ, для трехосного эллипсоида она по-разному представляется для точек $(x,\ y,\ z)$, лежащих на диаграмме сечений выше или ниже линии круговых сечений. Как было ранее установлено, это осложнение снимается для $w \equiv \sigma$ при рассмотрении эллипсоида вращения и для $w \equiv S$ в случае всякого эллипсоида.

3. Рассмотрим случай $w \equiv S$ — эллипсоид трехосный. Подставляя (24) в (34), имеем

$$ES^k = \frac{4\pi^k}{\pi^2}\int_{L_1}^{L_2}\frac{P(l)}{l}\,dl \int_{M_1}^{M_2}\mu^k P_1(\mu)\,d\mu \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2}\lambda^k P_2(\lambda)\,d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\gamma \times$$

$$\times \frac{1}{\left(\sqrt{\sin^2\gamma\cos^2\varphi + \mu^2\sin^2\gamma\sin^2\varphi + \lambda^2\cos^2\gamma}\right)^{k+1}} \times$$

$$\times \int_0^{l\sqrt{\sin^2\gamma\cos^2\varphi+\mu^2\sin^2\gamma\sin^2\varphi+\lambda^2\cos^2\gamma}} \left(l^2 - \frac{p^2}{\sin^2\gamma\cos^2\varphi + \mu^2\sin^2\gamma\sin^2\varphi + \lambda^2\cos^2\gamma}\right)^k dp,$$

откуда получаем

$$ES^k = \frac{\pi^{k-1}}{4^k}\,\frac{\Gamma(2k+2)}{\Gamma^2\left(k+\frac{3}{2}\right)}\, C(P_1,\ P_2)\, El^{2k}. \qquad (35)$$

Функционал $C(P_1,\ P_2)$ зависит от распределений параметров формы и выражается

$$C(P_1,\ P_2) = \int_{M_1}^{M_2}\int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu^k P_1(\mu)\,\lambda^k P_2(\lambda)}{\left(\sqrt{\sin^2\gamma\cos^2\varphi + \mu^2\sin^2\gamma\sin^2\varphi + \lambda^2\cos^2\gamma}\right)^k}\, d\mu\, d\lambda\, d\varphi\, d\gamma. \qquad (36)$$

Равенства, устанавливающие линейную связь между моментами параметра зерна и моментами ω (величины, наблюдаемой в шлифе), назовем *условиями линейности.*

В рассматриваемом случае [формула (35] условие линейности выполняется для контрольного параметра l, но не выполняется для параметров формы μ и λ, что видно из конструкции функционала $C(P_1, P_2)$.

4. Пусть теперь $\omega \equiv \sigma$, зерно—эллипсоид вращения. Подставляя (26) и правую часть (27) в (33) и (так как параметр μ детерминирован) учитывая замечание в конце пункта 1 этого параграфа, получаем

$$E\sigma^k = \frac{4}{\pi^2}\int_{L_1}^{L_2} P(l)\,dl \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} P_2(\lambda)\,d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\gamma \times$$

$$\times\left(\frac{1}{l\sqrt{\sin^2\gamma+\lambda^2\cos^2\gamma}}\int_0^{l\sqrt{\sin^2\gamma+\lambda^2\cos^2\gamma}}\left(\sqrt{l^2-\frac{p^2}{\sin^2\gamma+\lambda^2\cos^2\gamma}}\right)^k dp\right),$$

откуда

$$E\sigma^k = \frac{\pi}{4\cdot 2^k}\,\frac{\Gamma(k+2)}{\Gamma^2\left(\frac{k+3}{2}\right)}\,El^k. \qquad (37)$$

Формула (37) представляет собой условие линейности для контрольного параметра зерна. Раскрываемая ею связь между моментами параметра сечений и моментами контрольного параметра зерна не зависит от закона распределения параметра формы (параметра λ). Может создаться впечатление, что случай эллипсоида вращения сводится, таким образом, к случаю шара. Однако такое заключение не правомерно. Определение El^k при помощи формулы (37) требует экспериментального нахождения $E\sigma^k$. Результаты же экспериментов, проведенных над множеством шаровых зерен и зерен, представляющих собой эллипсоиды вращения, дадут разные значения для моментов параметра σ. В этом сказывается скрытое влияние параметра формы на моменты контрольного параметра зерна.

