Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXVII, вып. 3, 1961 г.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПАРАМЕТРАМИ

В. Г. Лабазин

Рассматриваемые в настоящей статье вопросы связаны с методом D-разбиений исследования распределения корней уравнений (см., например, [3]).

1. Приведем основные известные результаты, связанные с методом D-разбиений.

Пусть требуется исследовать распределение корней некоторого уравнения относительно мнимой оси плоскости корней. Введем в уравнение два вещественных параметра α и β, после чего оно примет вид

$$F(z, \alpha, \beta) = 0, \tag{1}$$

где $F(z, \alpha, \beta)$ предполагается целой функцией $z = x + iy$ и непрерывно дифференцируемой по α и β.

Обозначим

$$\begin{aligned} ReF(z, \alpha, \beta) &= u(x, y, \alpha, \beta), \\ ImF(z, \alpha, \beta) &= v(x, y, \alpha, \beta). \end{aligned} \tag{2}$$

Введем в рассмотрение плоскость параметров (α, β) и построим на этой плоскости линии чисто мнимых корней, т. е. геометрическое место точек, отвечающих значениям параметров α и β, при которых уравнение (1) имеет чисто мнимые корни $z = iy$. Используя обозначения (2), уравнение указанного геометрического места можно записать в виде

$$\begin{aligned} u(0, y, \alpha, \beta) &= 0, \\ v(0, y, \alpha, \beta) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Если определитель

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}, & \dfrac{\partial u}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \alpha}, & \dfrac{\partial v}{\partial \beta} \end{vmatrix} \tag{4}$$

отличен от нуля, то, решая систему (3) относительно α и β, получим уравнение линий чисто мнимых корней в параметрической форме

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(y); \\ \beta &= \beta(y). \end{aligned} \tag{5}$$

Линии, соответствующие (5), разобьют плоскость (α, β) на области, каждая из которых обладает тем свойством, что для всей совокупности значений параметров α, β, отвечающих ее внутренним точкам, уравнение (1) имеет одно и то же число корней с положительной вещественной частью.

Если штриховать левую сторону линии чисто мнимых корней при $D > 0$ и правую при $D < 0$, считая при том положительным направление на кривой, отвечающее возрастающим значениям y, то, как показал Ю. И. Неймарк [3], при переходе изображающей точки плоскости (α, β) с заштрихованной стороны кривой на незаштрихованную один (или несколько — в зависимости от числа штриховок) корень уравнения (1) приобретает положительную вещественную часть.

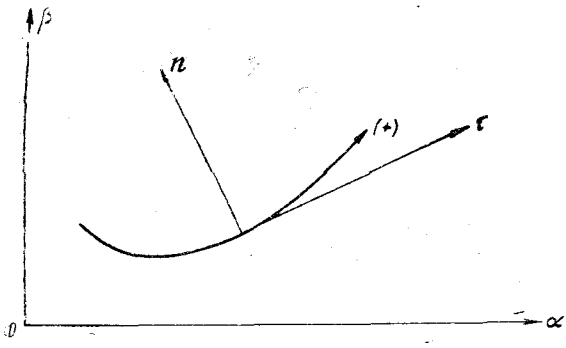


Рис. 1

Изложенный метод имеет следующий недостаток [1]. Может случиться, что при некоторых $y = y^*$ определитель (4) обратится в нуль. Это обстоятельство, в частности, всегда будет иметь место при $y = 0$ и $y = \infty$ в практически важном случае, когда функция $F(z, \alpha, \beta)$ в сопряженных точках принимает сопряженные значения. В указанном случае уравнения (3) перестают быть независимыми, они определят на плоскости (α, β) некоторую линию, все точки которой отвечают корню $z = iy^*$. Если эта линия не пересекается с линиями чисто мнимых корней, вдоль которых $D \neq 0$, то метод Ю. И. Неймарка не позволяет выбрать на ней определенную штриховку, что затрудняет исследование распределения корней.

Далее устанавливается способ штриховки упомянутых выше линий чисто мнимых корней, отвечающих случаю $y = 0$ и $y = \infty$, не предполагающий, что эти линии имеют в пределах чертежа точки пересечения с линиями, вдоль которых $D \neq 0$.

2. Пусть функция $F(z, \alpha, \beta)$ в уравнении (1) принимает в сопряженных точках сопряженные значения.

