Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXVII, вып. 3, 1961 г.

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ТЕТА-ФУНКЦИЯХ

А. М. Журавский

1. Широкое обобщение тета-функций дается решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

ствечающим граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x}_{x=0} = h_0 u(0,\ t),\ h_0 \geqslant 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}_{x=1} = -h_1 u(1,\ t),\ h_1 \geqslant 0 \tag{3}$$

и начальному условию

$$u(x,\ 0) = \delta(x - x'),\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant x' \leqslant 1, \tag{4}$$

где $\delta(x - x')$ — обобщенная функция, определяемая равенствами

$$\delta(x - x') = 0,\quad x \neq x';$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x')\, dx = 1.$$

Это решение $\theta\ (x',\ x,\ t)$ может быть представлено разложением [1]

$$\theta(x',\ x,\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x'-x+2k)^2}{4t}} F_{k,k}(x',\ x,\ t;\ h_0,\ h_1) + \right.$$

$$\left. + \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x'+x+2k)^2}{4t}} F_{k+1,k}(x',\ x,\ t;\ h_0,\ h_1)\right\}. \tag{5}$$

Функции $F_{k,l}(x',\ x,\ t;\ h_0,\ h_1)$ вещественны и удовлетворяют неравенству

$$|F_{k,l}(x',\ x,\ t;\ h_0,\ h_1)| \leqslant 1,\quad l = k,\ k-1. \tag{6}$$

Они определяются равенствами

$$F_{k,l}(x',\ x,\ t;\ h_0,\ h_1)=\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{\frac{n_{k,l}^2}{4t}}\int_{-\infty}^{+\infty}H_{k,l}(z)\,e^{-z^2t+n_{k,l}zi}dz, \tag{7}$$

где

$$H_{k,l}(z)=\frac{(z-h_0i)^k(z-h_1i)^l}{(z+h_0i)^k(z+h_1i)^l},\quad l=k,\quad k-1, \tag{8}$$

и

$$n_{k,l}=\begin{cases}x'-x+2k, & l=k\\ x'+x+2(k-1), & l=k-1.\end{cases} \tag{9}$$

Цель статьи — указать выражение функций $F_{k,l}(x',\ x,\ t;\ h_0,\ h_1)$, позволяющее использовать обобщенные функции тета для практического расчета. В основном рассматривается случай $h_0=h_1$. Исходным пунктом исследования служит равенство (7), определяющее функции $F_{k,l}(x',\ x,\ t;\ h_0,\ h_1)$. Изучение интеграла, входящего в правую часть равенства (7), приводит к искомым выражениям. В статье разбираются свойства функций $F_{k,l}(x',\ x,\ t;\ h_0,\ h_1)$, дается их общее выражение и приводятся таблицы, облегчающие расчет.

2. Решение дифференциального уравнения (1), отвечающее граничным условиям (2), (3) и начальному условию (4), дается разложением [1]

$$\theta(x',\ x,\ t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}H_{k,k}(z)\,e^{-z^2t+n_{k,k}zi}dz+\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{+\infty}H_{k+1,k}(z)\,e^{-z^2t+n_{k+1,k}zi}dz\right\}. \tag{10}$$

Легко проверить, что разложение (10) формально удовлетворяет всем поставленным условиям. Функция

$$u_0=e^{-z^2t+n_{l,k}zi} \tag{11}$$

является решением уравнения (1). Таким образом, отдельные члены бесконечного ряда в правой части равенства (10), а следовательно, и сумма ряда $\theta\ (x',\ x,\ t)$ удовлетворяют уравнению (1).

Учитывая соотношение

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}=(-1)^{l-k+1}u_0zi;$$

нетрудно убедиться, что для функции

$$u_{l,k}=H_{l,k}(z)\,e^{n_{l,k}zi},\quad l=k,\quad k+1$$

выполняются равенства

$$\left\{\frac{\partial u_{l,k}}{\partial x}-h_0u_{l,k}\right\}_{x=0}=(-1)^{l-k+1}\{u_{l,k}\}_{x=0}(z-(-1)^{l-k}h_0i)\,i,\quad l=k,\quad k+1$$

и

$$\sum_{l=k}^{k+1}\left\{\frac{\partial u_{l,k}}{\partial x}-h_0u_{l,k}\right\}_{x=0}=0. \tag{12}$$

Из равенства (12) следует, что общий член разложения (10) и его сумма $\theta(x', x, t)$ удовлетворяют граничному условию (2).