Кроме того, формула (37) показывает, что для решения нашей задачи в случае эллипсоида вращения достаточно располагать только законом распределения параметра σ, не привлекая законов распределения других параметров сечения.

5. Сейчас уже можно привести некоторые простейшие, но практически важные результаты, вытекающие из формулы (37): выражение математического ожидания контрольного параметра l в зависимости от математического ожидания σ и выражение дисперсии контрольного параметра зерна в зависимости от математического ожидания и дисперсии σ.

Положив в формуле (37) $k = 1$, получим

$$El = \frac{8\Gamma^2(2)}{\pi\Gamma(3)}\,E\sigma = \frac{4}{\pi}\,E\sigma \approx 1{,}27324E\sigma. \qquad (38)$$

Следовательно, El должно превосходить $E\sigma$ немного более, чем на 27%.

Положив теперь $k = 2$ имеем

$$El^2 = \frac{4\cdot 4\Gamma^2\left(\frac{5}{2}\right)}{\pi\Gamma(4)}\,E\sigma^2 = \frac{3}{2}\,E\sigma^2.$$

Но

$$D\sigma = E\sigma^2 - (E\sigma)^2,$$

откуда

$$Dl = \frac{3}{2} D\sigma - \frac{32 - 3\pi^2}{2\pi^2} (E\sigma)^2 \approx 1{,}5 D\sigma - 0{,}04036 (E\sigma)^2. \qquad (39)$$

Таким образом, дисперсия l оказывается почти в полтора раза больше дисперсии σ.

3. Нахождение закона распределения контрольного параметра

1. Переходим к решению основной задачи настоящей работы — восстановлению закона распределения контрольного параметра зерна по экспериментально найденным законам распределения параметров сечения. Мы ограничиваемся только случаем, когда зерно — эллипсоид вращения. Более общие предположения, как показано выше, требуют дополнительных сведений о распределении параметров формы. Таким образом, мы получаем возможность опираться на рассмотрение только одного параметра сечения — σ.

В основе нашего решения лежит теория характеристических функций [4—6].

Пусть x есть случайная величина с интегральным законом распределения $F(x)$. Пусть x имеет моменты всех порядков. Обозначим через $\varphi(t)$ характеристическую функцию распределения $F(x)$, т. е. математическое ожидание величины e^{itx}

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x). \qquad (40)$$

Для интегрального уравнения (40) имеет место формула обращения

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-itx}}{t} \varphi(t)\, dt, \qquad (41)$$

где интеграл рассматривается в смысле главного значения $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{+N} \right)$.

Если x — случайная величина непрерывного типа, то существует плотность вероятности $f(x)$ этой случайной величины, равная $f(x) = F'(x)$.

Из выражения (41) имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt. \qquad (42)$$

Если для данного распределения существуют моменты Ex^k всех порядков, то характеристическая функция представляется рядом

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} t^k Ex^k. \qquad (43)$$

Тогда плотность вероятности непрерывной случайной величины x, имеющей моменты всех порядков, выразится формулой

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} t^k Ex^k dt. \qquad (44)$$

Воспользуемся формулой (44) для нахождения плотности вероятности $P(l)$ контрольного параметра зерна. Имеем

$$P(l)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itl}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k}{k!}t^kEl^kdt. \tag{45}$$

Для El^k согласно (37) находим

$$El^k=\begin{cases}\dfrac{(k+1)!}{2^k\left[\left(\dfrac{k}{2}\right)!\right]^2}E\sigma^k \text{ для } k \text{ — четного.}\\[2ex] \dfrac{4}{\pi}2^k\dfrac{\left[\left(\dfrac{k+1}{2}\right)!\right]^2}{(k+1)!}E\sigma^k \text{ для } k \text{ — нечетного.}\end{cases}$$

Тогда, заменяя k на $2k$ или на $2k+1$, в зависимости от четности или нечетности k, получаем оператор

$$P(l)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itl}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2k+1}{2^{2k}(k!)^2}E\sigma^{2k}t^{2k}dt+$$

$$+\frac{2i}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itl}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{[(k+1)!]^2\,2^{2k+1}}{(2k+1)!\,(2k+2)!}E\sigma^{2k+1}t^{2k+1}dt. \tag{46}$$

2. Дальнейшая разработка формулы (46) возможна, если сделать какие-либо дополнительные частные предположения относительно распределения параметра сечения σ.

