

О РАСПРОСТРАНЕНИИ РАДИОАКТИВНОЙ ПРИМЕСИ В АТМОСФЕРЕ

Л. С. Гандин, Р. Э. Соловейчик

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В связи с созданием высокочувствительной измерительной аппаратуры стало возможным определение малых концентраций и потоков радиоактивной примеси в атмосфере. Благодаря этому возникла важная с практической точки зрения задача определения положения и мощности источников примеси, расположенных под землей, по наблюдениям в приземном слое атмосферы. В основу решения этой задачи должна быть положена теория, объясняющая распространение радиоактивной примеси в двухслойной среде земля—атмосфера.

Сформулируем основные положения такой теории. Будем рассматривать стационарное распределение радиоактивной примеси, поступающей от некоторых источников, расположенных в земле или на ее поверхности. В толще земли будем учитывать молекулярную диффузию примеси, считая процесс диффузии однородным и изотропным, а также явление радиоактивного распада. Соответствующее уравнение запишется в виде

$$D\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}\right) - \lambda q = 0 \quad (z < 0), \quad (1)$$

где q — концентрация примеси;

D — коэффициент молекулярной диффузии в почве;

λ — постоянная распада;

x, y и z — декартовы координаты; ось z направлена вертикально вверх от поверхности земли.

В атмосфере будем учитывать турбулентную диффузию примеси, ее распад, а также перенос примеси ветром. Как известно, турбулентная диффузия в приземном слое атмосферы существенно анизотропна и неоднородна. Поэтому уравнение распространения примеси в атмосфере имеет вид

$$u \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial q}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial q}{\partial z} \right) - \lambda q \quad (z > 0), \quad (2)$$

где u — скорость ветра;

k_x, k_y и k_z — коэффициенты турбулентной диффузии в соответствующих направлениях.

Ось x совпадает с направлением ветра, который предполагается не меняющим своего направления. Примем скорость ветра u и коэффициенты горизонтальной диффузии k_x и k_y постоянными, а коэффициент вертикальной диффузии k_z — меняющимся с высотой z по степенному закону

$$k_z = kz^n. \quad (3)$$

Как известно из многих метеорологических исследований (например, [1]), такие допущения позволяют удовлетворительно описать процесс распространения примеси в приземном слое атмосферы. При этих предположениях уравнение (2) можно переписать в виде

$$u \frac{\partial q}{\partial x} = k_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + k \frac{\partial}{\partial z} \left(z^n \frac{\partial q}{\partial z} \right) - \lambda q. \quad (4)$$

При решении этой задачи должны быть использованы следующие граничные условия:

1) затухание концентрации примеси на бесконечности

$$q|_{x=\pm\infty} = q|_{y=\pm\infty} = q|_{z=\pm\infty} = 0; \quad (5)$$

2) непрерывность концентрации и потока примеси на границе земля—воздух

$$q|_{z=-0} = q|_{z=+0}, \quad (6)$$

$$D \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=-0} = k \left(z^n \frac{\partial q}{\partial z} \right) \Big|_{z=+0}; \quad (7)$$

3) задание расположения и мощности источников концентрации или потока примеси.

Точного решения поставленной задачи не удастся получить в замкнутой форме. Ее можно решать численными методами, что требует, однако, весьма громоздких вычислений. Поэтому предпочтем приближенный метод решения.

Введем вместо q новые искомые функции

$$s_1 = Dq \text{ при } z \leq 0,$$

$$s_2 = kq \text{ при } z \geq 0.$$

Тогда граничные условия (6) и (7) преобразуются к виду

$$s_1 \Big|_{z=0} = \frac{D}{k} s_2 \Big|_{z=0}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \left(z^n \frac{\partial s_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=0}. \quad (9)$$