При $x=1$

$$\left\{\frac{\partial u_{k,l}}{\partial x}+h_1 u_{k,l}\right\}_{x=1}=(-1)^{k-l+1}\{u_{k,l}\}_{x=1}(z+(-1)^{k-l}h_1 i)\,i,\quad l=k,\quad k-1$$

и

$$\sum_{l=k-1}^{k}\left\{\frac{\partial u_{k,l}}{\partial x}+h_1 u_{k,l}\right\}_{x=1}=0. \tag{13}$$

Из равенства (13) следует, что общий член разложения

$$\theta(x', x, t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}H_{k,k}(z)\,e^{-z^2t+n_{k,k}zi}dz+\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{+\infty}H_{k,k-1}(z)\,e^{-z^2t+n_{k,k-1}zi}dz\right\},$$

а, следовательно, и его сумма удовлетворяют граничному условию (3).

Обоснованность указанных выводов в отношении разложения (10) вытекает из его равномерной сходимости, обеспеченной представлением (5) и неравенством (6). При $x\neq x'$ и $t\to 0$ из разложения (5) следует, что

$$\theta(x', x, 0)=0\quad x\neq x'. \tag{14}$$

Интеграл

$$\int_0^1\theta(x', x, t)\,dx=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_0^1 e^{-\frac{n_{k,k}^2}{4t}}F_{k,k}(x', x, t; h_0, h_1)\,dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^1 e^{-\frac{n_{k+1,k}^2}{4t}}F_{k+1,k}(x', x, t; h_0, h_1)\,dx\right\}. \tag{15}$$

При $k=0$ [1]

$$F_{0,0}(x', x, t; h_0, h_1)=1$$

и

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^1 e^{-\frac{n_{0,0}^2}{4t}}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x'}{2\sqrt{t}}}^{\frac{1-x'}{2\sqrt{t}}}e^{-\tau^2}d\tau\to 1\quad(0<x'<1)$$

при $t\to 0$.

При $k\neq 0$ в силу неравенства (6)

$$\left|\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^1 e^{-\frac{n_{k,k}^2}{4t}}F_{k,k}(x', x, t; h_0, h_1)\,dx\right|<\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x'+2k}{2\sqrt{t}}}^{\frac{1-x'-2k}{2\sqrt{t}}}e^{-\tau^2}d\tau.$$

Последнее неравенство показывает, что

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^1 e^{-\frac{n_{k,k}^2}{4t}}F_{k,k}(x',\ x,\ t;\quad h_0,\ h_1)\,dx \to 0 \quad (0<x'<1)$$

при $t \to 0$.

Таким же образом легко убедиться, что

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^1 e^{-\frac{n_{k+1,k}^2}{4t}}F_{k+1,k}(x',\ x,\ t;\quad h_0,\ h_1)\,dx \to 0 \quad (0<x'<1)$$

при $t \to 0$.

Равенство (15) показывает, что

$$\int_0^1 \theta(x',\ x,\ t)\,dx \to 1 \quad (0<x'<1)$$

при $t \to 0$, ибо стремление членов и остатка разложения (15) к нулю равномерно относительно значка суммирования k.

Таким образом, начальное условие (4) оказывается также удовлетворенным.

3. Изучение структуры членов разложения (10) целесообразно начать с простейшего случая $h_0 = h_1 = h$ и рассмотреть интеграл

$$I_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(z)^k e^{-mz^2+nzi}dz, \tag{16}$$

где

$$H(z) = \frac{z-hi}{z+hi}. \tag{17}$$

Интегралами вида (16) выражаются в рассматриваемом случае члены разложения (10). Между интегралами I_k имеет место соотношение

$$I_{k+1} = I_{k-1} + \frac{2h}{k}\cdot\frac{\partial I_k}{\partial h}, \tag{18}$$

позволяющее выразить интеграл I_{k+1} через предыдущие. Равенство (18) вытекает из соотношений

$$I_{k+1} - I_{k-1} = -\frac{2hi}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z}{z^2+h^2}H(z)^k e^{-mz^2+nzi}dz$$

и

$$\frac{\partial I_k}{\partial h} = -\frac{ki}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z}{z^2+h^2}H(z)^k e^{-mz^2+nzi}dz,$$

проверяемых непосредственно.