Рассмотрим линию на плоскости (α, β), отвечающую корню $z = 0$ $(y = 0)$. Вместо системы (3) получим в этом случае одно уравнение

$$u(0, y, \alpha, \beta) = 0, \tag{6}$$

которое будет уравнением геометрического места точек плоскости (α, β), отвечающих нулевым корням уравнения (1). В дальнейшем линию нулевых корней будем обозначать M_0.

Отнесем линию M_0 к системе осей (α, β). Переменную α будем считать независимой. Отметим на M_0 положительное направление, отвечающее возрастающим значениям α, и ориентируем в каждой точке кривой касательную τ и нормаль n так, чтобы система (τ, n) имела такую же ориентацию осей, как система (α, β), согласно рис. 1.

Рассмотрим на линии M_0 величину $\frac{dx}{dn}$, производную от вещественной части корня уравнения (1) по направлению нормали n. Очевидно, что

$$\frac{dx}{dn} = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \cos(n, \alpha) + \frac{\partial x}{\partial \beta} \cos(n, \beta). \tag{7}$$

Используя уравнение (6), находим

$$\cos(n,\ \alpha) = \frac{\frac{u_\alpha}{u_\beta}}{\sqrt{1+\frac{u_\alpha^2}{u_\beta^2}}},$$

$$\cos(n,\ \beta) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{u_\alpha^2}{u_\beta^2}}}, \tag{8}$$

где

$$u_\alpha = \frac{\partial u}{\partial \alpha};$$

$$u_\beta = \frac{\partial u}{\partial \beta}.$$

Если корни $z = x + iy$ уравнения $F(z, \tau) = 0$ рассматривать как функции параметра τ, то [2]

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{M^2}\left(\frac{\partial v^2}{\partial \tau}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial v}{\partial y}\right), \tag{9}$$

где

$$M^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2;$$

$$u = ReF(z, \tau);$$

$$v = ImF(z, \tau).$$

Применяя (9) к нашему случаю, найдем

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -\frac{1}{M^2}\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = -\frac{1}{M^2}\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{10}$$

Подставляя (10) и (8) в (7), получим

$$\frac{dx}{dn} = -\frac{1}{M^2}\left(\frac{u_\alpha \frac{u_\alpha}{u_\beta}}{\sqrt{1+\frac{u_\alpha^2}{u_\beta^2}}} + \frac{u_\beta}{\sqrt{1+\frac{u_\alpha^2}{u_\beta^2}}}\right)\frac{\partial v}{\partial y}$$

или после упрощений

$$\frac{dx}{dn} = -\frac{\sqrt{u_\alpha^2 + u_\beta^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}}\frac{|u_\beta|}{u_\beta}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{sign}\frac{dx}{dn} = -\operatorname{sign}\Delta, \tag{11}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \beta}. \tag{12}$$

Из (11) следует, что если при $\Delta > 0$ изображающая точка сместится с линии M_0 в сторону, отвечающую положительному направлению нормали, то, так как $\frac{dx}{dn} < 0$, нулевой корень уравнения (1) приобретает отрицательную вещественную часть. Обратное заключение можно сделать при $\Delta < 0$.

Таким образом, линия M_0 может штриховаться по правилу Ю. И. Неймарка, причем определитель D нужно положить равным выражению (12).

Случай $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, отвечающий бесчисленному множеству нулевых корней кратности выше первой, не представляет большого практического интереса.

При выводе формулы (11) направление на кривой выбиралось в соответствии с возрастанием переменной α. Если положительное направление на кривой выбрать отвечающим возрастанию переменной β, то соотношение (11) по-прежнему выполнено, причем

$$\Delta = -\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \alpha}. \tag{13}$$

Нормаль n ориентирована так же, как при выводе формулы (11).

В дополнение отметим, что для штриховки кривой M_∞, отвечающей бесконечным корням уравнения (1), можно применять доказанные правила, заменив предварительно в (1) $z = \frac{1}{t}$. В результате преобразования кривая M_∞ перейдет в кривую M_0.