Поскольку отношение D/k — величина очень малая (D имеет величину порядка $1 \text{ см}^2/\text{сек}$, а k $100 \text{ см}^2/\text{сек}$), естественно искать функции s_1 и s_2 в виде рядов по степеням этого малого параметра

$$s_1 = \sum_{m=0}^{\infty} s_{1,m} \left(\frac{D}{k} \right)^m, \quad (10)$$

$$s_2 = \sum_{m=0}^{\infty} s_{2,m} \left(\frac{D}{k} \right)^m. \quad (11)$$

Подставив (10) и (11) в (8) и (9), имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} s_{1,m} \left| \left(\frac{D}{k} \right)^m \right|_{z=0} = \sum_{m=0}^{\infty} s_{2,m} \left| \left(\frac{D}{k} \right)^{m+1} \right|_{z=0}, \quad (12)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial s_{1,m}}{\partial z} \left| \left(\frac{D}{k} \right)^m \right|_{z=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(z^n \frac{\partial s_{2,m}}{\partial z} \right) \left| \left(\frac{D}{k} \right)^m \right|_{z=0}. \quad (13)$$

Из равенства (12) вытекает, что

$$s_{1,0} \big|_{z=0} = 0, \quad (14)$$

$$s_{1,m} \big|_{z=0} = s_{2,m-1} \big|_{z=0}, \quad (15)$$

а равенство (13) дает

$$\frac{\partial s_{1,m}}{\partial z} \bigg|_{z=0} = \left(z^n \frac{\partial s_{2,m}}{\partial z} \right) \bigg|_{z=0}. \quad (16)$$

Равенства (14)–(16) описывают метод последовательных приближений для решения нашей задачи. Так, сначала решаем уравнение вида (1) для $s_{1,0}$ при условиях затухания на бесконечности, задания источников и условия (14). Затем решаем уравнение вида (4) для $s_{2,0}$ при условиях затухания на бесконечности и условии (16) при $m=0$, в котором $\left(\frac{\partial s_{1,0}}{\partial z} \right) \big|_{z=0}$ есть величина, известная по результатам предыдущих вычислений. Далее решаем уравнение вида (1) для $s_{1,1}$, используя наряду с прочими условие (15) при $m=1$, где $s_{2,0} \big|_{z=0}$ определено в результате предыдущего расчета, и т. д.

Сходимость этого метода последовательных приближений эквивалентна сходимости степенных рядов (10) и (11). Поскольку параметр D/k чрезвычайно мал, то сходимость этих рядов, а потому и последовательных приближений будет, вообще говоря, весьма быстрой. Вследствие этого естественно ограничиться при определении обеих функций s_1 и s_2 одним первым шагом, т. е. для определения $s_1 \approx s_{1,0}$ надо решить уравнение

$$D \left(\frac{\partial^2 s_{1,0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_{1,0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s_{1,0}}{\partial z^2} \right) - \lambda s_{1,0} = 0$$

при граничных условиях

$$s_{1,0} \big|_{x=\pm\infty} = s_{1,0} \big|_{y=\pm\infty} = s_{1,0} \big|_{z=-\infty} = 0,$$

$$s_{1,0} \big|_{z=0} = 0$$

и задании источников. Для определения $s_2 \approx s_{2,0}$ надо после этого решить уравнение

$$u \frac{\partial s_{2,0}}{\partial x} = k_x \frac{\partial^2 s_{2,0}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 s_{2,0}}{\partial y^2} + k \frac{\partial}{\partial z} \left(z^n \frac{\partial s_{2,0}}{\partial z} \right) - \lambda s_{2,0}$$

при граничных условиях

$$s_{2,0} \big|_{x=\pm\infty} = s_{2,0} \big|_{y=\pm\infty} = s_{2,0} \big|_{z=\infty} = 0$$

и

$$\left(z^n \frac{\partial s_{2,0}}{\partial z} \right) \bigg|_{z=0} = \frac{\partial s_{1,0}}{\partial z} \bigg|_{z=0}.$$

При отыскании распределения примеси в земле полагаем, что концентрация примеси на ее поверхности равна нулю. При отыскании же распределения примеси в атмосфере считаем заданным поток примеси на поверхности земли, вычисляемый по распределению ее в почве