Ограничимся небольшим числом примеров, причем для простоты предположим, что все рассматриваемые распределения σ симметричны [1], т. е.

$$E\sigma^{2k+1}=0.$$

Тогда формула (46) переходит в выражение

$$P(l)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itl}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2k+1}{2^{2k}(k!)^2}E\sigma^{2k}t^{2k}dt. \tag{47}$$

Рассмотрим случай равномерного распределения σ, заданного на интервале $[-a, a]$, имеющего плотность вероятности $\frac{1}{2a}$ (рис. 5). Моменты четного порядка σ

$$E\sigma^{2k}=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a}\sigma^{2k}d\sigma=\frac{a^{2k}}{2k+1}.$$

Подставляя это выражение в оператор (47), получаем

$$P(l)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itl}J_0(ta)\,dt,$$

[1] Начало отсчета σ перенесено в точку, соответствующую среднему значению (математическому ожиданию) σ. Таким образом, вместо величины σ рассматривается ее отклонение от среднего.

где J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка [7, 8]. Несложные выкладки преобразуют $P(l)$ к форме разрывного интеграла Вебера [8]

$$P(l) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos tl J_0(ta)\,dt, \tag{48}$$

откуда выводим дифференциальный закон распределения контрольного параметра l в предположении равномерного распределения σ (рис. 6)

$$P(l) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - l^2}} & \text{для } |l| \leqslant a \\ 0 & \text{для } |l| > a. \end{cases} \tag{49}$$

3. Чтобы получить возможность построить другие примеры распределений, надо предварительно развить формулу (47). Пусть $f(\sigma)$ — диффе-

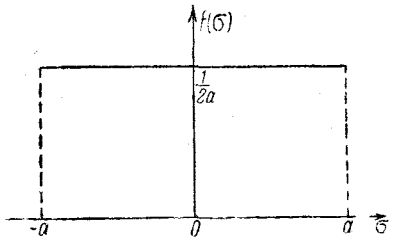


Рис. 5.

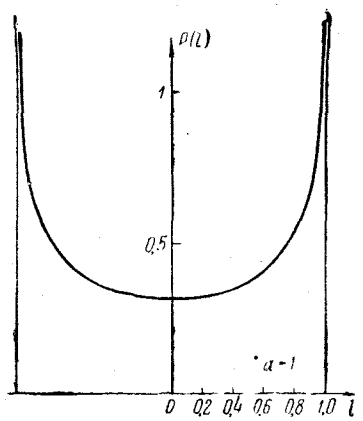


Рис. 6

ренциальный закон распределения σ. Предполагая его симметричным, имеем

$$E\sigma^{2k} = 2\int_0^\infty f(\sigma)\,\sigma^{2k}d\sigma. \tag{50}$$

Если функция $f(\sigma)$ убывает с ростом σ достаточно быстро, порядок суммирования и интегрирования в выражении

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2k+1}{2^{2k}(k!)^2} E\sigma^{2k}t^{2k} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2k+1}{2^{2k}(k!)^2} t^{2k}\int_0^\infty f(\sigma)\,\sigma^{2k}d\sigma$$

может быть переставлен. Тогда формула (47) после очевидных преобразований принимает вид

$$P(l) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos tl\,dt \int_0^\infty f(\sigma)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2k+1}{2^{2k}(k!)^2}(t\sigma)^{2k}d\sigma. \tag{51}$$

Из соотношения

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$$

следует

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2k+1}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k} = (xJ_0(x))' = J_0(x) - xJ_1(x).$$

Подставляя в формулу (51), получим

$$P(l)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos tl\,dt\int_0^\infty f(\sigma)\,(J_0(\sigma t)-t\sigma J_1(\sigma t))\,d\sigma. \qquad (52)$$

В этой формуле перемена порядка операций интегрирования по t и по σ недопустима, так как произведение $xJ_1(x)$ имеет при больших x порядок $\sqrt{x}$, благодаря чему перестановка интегралов приводит к нарушению сходимости правой части (52).

