Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXVII, вып. 3, 1961 г.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ФОРМУЛЫ ГЮЛЬДЕНА

А. М. Журавский

Известная теорема Гюльдена, устанавливающая зависимость между объемом тела, образуемого вращением плоской фигуры, площадью этой фигуры и длиной окружности, описанной ее центром тяжести, является частным случаем гораздо более общего положения.

Пусть некоторая плоская фигура, площадь которой обозначим через S, перемещаясь в пространстве, образует тело, объем которого равен V. Центр тяжести площади C описывает при этом кривую. Длина дуги кривой, отсчитываемая от начального положения C_0, в дальнейшем обозначается через l.

При перемещении в пространстве плоская фигура никогда не проходит одну и ту же точку пространства дважды, так что ни в каких двух различных положениях фигуры нет общих точек. Мгновенные перемещения точек фигуры всегда направлены в одну сторону от мгновенного положения плоскости фигуры, и их проекции на непрерывно изменяющееся направление перпендикуляра к плоскости фигуры остаются одного знака.

Относя координаты точки $M(x, y, z)$ тела к некоторой неподвижной системе координатных осей, можно записать объем тела в виде

$$V = \int_D dv = \int\int\int_D dxdydz, \tag{1}$$

где интегрирование распространяется на область D пространства, занятую телом.

Положение точек тела может быть определено иначе. Возьмем мгновенное положение фигуры, соответствующее положению C центра тяжести, определяемому длиной дуги l. В плоскости мгновенного положения фигуры выберем систему прямоугольных осей с началом в точке C, непрерывно перемещающихся при движении фигуры. Координаты точки M относительно последней системы осей обозначим через u, v. Положение точки M в пространстве определяется величинами l, u, v, которые являются ее криволинейными координатами. Между координатами x, y, z точки M и координатами l, u, v имеют место соотношения

$$\begin{aligned} x &= x_C + u\cos\alpha' + v\cos\alpha'', \\ y &= y_C + u\cos\beta' + v\cos\beta'', \\ z &= z_C + u\cos\gamma' + v\cos\gamma'', \end{aligned} \tag{2}$$

где x_C, y_C, z_C — координаты точки C;
α', β', γ' и α'', β'', γ'' — углы, образуемые осями CU, CV с осями OX OY, OZ.

В новой системе координат объем V выражается равенством

$$V=\int\int\int_{D'}|I|\,dl\,du\,dv, \tag{3}$$

где D' — область изменения новых переменных l, u, v;

$$I=\begin{vmatrix} \frac{dx}{dl}, & \cos\alpha', & \cos\alpha'' \\ \frac{dy}{dl}, & \cos\beta', & \cos\beta'' \\ \frac{dz}{dl}, & \cos\gamma', & \cos\gamma'' \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Принимая во внимание равенства

$$\cos\alpha=\cos\beta'\cos\gamma''-\cos\beta''\cos\gamma',$$
$$\cos\beta=\cos\gamma'\cos\alpha''-\cos\gamma''\cos\alpha',$$
$$\cos\gamma=\cos\alpha'\cos\beta''-\cos\alpha''\cos\beta',$$

где α, β, γ — углы, образуемые перпендикуляром к плоскости фигуры с осями координат, равенство (4) можно переписать в виде

$$I=\frac{dx}{dl}\cos\alpha+\frac{dy}{dl}\cos\beta+\frac{dz}{dl}\cos\gamma, \tag{5}$$

или

$$I=\frac{\cos\alpha dx+\cos\beta dy+\cos\gamma dz}{dl}, \tag{5'}$$

Числитель правой части равенства (5′) представляет проекцию мгновенного перемещения точки фигуры на направление перпендикуляра к плоскости фигуры, одинаковую по знаку для всех точек фигуры во все время движения последней. Постоянство знака I оправдывает равенство (3) и позволяет переписать его в виде

$$V=\varepsilon\int\int\int_{D'} I\,dl\,du\,dv, \quad \varepsilon=\pm 1,$$

или

$$V=\varepsilon\int_0^L dl\int\int_{T_l} I\,du\,dv, \tag{6}$$

где L — длина кривой, описанной центром тяжести фигуры при образовании тела;
T_l — область изменения координат u, v, соответствующая мгновенному положению фигуры.

Пользуясь равенствами (2), можно переписать равенство (5) в виде

$$I=I_1(l)+uI_2(l)+vI_3(l), \tag{7}$$

где

$$I_1(l)=\frac{dx_c}{dl}\cos\alpha+\frac{dy_c}{dl}\cos\beta+\frac{dz_c}{dl}\cos\gamma; \tag{8}$$

$$I_2(l) = \frac{d\cos\alpha'}{dl}\cos\alpha + \frac{d\cos\beta'}{dl}\cos\beta + \frac{d\cos\gamma'}{dl}\cos\gamma; \tag{9}$$

$$I_3(l) = \frac{d\cos\alpha''}{dl}\cos\alpha + \frac{d\cos\beta''}{dl}\cos\beta + \frac{d\cos\gamma''}{dl}\cos\gamma. \tag{10}$$

Из равенства (6), в силу равенства (7), следует, что

$$V = \int_0^L \left\{ I_1(l) \iint_{T_l} dudv + I_2(l) \iint_{T_l} ududv + I_3(l) \iint_{T_l} vdudv \right\} dl. \tag{11}$$

Приняв во внимание, что

$$\iint_{T_l} dudv = S$$

и

$$\iint_{T_l} ududv = \iint_{T_l} vdudv = 0,$$

перепишем (11) в виде

$$V = \varepsilon \int_0^L I_1(l)\, Sdl. \tag{12}$$

Пусть λ, μ, ν обозначают углы, образуемые касательной к траектории центра тяжести фигуры с осями OX, OY, OZ.

Равенства

$$\frac{dx_c}{dl} = \cos\lambda,$$

$$\frac{dy_c}{dl} = \cos\mu,$$

$$\frac{dz_c}{dl} = \cos\nu$$

позволяют представить равенство (8) в виде

$$I_1(l) = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = \cos\varphi, \tag{13}$$

где φ — угол между перпендикуляром к плоскости фигуры и касательной к траектории центра тяжести.

Из равенства (12), согласно (13), следует, что

$$V = \int_0^L S\cos\varphi dl. \tag{14}$$

При $\varphi = 0$ и S, остающейся постоянной, из равенства (14) следует, что

$$V = SL. \tag{15}$$

Равенство (15) выражает теорему.

Теорема. Объем тела, образованного движением фигуры, перемещающейся в пространстве так, что плоскость фигуры остается ортогональной к траектории, описываемой центром тяжести фигуры, а площадь фигуры остается постоянной, равен произведению площади фигуры на длину траектории, описанной центром тяжести площади.

Установленная теорема позволяет с большой простотой определять объемы сложных тел, встречающихся в технических расчетах.