Поскольку диффузия примеси происходит в атмосфере гораздо интенсивнее, чем в земле, то концентрации ее в атмосфере крайне незначительны по сравнению с концентрациями в земле. Поэтому, рассматривая распределение примеси в земле, естественно пренебречь наличием примеси в атмосфере. С другой стороны, интересуясь распределением примеси в атмосфере, нельзя считать концентрацию на поверхности земли равной нулю, а необходимо исходить из реального потока примеси, поступающего в атмосферу из почвы. Задача о распределении радиоактивной примеси в почве при условии равенства концентрации ее нулю на поверхности почвы решалась неоднократно (как например, в работе [2]), поэтому ограничимся нахождением распределения радиоактивной примеси в атмосфере по заданному ее потоку из почвы.

В такой постановке задача представляет и самостоятельный интерес, независимый от изложенного метода последовательных приближений. В частности, решив эту задачу, можно подойти к решению практически важной «обратной» задачи — нахождения распределения потока радиоактивной примеси на поверхности земли, по данным о ее распределении в приземном слое атмосферы.

Решение задачи

Итак, надо решить уравнение (4) распространения радиоактивной примеси в атмосфере

$$u \frac{\partial q}{\partial x} = k_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + k \frac{\partial}{\partial z} \left(z^n \frac{\partial q}{\partial z} \right) - \lambda q$$

при граничных условиях

$$q|_{x=\pm\infty} = 0, \quad (5')$$

$$q|_{y=\pm\infty} = 0, \quad (5'')$$

$$q|_{z=\pm\infty} = 0 \quad (5''')$$

и

$$-k \left(z^n \frac{\partial q}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = P(x, y), \quad (17)$$

где $P(x, y)$ — известная функция.

Решение задачи будем проводить методом интегральных преобразований по координатам u и z . Предварительно введем обозначения

$$\frac{u}{k_x} = 2a; \quad \frac{k_y}{k_x} = b; \quad \frac{k}{k_x} = c; \quad \frac{\lambda}{k_x} = l. \quad (18)$$

Так что уравнение (4) примет вид

$$2a \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + c \frac{\partial}{\partial z} \left(z^n \frac{\partial q}{\partial z} \right) - lq. \quad (19)$$

Предположим сначала, что функция $P(x, y)$ является четной относительно координаты y . Умножим тогда уравнение (19) на $\cos \frac{\mu}{\sqrt{b}} y$ и проинтегрируем его по y от $-\infty$ до $+\infty$. Получим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2a \frac{\partial F}{\partial x} - (\mu^2 + l) F = -c \frac{\partial}{\partial z} \left(z^n \frac{\partial F}{\partial z} \right), \quad (20)$$

где обозначено

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(x, y, z) \cos \frac{\mu}{\sqrt{b}} y dy = F(x, z; \mu). \quad (21)$$

При выводе уравнения (20) использовано условие (5'') и естественное дополнительное условие

$$\left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{y=\pm\infty} = 0. \quad (22)$$

Такое же преобразование, примененное к условиям (5'), и (5''') и (17), приводит их к виду

$$F|_{x=\pm\infty} = 0, \quad (23)$$

$$F|_{z=\pm\infty} = 0, \quad (24)$$

$$-k \left(z^n \frac{\partial F}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = \Pi(x; \mu), \quad (25)$$

где

$$\Pi(x; \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) \cos \frac{\mu}{\sqrt{b}} y dy. \quad (26)$$

Далее умножим уравнение (20) на

$$z^{\frac{1-n}{2}} J_{-\frac{1-n}{2-n}} \left(\frac{2\nu}{2-n} \frac{z^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{c}} \right),$$

где J — функция Бесселя первого рода, и проинтегрируем по z от 0 до ∞ .