Как известно, [1]

$$I_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi m}}e^{-\frac{n^2}{4m}} \tag{19}$$

и

$$I_1 = I_0\left[1 - 2h\sqrt{\pi m}\,\psi\left(h\sqrt{m} + \frac{n}{2\sqrt{m}}\right)\right], \tag{20}$$

где

$$\psi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{z^2} \int_z^\infty e^{-\tau^2} d\tau.$$

Интеграл I_k может быть выражен равенством

$$I_k = I_0\left[A_k + 2B_k\sqrt{\pi m}\,\psi(\nu)\right], \tag{21}$$

где

$$\nu = h\sqrt{m} + \frac{n}{2\sqrt{m}}, \tag{22}$$

а коэффициенты A_k, B_k зависят от h, m, n и связаны между собой соотношениями

$$A_{k+1} = A_{k-1} + \frac{2h}{k} \cdot \frac{\partial A_k}{\partial h} - \frac{8mh}{k} B_k \tag{23}$$

и

$$B_{k+1} = B_{k-1} + \frac{2h}{k} \cdot \frac{\partial B_k}{\partial h} + \frac{2h}{k}(2mh + n) B_k. \tag{24}$$

При этом

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 1, \quad B_0 = 0, \quad B_1 = -h.$$

Равенства (23) и (24) позволяют определить последовательно B_k и A_k для всех значений указателя k. Предполагая A_k и B_k определенными из уравнений (23) и (24), покажем справедливость равенства (21), которое имеет место для $k = 0,1$. Допустив его справедливость для всех значений указателя, не превосходящих k, докажем его справедливость и для значения указателя, равного $k + 1$.

Производная

$$\frac{\partial I_k}{\partial h} = I_0\left[\frac{\partial A_k}{\partial h} + 2\sqrt{\pi m}\,\psi(\nu)\frac{\partial B_k}{\partial h} + 2\sqrt{\pi m} B_k \frac{\partial \psi(\nu)}{\partial h}\right]$$

в силу соотношения [1]

$$\frac{d\psi(\nu)}{d\nu} = 2\nu\psi(\nu) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

представляется в виде

$$\frac{\partial I_k}{\partial h} = I_0\left[\frac{\partial A_k}{\partial h} - 4mB_k + 2\left(2\nu\sqrt{m}B_k + \frac{\partial B_k}{\partial h}\right)\sqrt{\pi m}\,\psi(\nu)\right].$$

Внесем в правую часть равенства (18) полученное выражение производной и выражения I_{k-1} из равенства (21). Получаем

$$I_{k+1} = I_0\left[A_{k-1} + \frac{2h}{k} \cdot \frac{\partial A_k}{\partial h} - \frac{8mh}{k} B_k + \right.$$

$$\left. + 2\left(B_{k-1} + \frac{2h}{k} \cdot \frac{\partial B_k}{\partial h} + \frac{4h\nu}{k}\sqrt{m}\right) B_k \sqrt{\pi m}\,\psi(\nu)\right].$$

Учитывая (22), можно переписать I_{k+1} в виде

$$I_{k+1} = I_0\left[A_{k-1} + \frac{2h}{k} \cdot \frac{\partial A_k}{\partial h} - \frac{8mh}{k} B_k + \right.$$

$$\left. + 2\left(B_{k-1} + \frac{2h}{k} \cdot \frac{\partial B_k}{\partial h} + \frac{2h}{k}(2mh + n)\right) B_k \sqrt{\pi m}\,\psi(\nu)\right].$$

В силу (23 и (24) последнее равенство заменяется равносильным

$$I_{k+1}=I_0\left[A_{k+1}+2B_{k+1}\sqrt{\pi m}\psi(\nu)\right].$$

Справедливость равенства (21) установлена. Исследование интеграла (16) приведено к исследованию решений системы (23), (24).

4. Величины $B_k=B_k(m, n, h)$ определяются последовательно равенствами (24), если учесть, что в силу (19) и (20)

$$B_0=0, \quad B_1=-h.$$

Из равенства (24) следует, что B_k есть многочлен относительно m, n, h с рациональными коэффициентами. Степень B_k относительно m и n равна $k-1$. Степень B_k относительно h равна $2k-1$.

Из соотношения (24) следует, что

$$B_{k+1}(m, n, 0)=B_{k-1}(m, n, 0).$$

Принимая во внимание, что

$$B_0(m, n, 0)=B_1(m, n, 0),$$

заключаем

$$B_k(m, n, 0)=0$$

при любом указателе k. Многочлен, выражающий B_k через m, n, h, делится на h, и B_k можно представить в виде

$$B_k=-hP_k, \tag{25}$$

где P_k — многочлен, зависящий от m, n, h.

