Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXVIII, вып. 2, 1961 г.

ПРОСТЫЕ РЕБЕРНЫЕ ФОРМЫ КУБИЧЕСКОЙ СИНГОНИИ

С. Ш. Генделев

Настоящее сообщение завершает серию статей В. И. Михеева и И. И. Шафрановского, посвященных полному выводу всех возможных реберных форм [1, 3, 4] *

При выводе простых реберных форм кубической сингонии мы прежде всего исходим из возможных гранных комбинаций. Для этого надо было перебрать все возможные парные комбинации в отдельности для каждого из пяти видов симметрии ** Символы для таких комбинаций сведены в табл. 1, где верхняя горизонтальная строка содержит символы граней исходных форм, в плоскостях которых лежат выводящиеся ребра. По вертикали расположены комбинации символов тех граней, результатом пересечения которых и являются реберные формы. Ряд реберных форм с относительно небольшим числом входящих в них ребер является результатом пересечения граней одной простой формы (из числа указанных в верхней горизонтальной строке таблицы); например, двенадцатиреберник куба.

Табл. 1 дает лишь схему вывода. Дело в том, что многогранники, относящиеся к одной форме, могут быть существенно различны в зависимости от угловых величин и как следствие — от различного числового значения индексов в символах.

Таблица 1

(100)	(110)	(111)	(*hk*o)	(*hhl*)	(*hkk*)	(*hkl*)
(100) (001)	(110) (011)		(*hk*o) ($h\bar{k}$o)	(*hhl*) ($hh\bar{l}$)	(*hkk*) ($hk\bar{k}$)	(*hkl*) ($hk\bar{l}$)
(100) (110)						
(100) (111)	(110) (111)					
(100) (*hk*o)	(*hk*o)	(*hk*o)				

* См. также статью В. И. Михеев, И. И. Шафрановский, С. Ш. Генделев «Реберные формы кристаллов» в настоящем сборнике.

** Комбинация двух гранных форм и даже грани простой формы нередко пересекаются не в простой реберной форме, а в комбинации их, если не все ребра связываются элементами симметрии кристалла.

(100)			(*hk*o)	(*hhl*)	(*hkk*)	(*hkl*)
(100) (*hhl*)	(110) (*hhl*)	(*hhl*)	(*hk*o) (*hhl*)			
(100) : (*hkk*)	(110) (*hkk*)	(*hkk*)	(*hk*o) (*hkk*)	(*hhl*) (*hkk*)		
(100) : (*hkl*)	(110) (*hkl*)	(*hkl*)	(*hk*o) (*hkl*)	(*hhl*) : (*hkl*)	(*hkk*) (*hkl*)	
			(*hk*o) (*h'k'*o)	(*hhl*) (*h'h'l'*)	(*hkk*) (*h'k'k'*)	(*hkl*) (*h'k'l'*)

Взаимоотношение всех гранных форм планаксиального вида симметрии кубической сингонии наглядно показано на рис. 1 [5]. Очевидно, тетрагексаэдры могут приближаться по форме либо к кубу, либо к ромбододекаэдру, тригонтриоктаэдры приближаются к октаэдру или ромбододекаэдру, а тетрагонтриоктаэдры — к октаэдру или кубу. Такое поведение простых гранных форм одного наименования приводит к тому, что, участвуя в комбинациях, они обусловливают различные конфигурации реберных форм. Такие реберные формы считаются различными [2].

Следовательно, указанным в табл. 1 определенным гранным комбинациям обычно соответствует несколько различных реберных форм. Так как реберные формы нами выводятся для монокристаллов, то нигде в плоскости, естественно, не может быть замкнутого вогнутого контура.

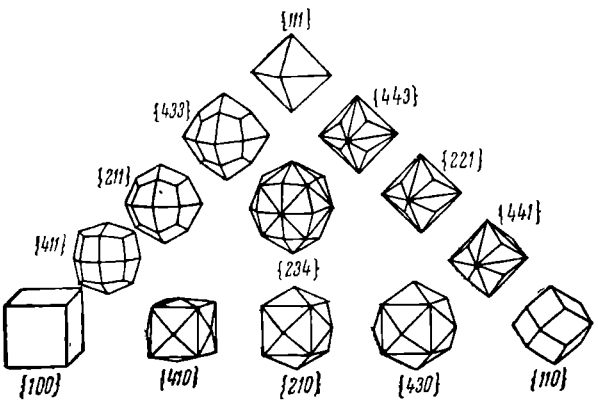


Рис. Соотношение между простыми формами вида симметрии O_h. По Е. Фишеру [5]

Для различения реберных форм и их характеристик составляются реберные формулы, последовательно указывающие: 1) вид симметрии (по Шенфлису); 2) число ребер, входящих в данную форму; 3) пространственную ориентировку ребра (т. е. обычный миллеровский символ) [*rst*]; полагаем $r > s > t$; по аналогии с индексами граней пишем в случае трех разных индексов *rst*, двух равных и одного большего *rss*, двух равных и одного меньшего *rrt*; 4) все гранные комбинации (выписываются в матрицах без круглых скобок), в которых данная реберная форма возможна; 5) порядковый номер формы по рис. 2 с буквенным индексом, соответствующим разновидности. Для краткости в конкретных случаях удобнее не выписывать все возможные комбинации, помещенные в матрицах, а указывать лишь данную конкретную комбинацию. Также можно не приводить все виды симметрии, в которых встречается данная форма, а ограничиться указанием определенного вида.