4. Применим оператор (52) для построения еще нескольких примеров распределений. Пусть распределение σ задано условием (рис. 7)

$$f(\sigma)=\frac{|\sigma|}{2}e^{-\frac{\sigma^2}{2}}. \qquad (53)$$

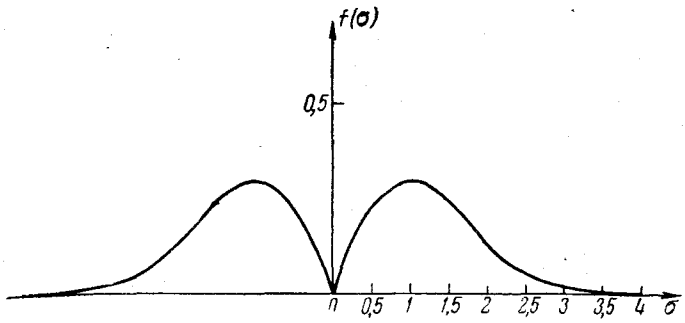


Рис. 7

Соотношение (53) действительно дает функцию распределения, так как легко проверяется, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma)\,d\sigma=1.$$

Согласно формуле (52),

$$P(l)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos tl\,dt\int_0^\infty \sigma e^{-\frac{\sigma^2}{2}}\,(J_0(\sigma t)-t\sigma J_1(\sigma t))\,d\sigma. \qquad (54)$$

Интеграл

$$\int_0^\infty \sigma e^{-\frac{\sigma^2}{2}}\,(J_0(\sigma t)-t\sigma J_1(\sigma t))\,d\sigma$$

изучается при помощи обобщения Ханкеля первого экспоненциального интеграла Вебера [8]

$$\int_0^\infty J_\nu(a\xi)\,e^{-p^2\xi^2}\xi^{\mu-1}\,d\xi=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu\right)\left(\frac{a}{2p}\right)^\nu}{2p^\mu\Gamma(\nu+1)}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu;\ \nu+1;\ -\frac{a^2}{4p^2}\right), \qquad (55)$$

$\nu+\mu>0$, ν и μ — целые.

Если $\mu = \nu + 2$, вырожденная гипергеометрическая функция ${}_1F_1$ упрощается и мы получаем

$$\int_0^\infty J_\nu(a\xi)\, e^{-p^2\xi^2}\xi^{\nu+1}dt = \frac{a^\nu}{(2p^2)^{\nu+1}}\, e^{-\frac{a^2}{4p^2}}. \tag{56}$$

Тогда

$$\int_0^\infty \sigma e^{-\frac{\sigma^2}{2}} (J_0(\sigma t) - t\sigma J_1(\sigma t))\, d\sigma = e^{-\frac{t^2}{2}} - t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Подставляя в выражение (54), имеем

$$P(l) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} \cos tl dt - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \cos tl dt. \tag{57}$$

Первый из интегралов, стоящих в правой части, известен

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} \cos tl dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{l^2}{2}}. \tag{58}$$

Второй интеграл в правой части (57) представляется рядом

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \cos tl dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{t^{2(k+1)}}{(2k)!}\, l^{2k} dt = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{c_k}{(2k)!}\, l^{2k},$$

где

$$c_k = \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} t^{2(k+1)} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\,\frac{(2k+1)!}{2^k k!}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} t^2 \cos tl dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{2k+1}{k!}\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^k.$$

Но

$$\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{2k+1}{k!}\, x^{2k} = (xe^{-x^2})' = e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

Тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} t^2 \cos tl dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{l^2}{2}}(1 - l^2). \tag{59}$$

Подставляя выражения (58) и (59) в формулу (57), получаем дифференциальную функцию распределения контрольного параметра l (рис. 8),

$$P(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{l^2}{2}} l^2. \tag{60}$$

5. Так как вырожденная гипергеометрическая функция, входящая в интеграл Вебера—Ханкеля, приводится к элементарным функциям каждый раз, когда $\mu - \nu$ есть положительное целое число (в рассмот-

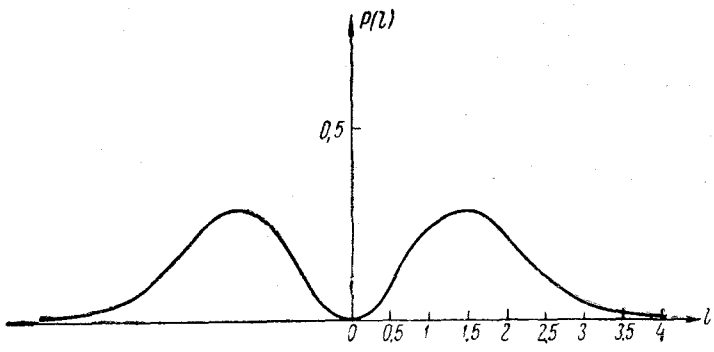


Рис. 8

ренном случае $\mu - \nu = 2$), можно получить другие примеры распределения l, выбирая $f(\sigma)$ в форме

$$f(\sigma) = k|\sigma|^r e^{-m\sigma^2},$$

где k и m — соответствующие постоянные,
r — нечетное > 0.