3. Рассмотрим частный случай уравнения (1), важный для приложений

$$A(z)\alpha + B(z)\beta + C(z) = 0, \tag{14}$$

где $A(z)$, $B(z)$ и $C(z)$ — полиномы относительно z с вещественными коэффициентами

$$\begin{aligned} A(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \\ B(z) &= b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots, \\ C(z) &= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots, \end{aligned} \tag{15}$$

A, B и C могут быть также целыми функциями от z.

Уравнение линии M_0 нулевых корней, которая в данном случае будет прямой, имеет вид

$$a_0\alpha + b_0\beta + c_0 = 0. \tag{16}$$

Функции (2) в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} u &= (a_0 + \ldots)\alpha + (b_0 + \ldots)\beta + (c_0 + \ldots). \\ v &= (a_1 y + \ldots)\alpha + (b_1 y + \ldots)\beta + (c_1 y + \ldots). \end{aligned} \tag{17}$$

Вычисляем

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \alpha a_1 + \beta b_1 + c_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = b_0,$$

составляем определитель (12)

$$\Delta = b_0(\alpha a_1 + \beta b_1 + c_1). \tag{18}$$

Из (18) следует, что Δ на прямой M_0 будет изменять знак в точке $K(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, координаты которой получим совместным решением уравнений

$$a_0\alpha + b_0\beta + c_0 = 0,$$
$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0.$$

Отсюда

$$\bar{\alpha} = \frac{c_1b_0 - c_0b_1}{a_0b_1 - a_1b_0}, \quad \bar{\beta} = \frac{c_0a_1 - ca_0}{a_0b_1 - a_1b_0}. \tag{19}$$

Таким образом, направление штриховки прямой M_0 меняется в точке $K(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$. Если $a_0b_1 - a_1b_0 = 0$, то точка K отсутствует, и направление штриховки прямой M_0 не меняется.

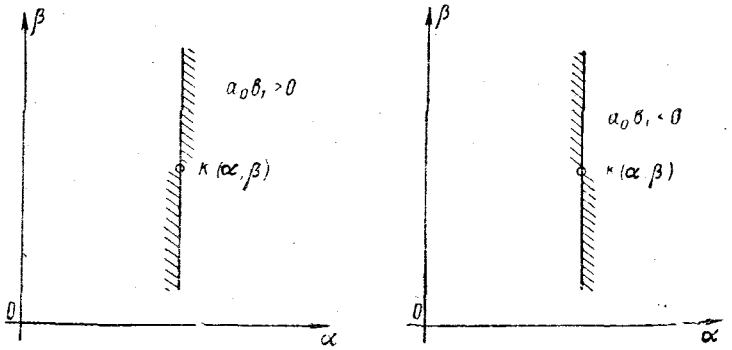


Рис. 2

Выясним знак Δ при $\alpha < \bar{\alpha}$ и $\alpha > \bar{\alpha}$. Положим для краткости

$$\varphi(\alpha, \beta) = \alpha a_1 + \beta b_1 + c_1.$$

Очевидно,

$$\Delta\varphi(\alpha, \beta) = a_1\Delta\alpha + b_1\Delta\beta. \tag{20}$$

Так как α и β должны удовлетворять уравнению прямой (16), то

$$\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha} = -\frac{a_0}{b_0}.$$

Поэтому (20) можно записать так:

$$\Delta\varphi(\alpha, \beta) = \left(a_1\Delta\alpha - b_1\frac{a_0}{b_0}\Delta\alpha\right) = \frac{a_1b_0 - a_0b_1}{b_0}\Delta\alpha.$$

Положим здесь $\alpha = \bar{\alpha}$. Учитывая, что

$$\varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta) - \varphi(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \Delta\varphi(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \frac{a_1b_0 - a_0b_1}{b_0}\Delta\bar{\alpha},$$

и, подставляя в (18), получим

$$\Delta = (a_1b_0 - a_0b_1)\Delta\bar{\alpha}. \tag{21}$$

Направление штриховки прямой M_0, отвечающее формуле (21), показано на рис. 2.

Рассмотрим случай $a_1b_0 - a_0b_1 = 0$, причем числители дробей (19) предположим отличными от нуля (в противном случае прямая M_0 окажется линией нулевых корней второй или более высокой кратности).