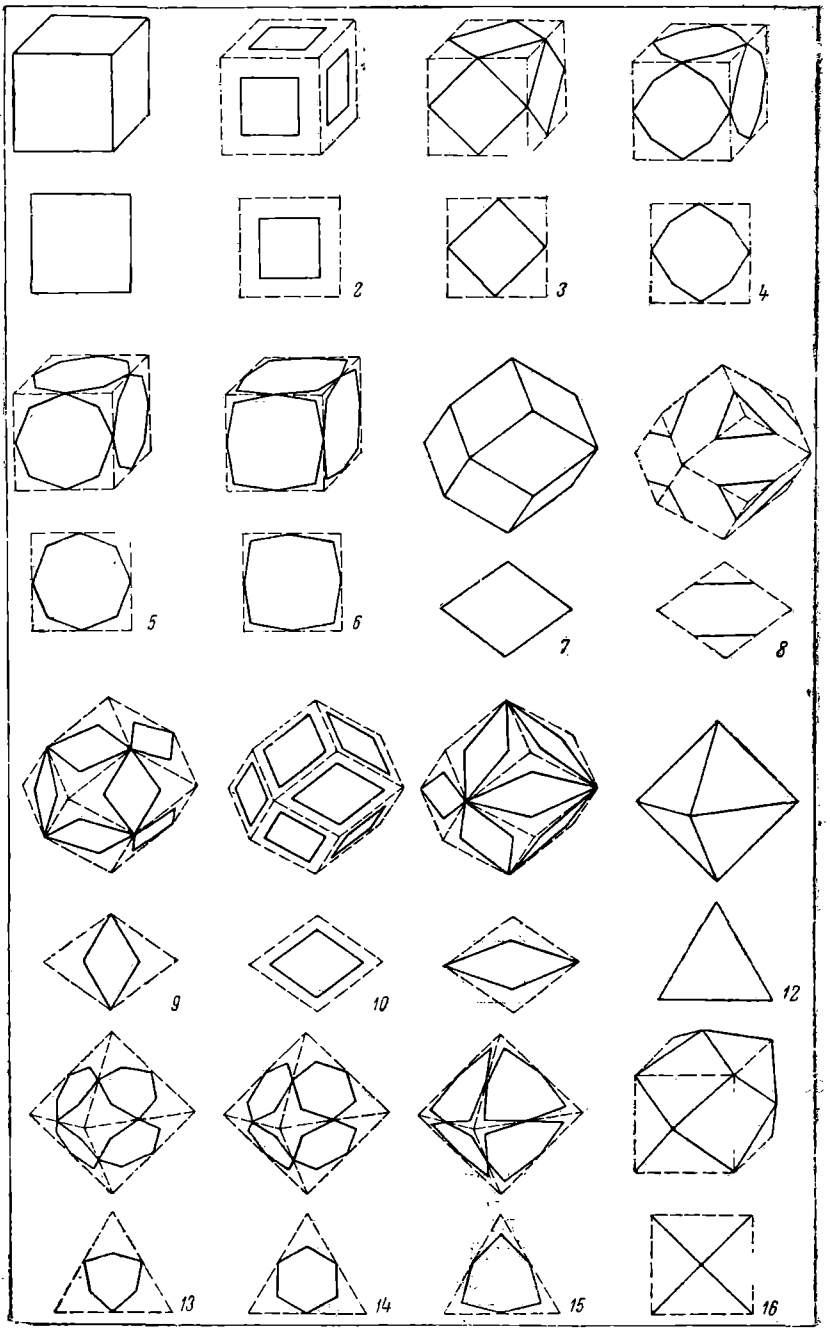


Рис. 2. 143 простые реберные формы кубической сингонии