Соотношение (24) дает место равенству

$$P_{k+1}=P_{k-1}+\frac{2}{k}(2mh^2+nh+1)P_k+\frac{2h}{k}\cdot\frac{\partial P_k}{\partial h}. \tag{26}$$

Начальные условия для определения P_k

$$P_0=0, \quad P_1=1. \tag{27}$$

Если вместо m и n ввести новые переменные

$$u=mh^2, \quad v=nh,$$

то, пользуясь (26) и начальными условиями (27), нетрудно убедиться, что P_k зависит только от u, v.

Предположим для всех значений указателя, не бо́льших k,

$$P_k=\sum_{0\leqslant s+t<k} b_{k, s, t}u^s v^t,$$

где $b_{k, s, t}$ — постоянные, не зависящие от m, n, h.

Из равенства (26) следует, что

$$P_{k+1}=P_{k-1}+\frac{2}{k}(2u+v+1)P_k+\frac{2h}{k}\left(2mh\frac{\partial P_k}{\partial u}+n\frac{\partial P_k}{\partial v}\right)$$

или

$$P_{k+1}=P_{k-1}+\frac{2}{k}(2u+v+1)P_k+\frac{2}{k}\left(2u\frac{\partial P_k}{\partial u}+v\frac{\partial P_k}{\partial v}\right). \tag{28}$$

Последнее равенство показывает, что P_{k+1} также зависит только от u и v.

Пользуясь равенством (28), легко получить систему уравнений, дающих выражение коэффициентов $b_{k+1,s,t}$ через коэффициенты $b_{k-1,s,t}$ и $b_{k,s,t}$,

$$b_{k+1,s,t}=\frac{2}{k}(2s+t+1)\,b_{k,s,t}+\frac{4}{k}b_{k,s-1,t}+\frac{2}{k}b_{k,s,t-1}+b_{k-1,s,t}. \quad (29)$$

В равенстве (29) коэффициенты $b_{k,s,t}$, имеющие отрицательные указатели, или такие, что $s+t\geqslant k$, следует полагать равными 0.

Равенство (29) при условиях

$$b_{0,0,0}=0, \quad b_{1,0,0}=1 \quad (30)$$

позволяет найти последовательно все коэффициенты $b_{k,s,t}$.

Эти коэффициенты — положительные рациональные числа.

Коэффициент

$$b_{k,k-1,0}=\frac{2^{2k-2}}{(k-1)!}, \quad (31)$$

как следует из уравнения

$$b_{k+1,k,0}=\frac{4}{k}b_{k,k-1,0}$$

и начальных условий (30).

Коэффициент

$$b_{k,0,k-1}=\frac{2^{k-1}}{(k-1)!}, \quad (32)$$

что вытекает из уравнения

$$b_{k+1,0,k}=\frac{2}{k}b_{k,0,k-1}$$

и начальных условий (30).

Свободный член, не содержащий u, v, имеет коэффициент $b_{k,0,0}$, определяемый уравнением

$$b_{k+1,0,0}=\frac{2}{k}b_{k,0,0}+b_{k-1,0,0},$$

откуда при начальных условиях (30)

$$b_{k,0,0}=k. \quad (33)$$

Коэффициент $b_{k,0,1}$ находится из уравнения

$$b_{k+1,0,1}=\frac{4}{k}b_{k,0,1}+b_{k-1,0,1}+2$$

при начальных условиях $b_{1,0,1}=b_{0,0,1}=0$

$$b_{k,0,1}=k(k-1). \quad (34)$$

Коэффициент $b_{k,0,2}$ определяется из уравнения

$$b_{k+1,0,2}=\frac{6}{k}b_{k,0,2}+b_{k-1,0,2}+2(k-1)$$

при начальных условиях $b_{2,0,2}=b_{1,0,2}=0$

$$b_{k,0,2}=\frac{k(k-1)(k-2)}{3}. \quad (35)$$

Коэффициент $b_{k,0,3}$ находится из уравнения

$$b_{k+1,0,3}=\frac{8}{k}\,b_{k,0,3}+b_{k,0,3}+\frac{2}{3}(k-1)(k-2)$$

при начальных условиях $b_{3,0,3}=b_{2,0,3}=0$ и оказывается равным

$$b_{k,0,3}=\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{2\cdot 3^2}. \tag{36}$$

Коэффициент $b_{k,0,t}$ определяется из уравнения

$$b_{k+1,0,t}=\frac{2(t+1)}{k}\,b_{k,0,t}+\frac{2}{k}\,b_{k,0,t-1}+b_{k-1,0,t} \tag{37}$$

при начальных условиях $b_{k,0,k}=b_{k-1,0,k}=0$, причем коэффициент $b_{k,0,t-1}$ считается уже найденным.