Выразим β из уравнения (16) и подставим в (18)

$$b_0\beta = -a_0\alpha - c_0,$$

$$\Delta = b_0a_1\alpha + b_1(-a_0\alpha - c_0) + c_1b_0 = (a_1b_0 - a_0b_1)\alpha + c_1b_0 - c_0b_1.$$

Учитывая, что $a_1b_0 - a_0b_1 = 0$, получим

$$\Delta = c_1b_0 - c_0b_1.$$

Таким образом, штрихуется левая сторона прямой M_0, если $c_1b_0 - c_0b_1 > 0$, и правая, если $c_1b_0 - c_0b_1 < 0$.

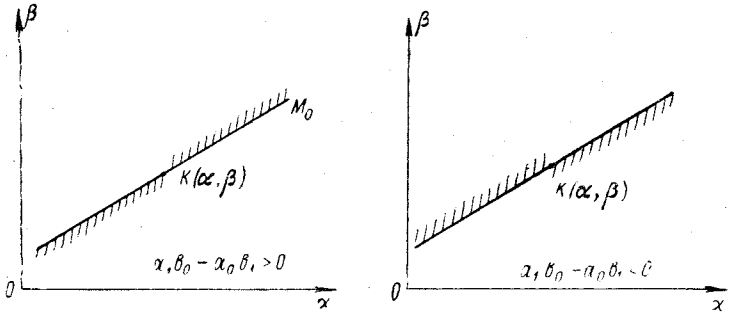


Рис. 3

Рассмотрим теперь случай $b_0 = 0$. Воспользовавшись формулой (11) и повторяя рассуждения, связанные с формулой (18), получим для Δ выражение

$$\Delta = -a_0(\alpha a_1 + \beta b_1 + c_1). \tag{22}$$

В этом случае направление на M_0 следует выбирать в соответствии с возрастанием независимой переменной β. Уравнение прямой M_0 (16) принимает при $b_0 = 0$ вид

$$a_0\alpha + c_0 = 0. \tag{23}$$

Координаты точки $K(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, в соответствии с (19),

$$\bar{\alpha} = -\frac{c_0}{a_0}, \quad \bar{\beta} = \frac{c_0a_1 - c_1a_0}{a_0b_1}. \tag{24}$$

При помощи формул (24) выражение (22) можно представить в виде

$$\Delta = -a_0b_1\Delta\beta, \tag{25}$$

где $\Delta\beta$ — приращение переменной β, считая от точки $K(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$.

В соответствии с (25) прямая M_0 штрихуется при $b_0 = 0$, как указано на рис. 3.

Если $b_1 = 0$, то из (24) вытекает, что точка K отсутствует. При $b_0 = 0$ и $b_1 = 0$ будем иметь из (22) и (23)

$$\Delta = -a_0(\alpha a_1 + c_1),$$

$$a_0\alpha + c_0 = 0.$$

Отсюда находим

$$\Delta = c_0a_1 - c_1a_0. \tag{26}$$

В соответствии с (26) прямая M_0 в случае $b_0 = 0$ и $b_1 = 0$ штрихуется слева при $c_0a_1 - c_1a_0 > 0$ и справа при $c_0a_1 - c_1a_0 < 0$ (направление в соответствии с возрастанием β). Случай $c_0a_1 - c_1a_0 = 0$ не рассмотрен, так как он отвечает кратным нулевым корням на прямой M_0.

4. Для удобства использования полученные выше результаты объединим в таблицу и приведем основные формулы.

Исследуемое уравнение

$$(a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots)\alpha + (b_0 + b_1z + b_2z^2 + \ldots)\beta + \\ + (c_0 + c_1z + c_2z^2 + \ldots) = 0.$$

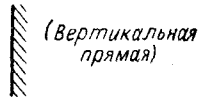
Уравнение прямой M_0 — линии нулевых корней

$$a_0\alpha + b_0\beta + c_0 = 0.$$

Координаты $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ точки K, в которой изменяется направление штриховки,

$$\bar{\alpha} = \frac{c_1b_0 - c_0b_1}{a_0b_1 - a_1b_0}, \quad \bar{\beta} = \frac{c_0a_1 - c_1a_0}{a_0b_1 - a_1b_0}.$$

Штриховка на прямую M_0 наносится в соответствии с приведенной таблицей.