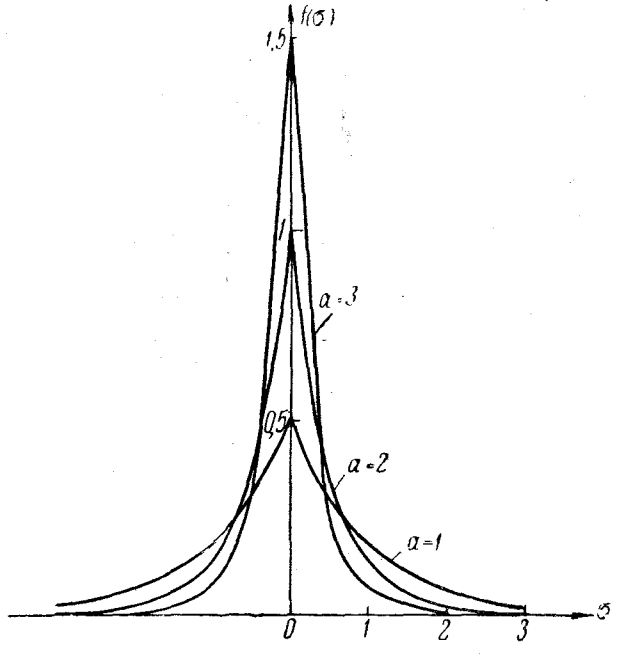


Рис. 9

Однако во всех этих случаях, так же как и в рассмотренном в предыдущем пункте, распределения отличаются одной общей особенностью: плотность вероятности в точке, соответствующей среднему значению, равна нулю.

Построим пример распределения, не имеющего этой особенности.

Пусть распределение σ задано условием (рис. 9)

$$f(\sigma)=\frac{a}{2}e^{-a|\sigma|} \tag{61}$$

где a — положительная постоянная.

Легко проверяется, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma)\,d\sigma=1.$$

Для нахождения $P(l)$ привлекаем интеграл Гегенбауэра [8]

$$\int_0^\infty e^{-ax}J_\nu(bx)\,x^\nu dx=\frac{(2b)^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{(a^2+b^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}. \tag{62}$$

При $\nu=0$ и $\nu=1$ имеем соответственно

$$\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)\,dx=\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{63}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}J_1(bx)\,x dx=\frac{b}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{64}$$

Тогда, согласно выражению (52),

$$P(l)=\frac{a}{\pi}\int_0^\infty\cos tl\,dt\left(\int_0^\infty e^{-a\sigma}J_0(\sigma t)\,d\sigma-t\int_0^\infty e^{-a\sigma}J_1(\sigma t)\,\sigma d\sigma\right)=$$

$$=\frac{a}{\pi}\int_0^\infty\cos tl dt\left(\frac{1}{(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{t^2}{(a^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

или

$$P(l)=\frac{a^3}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos tl}{(a^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt. \tag{65}$$

Отсюда видно, что $P(l)$ (так же, как $f(\sigma)$) не равняется нулю в точке, соответствующей среднему значению l, так как при $l=0$

$$P(0)=\frac{a^3}{\pi}\int_0^\infty\frac{dt}{(a^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a}{\pi}. \tag{66}$$

Для построения полученного распространения $P(l)$ воспользуемся тем, что при $r>-1$, $l>0$, $|\arg a|<\frac{\pi}{2}$ интеграл

$$\int_0^\infty\frac{\cos ltdt}{(a^2+t^2)^{r+1}}$$

выражается через функцию $K_{r+\frac{1}{2}}(x)$ следующим образом [8]

$$\int_0^\infty \frac{\cos ltdt}{(a^2+t^2)^{r+1}} = \sqrt{\pi}\left(\frac{l}{2a}\right)^{r+\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(r+1)} K_{r+\frac{1}{2}}(al).$$