Если положить

$$b_{k,0,t}=\frac{k(k-1)\ldots(k-t)}{m_t}, \tag{38}$$

где m_t не зависит от k, то для $t=1, 2, 3$ равенство (38) справедливо. Предположив справедливость равенства (38) для значений третьего указателя, меньших t, будем искать решения уравнения

$$b_{k+1,0,t}=\frac{2(t+1)}{k}\,b_{k,0,t}+\frac{2(k-1)\ldots(k-t+1)}{m_{t-1}}+b_{k-1,0,t} \tag{39}$$

в той же форме (38). Подстановка выражения (38) в правую часть равенства (39) дает

$$b_{k+1,0,t}=\frac{(k-1)\ldots(k-t+1)}{m_t m_{t-1}}\{2(t+1)(k-t)\,m_{t-1}+2m_t+$$
$$+(k-t)(k-t-1)\,m_{t-1}\},$$

или

$$b_{k+1,0,t}=\frac{(k-1)\ldots(k-t+1)}{m_t m_{t-1}}\{(k+1)\,km_{t-1}+2m_t-(t+1)\,tm_{t-1}\}. \tag{40}$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (40), совпадает с выражением (38) для $b_{k+1,0,t}$, если выбор чисел m_t подчинен условию

$$2m_t=(t+1)\,tm_{t-1}. \tag{41}$$

Положив

$$m_1=1,$$

получаем из (41)

$$m_2=3,\quad m_3=2\cdot 3^2$$

и вообще

$$m_t=\frac{(t+1)\,t^2(t-1)^2\ldots 2^2\cdot 1}{2^t}. \tag{42}$$

Равенство (38) при выборе m_t, согласно (42), дает решение уравнения (37)

$$b_{k,0,t}=\frac{2^t k(k-1)\ldots(k-t)}{(t+1)\,t^2(t-1)^2\ldots 2^2\cdot 1}.$$

5. Не развивая дальше общих формул для коэффициентов $b^*_{k,s,t}$, укажем величины коэффициентов $b_{k,s,t}$ (табл. 1—4) для первых пяти

* Общее выражение коэффициента

$$b_{k,s,t}=\frac{(k+s)(k+s-1)\ldots(k-s-t)}{(2s+1)!\,s!\,(t+1)!\,t!}\,2^{2s+t}.$$

значений k и соответствующие им выражения полиномов P_k и коэффициентов B_k

$$\boxed{k=1}$$

$$b_{1,0,0}=1, \quad P_1=1, \quad B_1=-h; \tag{43}$$

Таблица 1

$b_{2,s,t}$

s	t	
	0	1
0	2	2
1	4	

Таблица 2

$b_{3,s,t}$

s	t		
	0	1	2
0	3	6	2
1	16	8	
2	8		

$$\boxed{k=2}$$

$$P_2=2+2v+4u, \tag{44}$$

$$B_2=-2h\,[1+nh+2mh^2], \tag{45}$$

$$\boxed{k=3};$$

$$P_3=3+6v+2v^2+16u+8uv+8u^2, \tag{46}$$

$$B_3=-h\,[3+6nh+2n^2h^2+16mh^2+8mnh^3+8m^2h^4], \tag{47}$$

$$\boxed{k=4};$$

$$P_4=4+12v+8v^2+\frac{4}{3}v^3+40u+40uv+8uv^2+$$

$$+48u^2+16u^2v+\frac{32}{3}u^3, \tag{48}$$

$$B_4=-h\Big[4+12nh+8n^2h^2+\frac{4}{3}n^3h^3+40mh^2+40mnh^3+$$

$$+8mn^2h^4+48m^2h^4+16m^2nh^5+\frac{32}{3}m^3h^6\Big], \tag{49}$$

$$\boxed{k=5};$$

$$P_5=5+20v+20v^2+6{,}6667v^3+0{,}6667v^4+80u+120uv+$$
$$+48uv^2+5{,}3333uv^3+168u^2+112u^2v+16u^2v^2+85{,}3333u^3+$$
$$+21{,}3333u^3v+10{,}6667u^4;$$
$$B_5=-h\,[5+20nh+20n^2h^2+6{,}6667n^3h^3+0{,}6667n^4h^4+$$
$$+80mh^2+120mnh^3+48mn^2h^4+5{,}3333mn^3h^5+$$
$$+168m^2h^4+112m^2nh^5+16m^2n^2h^6+85{,}3333m^3h^6+$$
$$+21{,}3333m^3nh^7+10{,}6667m^4h^8].$$