В результате получим

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} - 2a \frac{d\Phi}{dx} - (\mu^2 + \nu^2 + l) \Phi = -\Psi, \quad (27)$$

где введены обозначения

$$\int_0^{+\infty} F(x, z; \mu) z^{\frac{1-n}{2}} J_{-\frac{1-n}{2-n}} \left(\frac{2\nu}{2-n} \frac{z^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{c}} \right) dz = \Phi(x; \mu, \nu), \quad (28)$$

$$\Psi(x; \mu, \nu) = \left[\frac{(2-n)\sqrt{c}}{\nu} \right]^{\frac{1-n}{2-n}} \frac{c}{k\Gamma\left(\frac{1}{2-n}\right)} \Pi(x; \mu). \quad (29)$$

При выводе уравнения (27) использованы условия (24) и (25). То же преобразование, примененное к условиям (23), дает

$$\Phi|_{x=\pm\infty} = 0. \quad (30)$$

Решение уравнения (27), удовлетворяющее условиям (30), может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(x; \mu, \nu) = & \frac{1}{2\sqrt{a^2 + \mu^2 + \nu^2 + l}} \times \\ & \times \left[\int_{-\infty}^x \Psi(\xi; \mu, \nu) e^{(a - \sqrt{a^2 + \mu^2 + \nu^2 + l})(x - \xi)} d\xi + \right. \\ & \left. + \int_x^{\infty} \Psi(\xi; \mu, \nu) e^{-(a + \sqrt{a^2 + \mu^2 + \nu^2 + l})(\xi - x)} d\xi \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Для получения решения уравнения (19) необходимо выполнить, исходя из выражения (31), обращения двух произведенных интегральных преобразований: (28) и (21). Для получения обращения формулы (28) воспользуемся интегралом Фурье—Бесселя, который может быть записан в виде совокупности двух формул

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{\infty} \varphi(v) J_p(vt) v dv, \\ \varphi(v) &= \int_0^{\infty} f(t) J_p(vt) t dt. \end{aligned} \quad (32)$$

Положим в (32)

$$p = -\frac{1-n}{2-n}$$

и выполним замену

$$t = \frac{2}{2-n} \frac{z^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{c}}.$$

Тогда вторая из формул (32) примет вид

$$\varphi(v) = \frac{2}{2-n} \frac{1}{c} \int_0^{\infty} f\left(\frac{2}{2-n} \frac{z^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{c}}\right) J_{-\frac{1-n}{2-n}}\left(\frac{2v}{2-n} \frac{z^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{c}}\right) z^{1-n} dz. \quad (33)$$

Обозначая теперь

$$\frac{2}{2-n} \frac{1}{c} f\left(\frac{2}{2-n} \frac{z^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{c}}\right) z^{1-n} = F(x, z; \mu) z^{\frac{1-n}{2}}$$

и

$$\varphi(v) = \Phi(x; \mu, v),$$

приведем (33) к виду (28). Если проделать те же преобразования над первой из формул (32), получим искомое обращение

$$\begin{aligned} F(x, z; \mu) &= \frac{2}{2-n} \frac{1}{c} z^{\frac{1-n}{2}} \int_0^{\infty} \Phi(x; \mu, v) J_{-\frac{1-n}{2-n}} \times \\ &\times \left(\frac{2v}{2-n} \frac{z^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{c}}\right) v dv. \end{aligned} \quad (34)$$

Что касается преобразования (21), то, как это сразу вытекает из интеграла Фурье для четной функции, соответствующая формула обращения имеет вид

$$q(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{b}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, z; \mu) \cos \frac{\mu}{\sqrt{b}} y d\mu. \quad (35)$$

Подставляя (34) в (35), получим формулу обращения двойного интегрального преобразования

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= \frac{1}{(2-n)\pi c \sqrt{b}} z^{\frac{1-n}{2}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x; \mu, v) \times \\ &\times J_{-\frac{1-n}{2-n}}\left(\frac{2v}{2-n} \frac{z^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{c}}\right) \cos \frac{\mu}{\sqrt{b}} y \cdot d\mu \cdot v dv. \end{aligned} \quad (36)$$