Условие для коэффициентов	Расположение штриховки на прямой M_0, отнесенной к прямоугольной системе координат (α, β), α — ось абсцисс
$a_1b_0 - a_0b_1 > 0$	
$a_1b_0 - a_0b_1 < 0$	
$a_1b_0 - a_0b_1 = 0$ $c_1b_0 - c_0b_1 > 0$	
$a_1b_0 - a_0b_1 = 0$ $c_1b_0 - c_0b_1 < 0$	
$b_0 = b_1 = 0$ $c_0a_1 - c_1a_0 > 0$	
$b_0 = b_1 = 0$ $c_0a_1 - c_1a_0 < 0$	

Пример. Требуется исследовать уравнение

$$(1 + z + z^2)\alpha + (1 + z - z^2)\beta + 2 - z = 0.$$

Функции u и v в соответствии с (2) имеют вид

$$u = \alpha(1 - y^2) + \beta(1 + y^2) + 2,$$
$$v = \alpha y + \beta y - y.$$

По формуле (4) определитель

$$D = -2y^3.$$

Решая систему уравнений $u = 0$ и $v = 0$ относительно α и β, получим уравнение (9) линий чисто мнимых корней в параметрической форме

$$\alpha = \frac{y^2 + 3}{2y^2}, \quad \beta = \frac{y^2 - 3}{2y^2}.$$

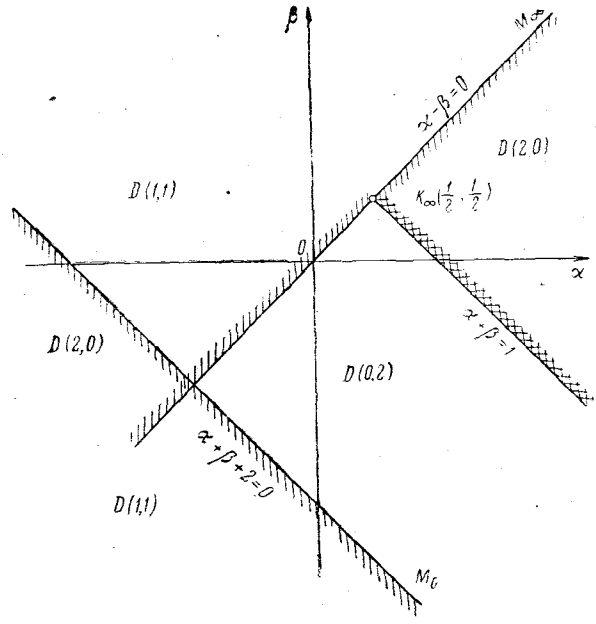


Рис. 4

Этим уравнениям отвечает прямая $\alpha + \beta = 1$. При изменении y^2 от 0 до $+\infty$ эта прямая пробегается изображающей точкой от $\alpha = +\infty$, $\beta = -\infty$ до $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$. Прямая штрихуется по известному правилу Ю. И. Неймарка.

Переходим к прямым M_0 и M_∞. В данном случае

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = 1, \quad c_0 = 2, \quad c_1 = -1.$$

Уравнение M_0

$$\alpha + \beta + 2 = 0.$$

В данном примере

$$a_1 b_0 - a_0 b_1 = 0,$$
$$c_1 b_0 - c_0 b_1 = -3 < 0$$

штриховка наносится в соответствии с четвертой строкой таблицы (рис. 4).

Для исследования M_∞ заменяем $z=\frac{1}{t}$ и получаем

$$\alpha(t^2+t+1)+\beta(t^2+t-1)+(2t^2-t)=0.$$

Имеем

$$a_0=1,\quad a_1=1,\quad b_0=-1,\quad b_1=1,\quad c_0=0,\quad c_1=-1.$$

Уравнение M_∞

$$\alpha-\beta=0.$$

координаты точки K_∞ находятся по (19). В данном случае

$$a_1b_0-a_0b_1=-2<0.$$

Штриховка наносится в соответствии со второй строкой таблицы. Для выяснения распределения корней данного уравнения в различных областях применяется обычная методика [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев Ю. В. и Дроздович В. Н. О методах исследования устойчивости систем регулирования с распределенными параметрами. «Автоматика и телемеханика», 1949, № 2.

2. Лабазин В. Г. Исследование распределения корней трансцендентных уравнений. «Вестник ЛГУ», 1953, № 3.

3. Неймарк Ю. И. Устойчивость линеаризованных систем. ЛКВВИА, 1949.