Полагая здесь $r=\frac{1}{2}$, из формулы (65) выводим

$$P(l) = \frac{a^2 l}{\pi} K_1(al). \tag{67}$$

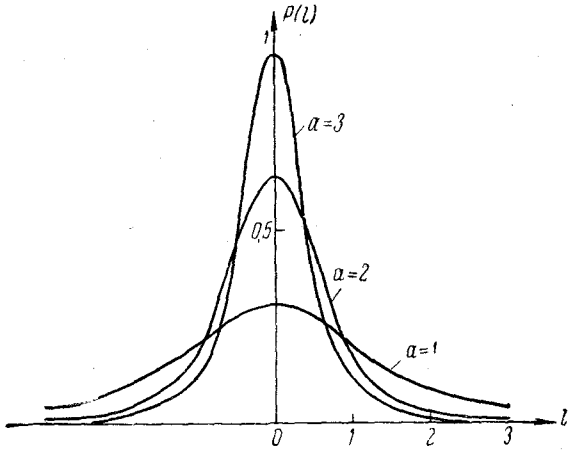


Рис. 10

Значения $P(l)$ легко вычисляются с помощью таблиц функции $K_1(x)$. Так, для случаев $a = 1, 2, 3$ получаем для $P(l)$

l	$a=1$	$a=2$	$a=3$
0	0,3183	0,6366	0,9549
1	0,1971	0,1781	0,1150
2	0,0890	0,0318	0,0071
3	0,0383	0,0051	0,0005

Соответствующие графики представлены на рис. 10.

6. В заключение исследуем вопрос о единственности распределения $P(l)$, отвечающего данному распределению $f(\sigma)$.

Как известно [4], распределение $P(l)$ будет единственным, если $\sqrt[k]{\frac{|El^k|}{k!}}$ остается ограниченным при $k \to \infty$.

Выясним, какие условия это налагает на распределение $f(\sigma)$.

Согласно формуле (37) ограниченность корня степени k из $\frac{|El^k|}{k!}$ означает существование такой постоянной C, при которой для всякого целого положительного k выполняется неравенство

$$\sqrt[k]{\frac{4}{\pi}\frac{2^k\Gamma^2\left(\frac{k+3}{2}\right)}{\Gamma(k+2)\Gamma(k+1)}|E\sigma^k|} < C. \tag{68}$$

Если воспользоваться формулой Стирлинга и осуществить соответствующие выкладки, легко получить следующие достаточные условия единственности распределения $P(l)$: распределение $P(l)$, соответствующее данному распределению $f(\sigma)$ (имеющему моменты всех порядков), будет единственным, если порядок роста моментов σ будет таким, что при всех k удовлетворяется неравенство

$$|E\sigma^k| < (Mk)^k, \tag{69}$$

где M — некоторая константа.

Полученный критерий легко применяется ко всем разобранным выше распределениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лавров И. В. и Вержбинский М. Л. Анализ микроструктуры электрокорунда. «Абразивы», 1959, № 25.
2. Журавский А. М. Определение крупности вкрапленников. Юбилейный сб. ин-та Механобр. Углетехиздат, 1935.
3. Глаголев А. А. Морфо-гранулометрический анализ массовых агрегатов. АН Каз. ССР, 1950.
4. Бернштейн С. Н. Теория вероятностей. Гостехиздат, 1946.
5. Гливенко В. И. Курс теории вероятностей. ГОНТИ, 1939.
6. Крамер Г. Случайные величины и распределение вероятностей. ИЛ, 1947.
7. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н. Курс современного анализа, ч. II. Гостехтеоретиздат, 1934.
8. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. ИЛ, 1949.
9. Салтыков С. А. Введение в стереометрическую металлографию. АН Арм. ССР, 1950.
10. Тодес О. М., Звягин Б. М. и Богорад Е. А. О петрографическом методе определения истинных размеров включений. Известия высших учебных заведений. «Горный журнал», 1958, № 4.
11. Спектор А. Г. Статический анализ структур с шарообразными зернами. «Заводская лаборатория», 1955, № 2.
12. Койда Н. У. К вопросу о построении ряда распределения размеров частиц неоднородного материала. «Заводская лаборатория», 1957, № 8.
13. Huber A. Z. Phys., 1935, B. 93, N 3—4.
14. Sheil E. Z. Metallkunde, 1935, B. 27, N 9.
15. Cheng Kai-chia. Acta physica sinica, 1957, v. 13, N 1, p. 58—68.