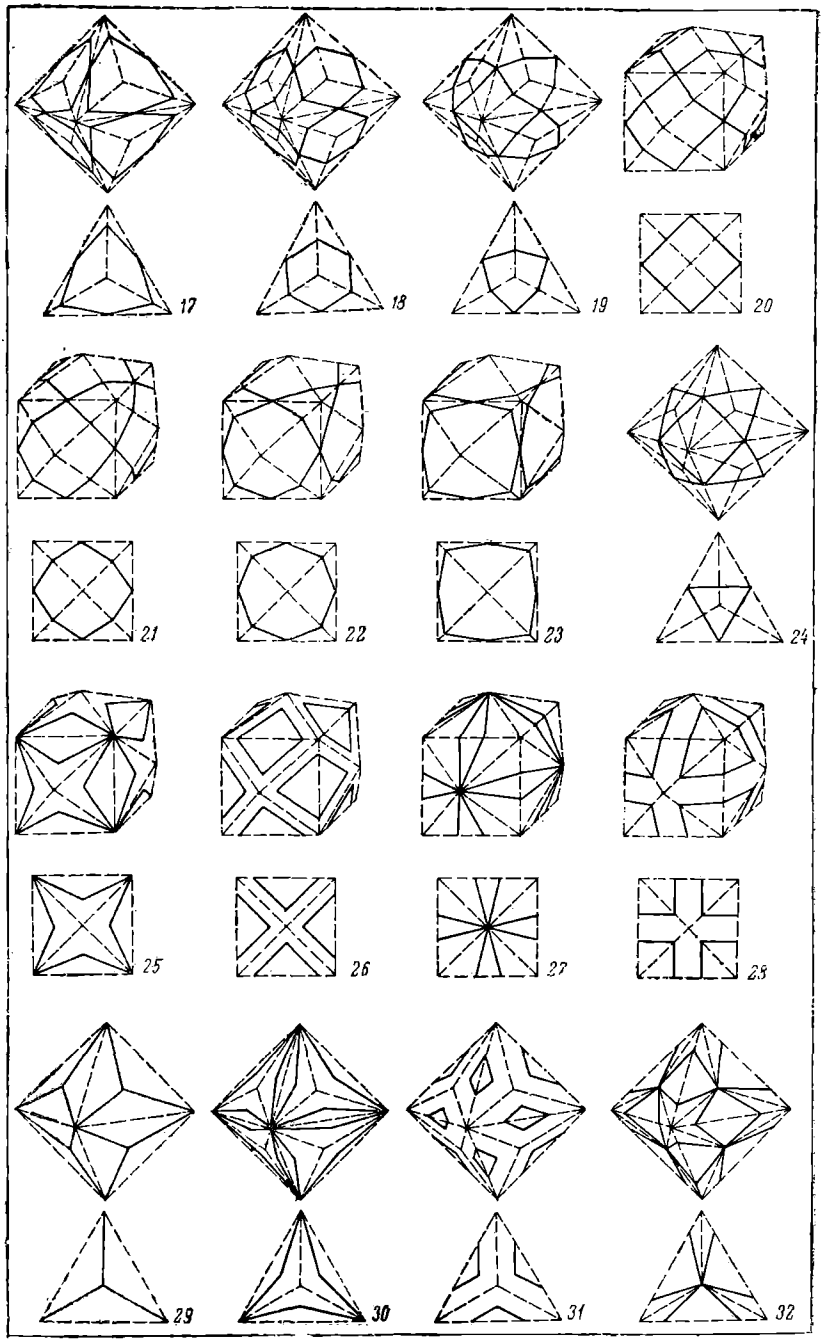


Рис. 2 (продолжение)

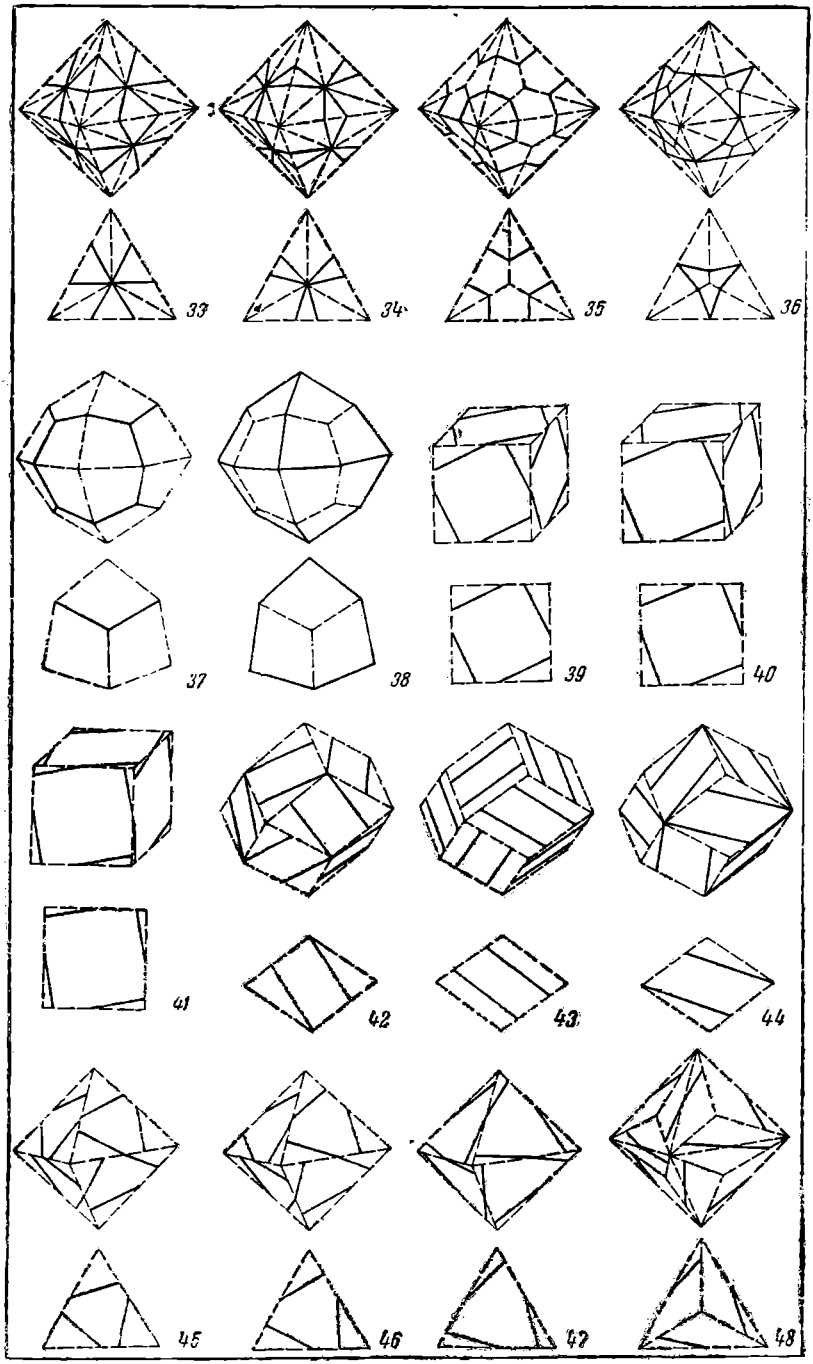


Рис. 2 (продолжение)