Для получения решения рассматриваемой задачи, необходимо подставить в (36) выражение (31). Используя при этом обозначения (29) и (26), получим

$$q(x, y, z) = \frac{[(2-n)\sqrt{c}]^{\frac{1-n}{2-n}} z^{\frac{1-n}{2-n}}}{(2-n) \cdot 2\pi \sqrt{b} k \Gamma\left(\frac{1}{2-n}\right)} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2 + \mu^2 + \nu^2 + l}} \times \\ \times \cos \frac{\mu}{\sqrt{b}} \eta \cos \frac{\mu}{\sqrt{b}} y J_{-\frac{1-n}{2-n}} \left(\frac{2\nu}{2-n} \frac{z^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{c}} \right) \times \\ \times \left[\int_{-\infty}^x p(\xi, \eta) e^{(a - \sqrt{a^2 + \mu^2 + \nu^2 + l})(x-\xi)} d\xi + \right. \\ \left. + \int_x^\infty p(\xi, \eta) e^{-(a + \sqrt{a^2 + \mu^2 + \nu^2 + l})(\xi-x)} d\xi \right] d\eta d\mu d\nu. \quad (37)$$

В выражении (37) могут быть выполнены квадратуры по ν и μ . При этом основную роль будет играть формула Сонина—Гегенбауэра

$$\int_0^\infty \frac{K_m^{(\alpha \sqrt{l^2 + \beta^2})}}{(t^2 + \beta^2)^{\frac{m}{2}}} J_p(\gamma t) t^{1+p} dt = \\ = \frac{\gamma^p}{\alpha^m} \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}{\beta} \right)^{m-p-1} K_{m-p-1}(\beta \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}), \quad (38)$$

где K — функция Макдональда.

Чтобы применить эту формулу, при интегрировании по ν воспользуемся сначала соотношением

$$e^{-\rho} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho K_{\frac{1}{2}}(\rho) \quad (39)$$

для преобразования показательной функции в (37) и положим затем в (38)

$$m = \frac{1}{2}; \quad p = -\frac{1-n}{2-n}; \quad \alpha = \pm(x-\xi);$$

$$\beta^2 = a^2 + \mu^2 + l; \quad \gamma = \frac{2}{2-n} \frac{z^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{c}}.$$

Тогда получим из (37)

$$q(x, y, z) = \frac{c^{\frac{1-n}{2-n}}}{(2-n)^{\frac{n}{2-n}} 2^{\frac{4-3n}{4-2n}} \pi \sqrt{\pi} k \sqrt{b} \Gamma\left(\frac{1}{2-n}\right)} \times \\ \times \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty p(\xi, \eta) e^{a(x-\xi)} \cos \frac{\mu}{\sqrt{b}} y \cdot \cos \frac{\mu}{\sqrt{b}} \eta \times \\ \times \frac{K_{-\frac{n}{4-2n}} \left[\sqrt{a^2 + \mu^2 + l} \sqrt{(x-\xi)^2 + \left(\frac{2}{2-n}\right)^2 \frac{z^{2-n}}{c}} \right]}{\left[\frac{a^2 + \mu^2 + l}{(x-\xi)^2 + \left(\frac{2}{2-n}\right)^2 \frac{z^{2-n}}{c}} \right]^{\frac{n}{8-4n}}} d\xi d\eta d\mu, \quad (40)$$

причем два интеграла по ξ здесь объединились. Теперь для выполнения интегрирования по μ преобразуем произведение косинусов

$$\cos \frac{\mu}{\sqrt{b}} y \cdot \cos \frac{\mu}{\sqrt{b}} \eta = \frac{1}{2} \cos \frac{\mu}{\sqrt{b}} (y - \eta) + \cos \frac{\mu}{\sqrt{b}} (y + \eta) \quad (41)$$