Таблица 3

$b_{4,s,t}$

s	t			
	0	1	2	3
0	4	12	8	4/3
1	40	40	8	
2	48	16		
3	32/3			

Таблица 4

$b_{5,s,t}$

s	t				
	0	1	2	3	4
0	5	20	20	20/3	2/3
1	80	120	48	16/3	
2	168	112	16		
3	256/3	64/3			
4	32/3				

6. Коэффициенты A_k находятся из уравнения (23) по начальным условиям

$$A_0 = A_1 = 1.$$

Из уравнения (23) непосредственно видно, что A_k — полиномы относительно m, n, h. Учитывая строение коэффициента B_k, можно утверждать, что степень полинома, выражающего A_k, относительно m и n равна $k-1$ $(k>0)$. Степень того же полинома относительно h равна $2k-2$.

Коэффициенты полинома — положительные рациональные числа. В переменных

$$u = mh^2, \quad v = nh$$

коэффициент A_k выражается полиномом

$$A_k = \sum_{0 \leqslant s+t \leqslant k-1} a_{k,s,t} u^s v^t = Q_k(u, v) \quad (k>0). \tag{50}$$

В справедливости этого утверждения можно убедиться, допустив его правильность для всех значений указателя, не превосходящих k. Из выражения (50) следует, что

$$h \frac{\partial A_k}{\partial h} = 2u \frac{\partial Q_k}{\partial u} + v \frac{\partial Q_k}{\partial v}. \tag{51}$$

Равенство (23) в силу принятого допущения и свойства (25) коэффициента B_k дает

$$A_{k+1} = \frac{2}{k}\left(2u \frac{\partial Q_k}{\partial u} + v \frac{\partial Q_k}{\partial v}\right) + \frac{8u}{k} P_k + Q_{k-1}. \tag{52}$$

Как показывает равенство (52), коэффициент A_{k+1} имеет ту же форму (50), что и A_k.

В частности отсюда получаем

$$A_2 = 8u + 1. \tag{53}$$

Равенства (50) и (52) позволяют установить рекурентное соотношение, связывающее коэффициенты $a_{k,s,t}$,

$$a_{k+1,s,t} = \frac{2}{k}(2s+t) a_{k,s,t} + a_{k-1,s,t} + \frac{8}{k} b_{k,s-1,t}. \tag{54}$$

Следует учитывать, что в равенство (54) не могут входить коэффициенты $a_{k,s,t}$, у которых указатели k, s, t имеют отрицательное значение, или такие, у которых $s+t \geqslant k$. Поэтому должно положить

$$a_{k,s,t}=0$$

при $k<0$ или $s<0$ или $t<0$, или $s+t \geqq k$.

Из выражений, указанных для A_0 и A_1, следует

$$a_{0,0,0}=1, \quad a_{1,0,0}=1. \tag{55}$$

Из (54) при $s=k$ и $t=0$

$$a_{k+1,k,0}=\frac{8}{k} b_{k,k-1,0},$$

что в силу (31) дает

$$a_{k+1,k,0}=\frac{2^{2k+1}}{k!}. \tag{56}$$

При $s=0$ и $t=k$

$$a_{k+1,0,k}=0 \quad k>0. \tag{57}$$

При $s=0$ и $t=k-1$

$$a_{k+1,0,k-1}=\frac{2(k-1)}{k} a_{k,0,k-1},$$

откуда в силу (57) следует

$$a_{k+1,0,k-1}=0 \quad k>1. \tag{58}$$

При $s=0$ и $t=k-2$

$$a_{k+1,0,k-2}=\frac{2(k-2)}{k} a_{k,0,k-2}+a_{k-1,0,k-2},$$

откуда вследствие (57) и (58)