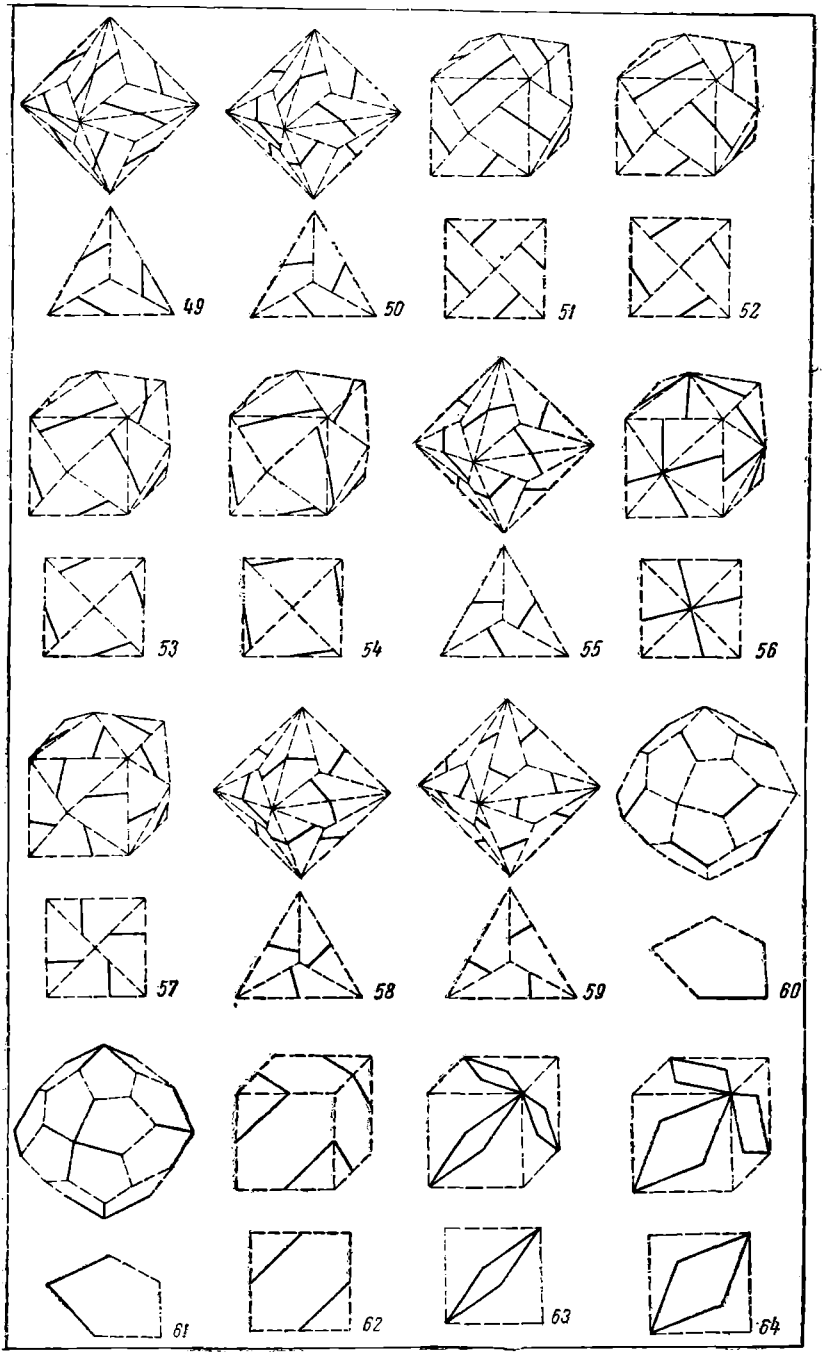


Рис. 2 (продолжение)