и воспользуемся соотношением

$$\cos \rho = \sqrt{\frac{\pi \rho}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(\rho). \quad (42)$$

Затем применим формулу (38), положив в ней

$$m = -\frac{n}{4-2n}; \quad p = -\frac{1}{2}; \quad a = \sqrt{(x - \xi)^2 + \left(\frac{2}{2-n}\right)^2 \frac{z^{2-n}}{c}};$$

$$\beta^2 = a^2 + l; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{b}} (y \pm \eta).$$

Тогда получим из (40)

$$\begin{aligned} q(x, y, z) = & -\frac{\frac{1-n}{c^{2-n}}}{(2-n)^{\frac{n}{2-n}} 2^{\frac{3-2n}{2-n}} \pi k \sqrt{b} \Gamma\left(\frac{1}{2-n}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi, \eta) e^{a(x-\xi)} \times \\ & \times \left\{ \frac{K_{\frac{1}{2-n}} \left[\sqrt{a^2 + l} \sqrt{(x - \xi)^2 + \frac{(y - \eta)^2}{b} + \left(\frac{2}{2-n}\right)^2 \frac{z^{2-n}}{c}} \right]}{\left[\frac{(x - \xi)^2 + \frac{(y - \eta)^2}{b} + \left(\frac{2}{2-n}\right)^2 \frac{z^{2-n}}{c}}{a^2 + l} \right]^{\frac{1}{4-2n}}} \right. + \\ & \left. + \frac{K_{\frac{1}{2-n}} \left[\sqrt{a^2 + l} \sqrt{(x - \xi)^2 + \frac{(y + \eta)^2}{b} + \left(\frac{2}{2-n}\right)^2 \frac{z^{2-n}}{c}} \right]}{\left[\frac{(x - \xi)^2 + \frac{(y + \eta)^2}{b} + \left(\frac{2}{2-n}\right)^2 \frac{z^{2-n}}{c}}{a^2 + l} \right]^{\frac{1}{4-2n}}} \right\} d\xi d\eta, \quad (43) \end{aligned}$$

причем в этом преобразовании использовано свойство функции Макдональда $K_{-s}(\rho) = K_s(\rho)$. Возвращаясь в выражении (43) к первоначальным обозначениям с помощью (18), получим окончательно

$$\begin{aligned} q(x, y, z) = & \frac{1}{(2-n)^{\frac{n}{2-n}} 2^{\frac{3-2n}{2-n}} \pi \sqrt{k_x k_y k}^{\frac{1}{2-n}} \Gamma\left(\frac{1}{2-n}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi, \eta) e^{\frac{u}{2k_x}(x-\xi)} \times \\ & \times \left\{ \frac{K_{\frac{1}{2-n}} \left[\sqrt{\frac{u^2}{4k_x} + \lambda} \sqrt{\frac{(x - \xi)^2}{k_x} + \frac{(y - \eta)^2}{k_y} + \left(\frac{2}{2-n}\right)^2 \frac{z^{2-n}}{k}} \right]}{\left[\frac{\frac{(x - \xi)^2}{k_x} + \frac{(y - \eta)^2}{k_y} + \left(\frac{2}{2-n}\right)^2 \frac{z^{2-n}}{k}}{\frac{u^2}{4k_x} + \lambda} \right]^{\frac{1}{4-2n}}} \right. + \\ & \left. + \frac{K_{\frac{1}{2-n}} \left[\sqrt{\frac{u^2}{4k_x} + \lambda} \sqrt{\frac{(x - \xi)^2}{k_x} + \frac{(y + \eta)^2}{k_y} + \left(\frac{2}{2-n}\right)^2 \frac{z^{2-n}}{k}} \right]}{\left[\frac{\frac{(x - \xi)^2}{k_x} + \frac{(y + \eta)^2}{k_y} + \left(\frac{2}{2-n}\right)^2 \frac{z^{2-n}}{k}}{\frac{u^2}{4k_x} + \lambda} \right]^{\frac{1}{4-2n}}} \right\} d\xi d\eta, \quad (44) \end{aligned}$$