$$a_{k+1,0,k-2}=0 \quad k>2. \tag{59}$$

Нетрудно видеть, что вообще

$$a_{k+1,0,t}=0 \quad t>0. \tag{60}$$

Если положить $s=t=0$, то

$$a_{k+1,0,0}=a_{k-1,0,0},$$

откуда, согласно (55),

$$a_{k,0,0}=1. \tag{61}$$

7. Не развивая общих формул для $a_{k,s,t}$, укажем их величины для шести первых значений k (табл. 5—8) и соответствующие выражения полиномов Q_k и коэффициентов A_k

$$\boxed{k=0}$$

$$a_{0,0,0}=1, \quad Q_0=1, \quad A_0=1; \tag{62}$$

$$\boxed{k=1}$$

$$a_{1,0,0}=1, \quad Q_1=1, \quad A_1=1; \tag{63}$$

$$\boxed{k=2}$$

$$Q_2=1+8u, \tag{64}$$

$$A_2=1+8mh^2; \tag{65}$$

$$\boxed{k=3}$$

Таблица 5

$a_{2,s,t}$

s	t	
	0	1
0	1	0
1	8	

Таблица 6

$a_{3,s,t}$

s	t		
	0	1	2
0	1	0	0
1	24	8	
2	16		

$$Q_3=1+24u+8uv+16u^2, \tag{66}$$

$$A_3=1+24mh^2+8mnh^3+16m^2h^4; \tag{67}$$

$$\boxed{k=4}$$

Таблица 7

$a_{4,s,t}$

s	t			
	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	48	32	16/3	
2	256/3	64/3		
3	64/3			

$$Q_4=1+48u+32uv+5{,}3333uv^2+85{,}3333u^2+ \\ +21{,}3333u^2v+21{,}3333u^3, \tag{68}$$

$$A_4=1+48mh^2+32mnh^3+5{,}3333mn^2h^4+85{,}3333m^2h^4+ \\ +21{,}3333m^2nh^5+21{,}3333m^3h^6; \tag{69}$$

$$k=5$$

$$Q_5 = 1 + 80u + 80uv + 26{,}6667uv^2 + 2{,}6667uv^3 + 266{,}6667u^2 + \\ + 133{,}3333u^2v + 16u^2v^2 + 160u^3 + 32u^3v + 21{,}3333u^4, \qquad (70)$$

$$A_5 = 1 + 80mh^2 + 80mnh^3 + 26{,}6667mn^2h^4 + 2{,}6667mn^3h^5 + \\ + 266{,}6667m^2h^4 + 133{,}3333m^2nh^5 + 16m^2n^2h^6 + \\ + 160m^3h^6 + 32m^3nh^7 + 21{,}3333m^4h^8. \qquad (71)$$

Таблица

$a_{5,s,t}$

s	t				
	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	80	80	80/3	8/3	
2	800/3	400/3	16		
3	160	32			
4	64/3				

8. Полученные результаты позволяют указать выражение функций $F_{k,l}(x', x, t; h, h)$, входящих в разложение (5). Из (7), (8) и (17) следует, что

$$F_{k,k}(x', x, t; h, h) = \sqrt{\frac{t}{\pi}}\, e^{\frac{n_{k,k}^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} H(z)^{2k} e^{-z^2t + n_{k,k} z i}\, dz, \qquad (72)$$

$$F_{k+1,k}(x', x, t; h, h) = \sqrt{\frac{t}{\pi}}\, e^{\frac{n_{k+1,k}^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} H(z)^{2k+1} e^{-z^2t + n_{k+1,k} z i}\, dz, \qquad (73)$$

где $n_{k,k}$ и $n_{k+1,k}$ определяются равенством (9). В силу (19), (21) из (72) и (73) следует

$$F_{k,k}(x', x, t; h, h) = A_{2k}(t, n_{k,k}, h) + 2B_{2k}(t, n_{k,k}, h)\sqrt{\pi t}\,\psi(\nu_{k,k}), \qquad (74)$$

$$F_{k+1,k}(x', x, t; h, h) = A_{2k+1}(t, n_{k+1,k}, h) + \\ + 2B_{2k+1}(t, n_{k+1,k}, h)\sqrt{\pi t}\,\psi(\nu_{k+1,k}), \qquad (75)$$

где $A_{2k}(t, n_{k,k}, h)$ и $B_{2k}(t, n_{k,k}, h)$ получаются из выражений коэффициентов A_{2k} и B_{2k} при замене m на t и n на $n_{k,k}$, а $A_{2k+1}(t, n_{k+1,k}, h)$ и $B_{2k+1}(t, n_{k+1,k}, h)$ — из выражений коэффициентов A_{2k+1} и B_{2k+1} при замене m на t и n на $n_{k+1,k}$.