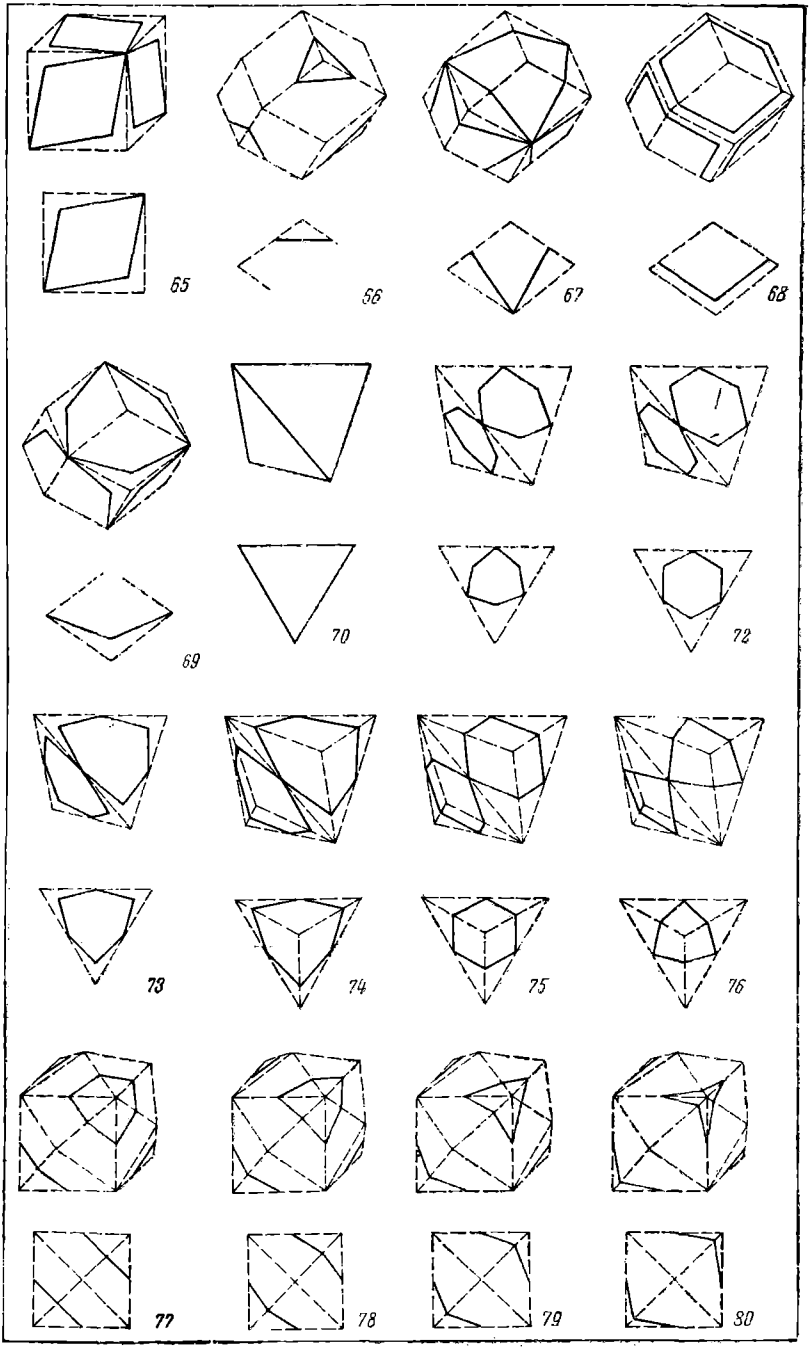


Рис. 2 (продолжение)

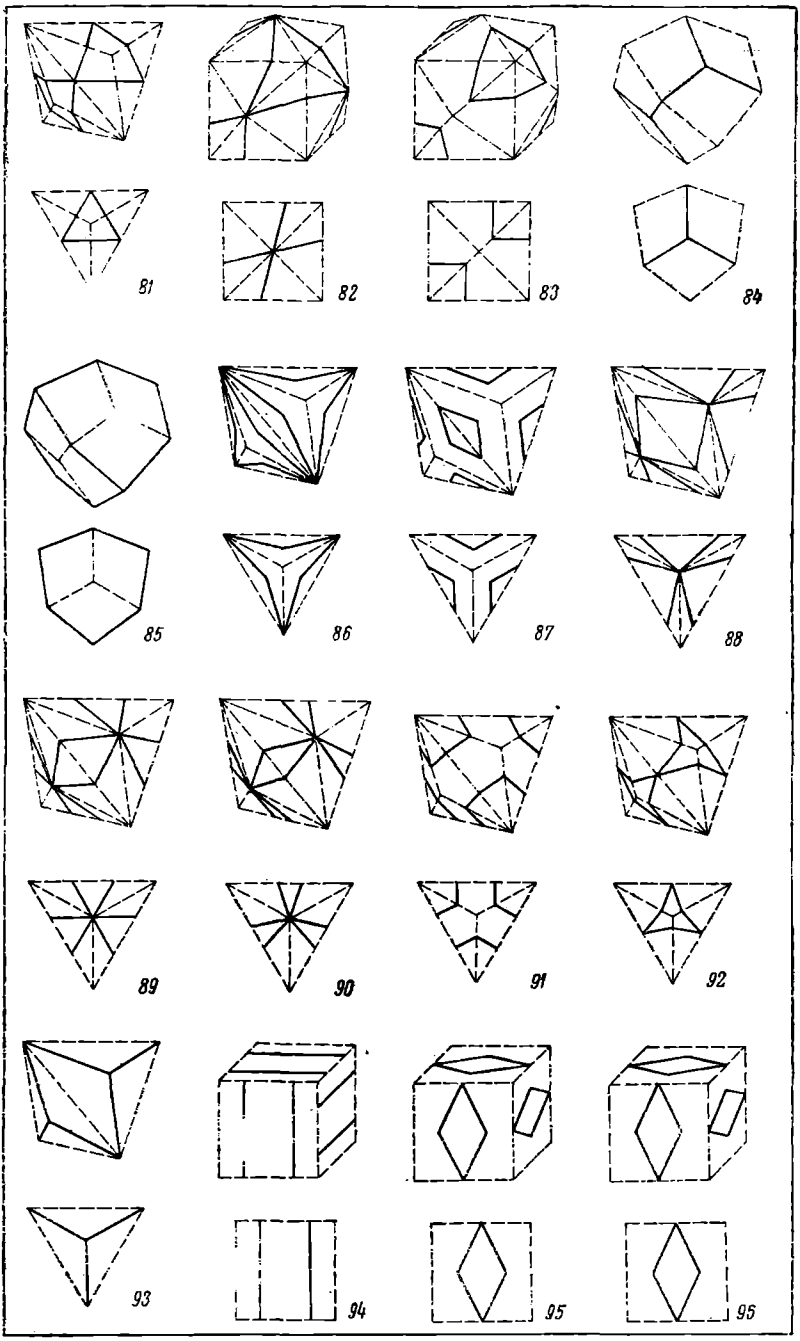


Рис. 2 (продолжение)