Формула (44) дает решение рассматриваемой задачи в случае четности функции $P(x, y)$ по y , т. е. в случае симметрии распределения потока примеси на поверхности земли по отношению к некоторой прямой, параллельной направлению ветра. Если же функция $P(x, y)$ нечетна по y , все приведенные рассуждения останутся в силе, с той лишь разницей, что в формулах (21), (26), (35), (36), (37) и (40) косинусы следует заменить синусами тех же аргументов. Поэтому вместо формулы (41) нужно в этом случае воспользоваться формулой

$$\sin \frac{\mu}{\sqrt{b}} y \sin \frac{\mu}{\sqrt{b}} \eta = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\mu}{\sqrt{b}} (y - \eta) - \cos \frac{\mu}{\sqrt{b}} (y + \eta) \right]. \quad (45)$$

Отсюда сразу видно, что решение задачи при нечетности функции $P(x, y)$ по y отличается от выражения (44) лишь знаком минус в фигурных скобках.

Обращаясь, наконец, к общему случаю произвольной функции $P(x, y)$ представим ее в виде суммы функций, четной и нечетной по y :

$$P(x, y) = \frac{1}{2} [P(x, y) + P(x, -y)] + \frac{1}{2} [P(x, y) - P(x, -y)]. \quad (46)$$

В силу линейности задачи решение ее для этого общего случая будет иметь вид

$$q(x, y, z) = \frac{1}{(2-n)^{\frac{n}{2-n}} 2^{\frac{3-2n}{2-n}} \pi \sqrt{k_x k_y k}^{\frac{1}{2-n}} \Gamma\left(\frac{1}{2-n}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \int e^{\frac{u}{2k} (x-\xi)} \times$$

$$\times \left\{ P(\xi, \eta) \frac{K \frac{1}{2-n} \left[\sqrt{\frac{u^2}{4k_x} + \lambda} \sqrt{\frac{(x-\xi)^2}{k_x} + \frac{(y-\eta)^2}{k_y} + \left(\frac{2}{2-n}\right)^2 \frac{z^{2-n}}{k}} \right]}{\left[\frac{(x-\xi)^2}{k_x} + \frac{(y-\eta)^2}{k_y} + \left(\frac{2}{2-n}\right)^2 \frac{z^{2-n}}{k} \right]^{\frac{1}{4-2n}}} + \right.$$

$$\left. + P(\xi, -\eta) \frac{K \frac{1}{2-n} \left[\sqrt{\frac{u^2}{4k_x} + \lambda} \sqrt{\frac{(x-\xi)^2}{k_x} + \frac{(y+\eta)^2}{k_y} + \left(\frac{2}{2-n}\right)^2 \frac{z^{2-n}}{k}} \right]}{\left[\frac{(x-\xi)^2}{k_x} + \frac{(y+\eta)^2}{k_y} + \left(\frac{2}{2-n}\right)^2 \frac{z^{2-n}}{k} \right]^{\frac{1}{4-2n}}} \right\} d\xi d\eta. \quad (47)$$

Анализ полученного решения (47) и применение его для расчетов при различных конкретных случаях распределения потока примеси на поверхности земли $P(x, y)$ может явиться предметом специального исследования. Укажем, в частности, что было бы интересно рассмотреть случай «ступенчатого» распределения потока $P(x, y)$, т. е. когда поток постоянен в некотором прямоугольнике или полосе, а вне этой области равен нулю. После проведения таких исследований окажется возможным рассмотрение упомянутой выше «обратной» задачи, представляющей с практической точки зрения наибольший интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лайхтман Д. Л., Чудновский А. Ф. Физика приземного слоя атмосферы, 1949, № 2.
2. Булашевич Ю. П. К теории интерпретации радиоактивных аномалий. Изв. АН СССР, серия географич. и геофизич., 1946, № 5.