Величины $\nu_{k,k}$ и $\nu_{k+1,k}$ определяются равенствами

$$\nu_{k,\,k}=\frac{2ht+n_{k,\,k}}{2\sqrt{t}} \tag{76}$$

и

$$\nu_{k+1,\,k}=\frac{2ht+n_{k+1,\,k}}{2\sqrt{t}}\,. \tag{77}$$

Если вместо функций $F(x',\ x,\ t;\ h,\ h)$ ввести функции

$$\Phi_{k,\,l}(x',\ x,\ t;\ h,\ h)=F_{k,\,l}(x',\ x,\ t;\ h,\ h)-1, \tag{78}$$

то $\theta(x',\ x,\ t)$ можно представить разложением

$$\theta(x',\ x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x'-x+2k)^2}{4t}}+e^{-\frac{(x'+x+2k)^2}{4t}}\right]+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x'-x+2k)^2}{4t}}\cdot\Phi_{k,\,k}(x',\ x,\ t;\ h,\ h)+\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{(x'+x+2k)^2}{4t}}\Phi_{k+1,\,k}(x',\ x,\ t;\ h,\ h)\right]. \tag{79}$$

Первая сумма разложения не зависит от h.

Вычисление значений $\theta(x',\ x,\ t)$ требует определения значений $\psi(\nu)$. Последние находятся по таблицам в силу соотношения

$$\psi(\nu)=e^{\nu^2}(1-\Phi(\nu)), \tag{80}$$

где

$$\Phi(\nu)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\nu}e^{-\tau^2}d\tau. \tag{81}$$

Можно пользоваться и специальными таблицами функции $\psi(\nu)$. При больших значениях аргумента ν функция $\psi(\nu)$ выражается ассимптотическим разложением

$$\psi(\nu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k\frac{1\cdot3\ldots(2k-1)}{2^k\nu^{2k+1}}+R_s(\nu), \tag{82}$$

где

$$R_s(\nu)=(-1)^s\frac{1\cdot3\ldots(2s-1)}{\sqrt{\pi}\cdot2^s\nu^{2s+1}}\vartheta,\quad 0<\vartheta<1.$$

Последнее следует непосредственно из определения функции. Указанным выражнием $\theta(x',\ x,\ t)$ удобно пользоваться при малых значениях t.

9. Решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2), (3) и начальному условию

$$u(x,\ 0)=f(x), \tag{83}$$

определяется равенством

$$u(x,\ t)=\int_0^1 f(x')\,\theta(x',\ x,\ t)\,dx'. \tag{84}$$

Это равенство позволяет приближенно определить $u(x,\ t)$, пользуясь любой из формул приближенных квадратур.

Для квадратурной формулы

$$\int_0^1 \varphi(x')\,dx' \approx \sum_{k=1}^{p} C_k \varphi(x_k), \tag{85}$$

где x_k — узлы, а C_k — коэффициенты формулы, значение $u(x,\ t)$ дается равенством

$$u(x,\ t) \approx \sum_{k=1}^{p} C_k f(x_k)\,\theta(x_k,\ x,\ t). \tag{86}$$

Построенное выражение $\theta(x',\ x,\ t)$ позволяет найти приближенное выражение $u(x,\ t)$ для любого задания начальных значений функции. Отметим, что в случае

$$f(x) = u_0$$

решение $u(x,\ t)$ характеризуется равенством

$$u(x,\ t) = u_0\left\{1 + \sum_{k=1}^{p} C_k \theta_*(x_k,\ x',\ t)\right\}, \tag{87}$$

где

$$\theta_*(x',\ x,\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\frac{(x'-x+2k)^2}{4t}} \Phi_{k,\,k}(x',\ x,\ t;\ h,\ h) + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{(x'+x+2k)^2}{4t}} \Phi_{k+1,\,k}(x'\ x,\ t;\ h,\ h) \right]. \tag{88}$$

Формула (87) следует непосредственно из (79)

ЛИТЕРАТУРА

Журавский А. М. Об одном обобщении модулярного преобразования функций тета. Записки ЛГИ, 1959, т. XXX, вып. 3.