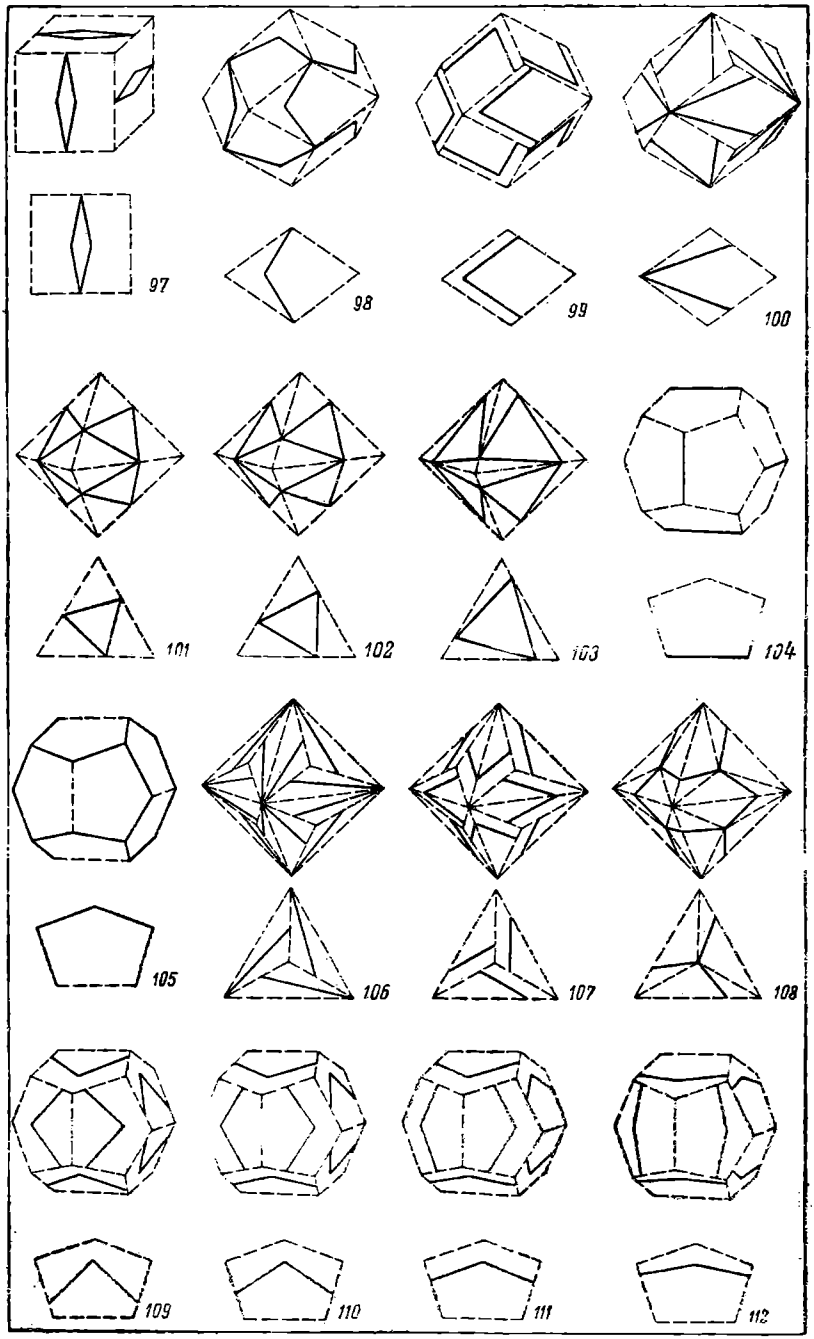


Рис. 2 (продолжение)

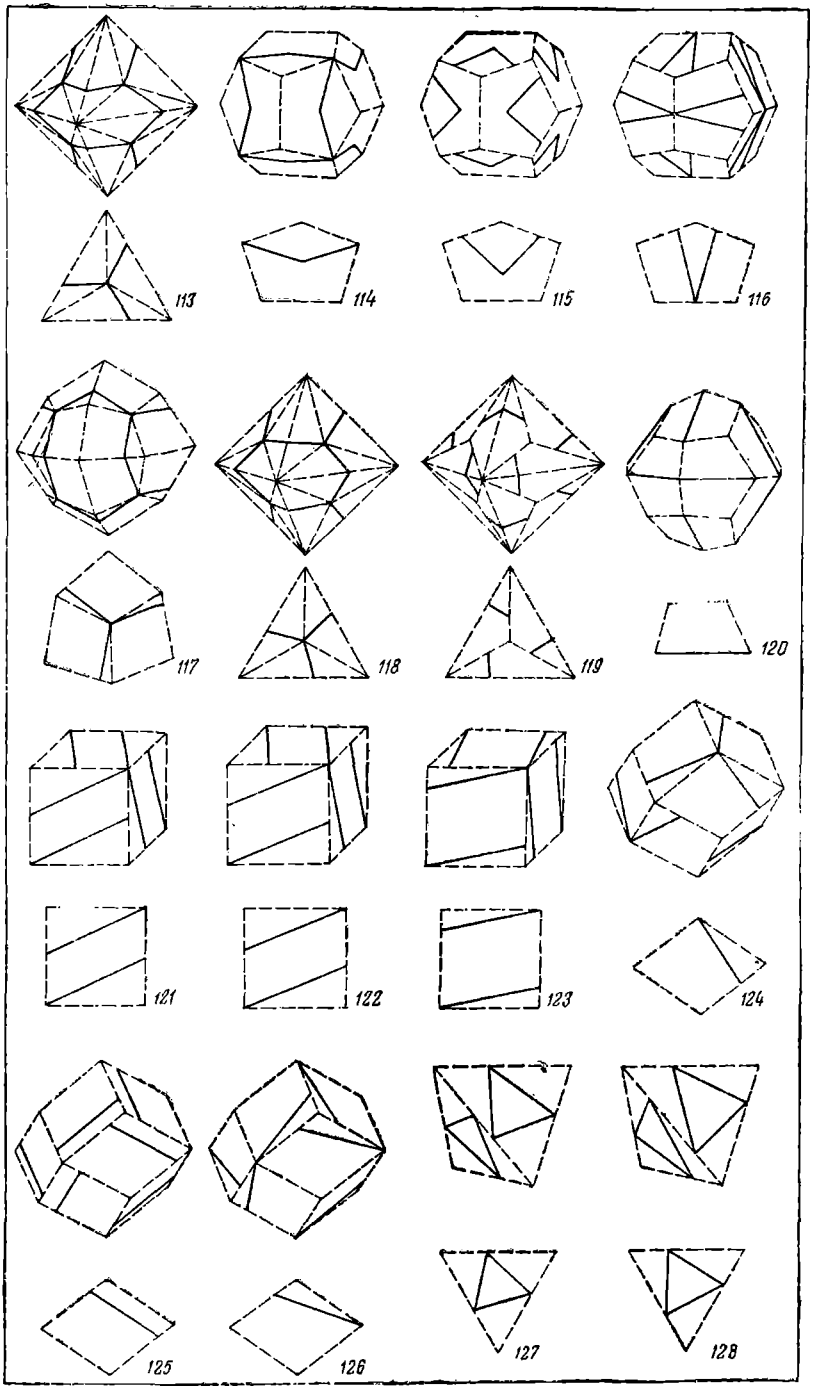


Рис. 2 (продолжение)

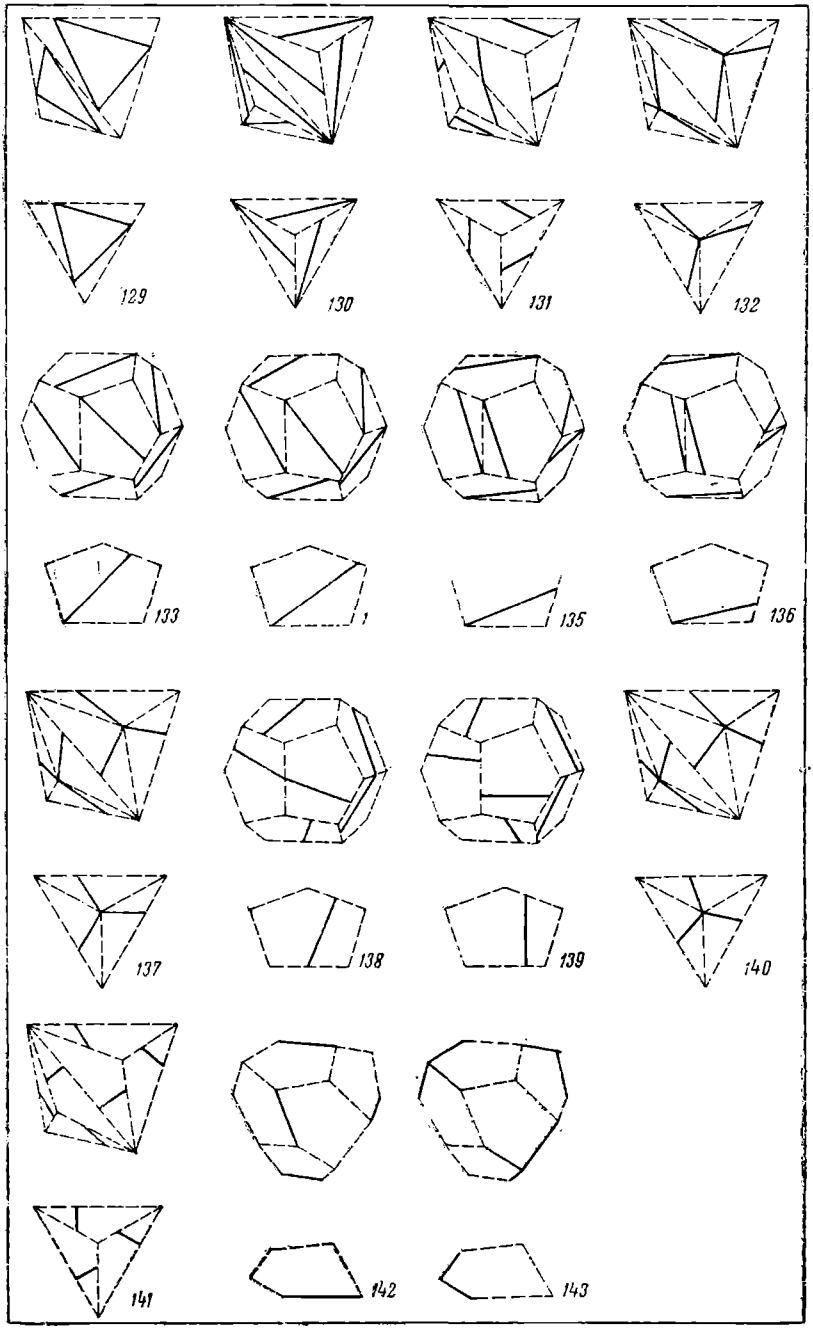


Рис. 2 (продолжение)

РЕБЕРНЫЕ ФОРМЫ ПЛАНАКСИАЛЬНОГО ВИДА СИММЕТРИИ (ТАБЛ. 2)

Таблица 2

O_h	Реберники простой гранной формы	100	110		$hk0$	hhl	hkk	hkl
100	1		2	3	2	4, 5, 6	3	4, 5, 6
110		2		8	2	8	9, 10, 11	9, 10, 11
	12	3	8		13, 14, 15	8	3	13, 14, 15
$hk0$	1 и 16	2	2	13, 14, 15	2	17—24	25—28	17—28
hhl	12 и 29	4, 5, 6	8	8	17—24	8	30—36	17—24, 30 - 36
hkk	37 и 38	3	9, 10, 11	3	25—28	30—36	3	17—24
hkl	7, 16, 29 и 37, 38	4, 5, 6	9, 10, 11	13, 14, 15	17—28	17—24, 30—36	17—24	4—6, 9—11, 13—15, 17—28, 30—36

Вывод реберных форм кубической сингонии удобно начинать с планаксиального вида симметрии O_h, поскольку остальные виды O, T_d, T_h, T закономерно связаны с ним. Последовательно попарно переберем все возможные гранные комбинации, руководствуясь табл. 1. В этой же последовательности будут возрастать порядковые номера форм. Когда комбинации соответствуют несколько реберных форм (в зависимости от значений их символов), будем математически выражать условия их существования. При этом в расчетах учитывается только абсолютная величина индексов.

{100} Форма 1

$$O_h 12\,[001] \left| \begin{array}{c} 100 : 010 \\ hk0 : kh0 \end{array} \right| 1$$

{100} : {110} Форма 2

$$O_h 24\,[001] \left| \begin{array}{c} 100 \quad 110 \\ 100 : hk0 \\ 110 : hk0 \\ hk0 : h'k'0 \end{array} \right| 2$$

{100} : {111} Форма 3

$$O_h 24\,[110] \left| \begin{array}{c} 100 : 111 \\ 100 : hkk \\ 111 \quad hkk \\ hkk : h'k'k' \end{array} \right| 3$$

$\{100\} : \{hk0\}$ (см. форму 2)

$\{100\} : \{hhl\}$ формы 4, 5, 6

$$O_h 48\,[0rt] \left| \begin{array}{l} 100 : hhl \\ \qquad h : l < 2{,}414 \\ 100 : hkl \\ \qquad k : l < 2{,}414 \\ hkl : h'k'l' \end{array} \right| 4$$

Для $\{100\}$ $\{hhl\}$

$$r = h;\ t = l.$$

Для $\{100\} : \{hkl\}$

$$r = k;\ t = l.$$

$$O_h 48\,[0rt] \left| \begin{array}{l} 100 : hhl \\ \qquad h : l = 2{,}414 \\ 100 : hkl \\ \qquad k : l = 2{,}414 \\ hkl : h'k'l' \end{array} \right| 5$$

Для $\{100\} : \{hhl\}$

$$r = h;\ t = l.$$

Для $\{100\} : \{hkl\}$

$$r = k;\ t = l.$$

$$O_h 48\,[0rt] \left| \begin{array}{l} 100 : hhl \\ \qquad h : l > 2{,}414 \\ 100 : hkl \\ \qquad k : l > 2{,}414 \\ hkl : h'k'l' \end{array} \right| 6$$

Для $\{100\} : \{hhl\}$

$$r = h;\ t = l.$$

Для $\{100\}$ $\{hkl\}$

$$r = k;\ t = l.$$

Значение отношения $\frac{h}{l} = 2{,}414$ легко выводится. Как видно из рис. 3, плоскость чертежа yOz отвечает (100); AB и BC — ребра формы 5, угол между ними — 135°; $\angle AOB = \frac{90°}{2} = 45°$;

$$\angle OAB = \angle ABO = \frac{180° - 45°}{2} = 67°30';$$

$$\angle ADO = 180° - (90° + 67°30') = 22°30';\ \frac{OD}{AO} = \operatorname{ctg} 22°30' = 2{,}414.$$

Отношению $\frac{h}{l}=2{,}414$ соответствует символ тригонтриоктаэдра (12 12 5)

{100} : {*hkk*} (см. форму 3)

{100} : {*hkl*} (см. формы 4, 5, 6)

{110} форма 7

$$O_h24\,[111]\left|\begin{array}{l}110:011\\ hkl:hlk\\ \text{при } k+l=h\end{array}\right|7$$

{110} : {111} форма 8

$$O_h24\,[011]\left|\begin{array}{l}110\ \ 111\\ 110:hhl\\ 111:hhl\\ hhl:h'h'l'\end{array}\right|8$$

{110} : {*hk*0} (см. форму 2)

{110} : {*hhl*} (см. форму 8)

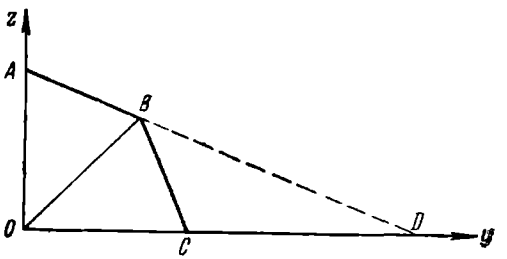


Рис. 3. К выводу форм 4—6

{110} : {*hkk*} Формы 9, 10, 11

$$O_h48\,[rss]\left|\begin{array}{l}110:\boldsymbol{hkk}\\ \qquad k<h-k\\ 110:hkl\\ \qquad l<h-k\\ hkl:h'k'l'\end{array}\right|9$$

Для {110} : {*hkk*}

$$r=h-k;\ s=k.$$

Для {110} {*hkl*}

$$r=h-k;\ s=l.$$

$$O_h48\,[111]\left|\begin{array}{l}110:211\\ 110:hkl\\ \qquad l=h-k\\ hkl:h'k'l'\end{array}\right|10$$

$$O_h48\,[rrt]\left|\begin{array}{l}110:hkk\\ \qquad k>h-k\\ 110:hkl\\ \qquad l>h-k\\ hkl:h'k'l'\end{array}\right|11$$

Для {110} : {*hkk*}

$$r=k;\ t=h-k.$$

Для {110} : {*hkl*}

$$r=l;\ t=h-k.$$

Граничное условие для форм 9 и 10 (т. е. форма 10) выводится следующим образом. Символ ребра $\{110\}$ $\{hkk\}$ в общем виде:

$$\begin{array}{c|cccc|c} h & k & k & h & k & k \\ & \times & \times & \times & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & [kk\,(h-k)] & & & & \end{array}$$

Ребра формы 10 параллельны ребрам ромбододекаэдра, т. е. должны иметь символ [111]. Следовательно, $h-k=k$; $h=2k$. Форма 10 возможна в пересечении ромбододекаэдра с тетрагонтриоктаэдром символа $\{211\}$.

$\{110\}:\{hkl\}$ (см. формы 9, 10, 11)

$\{111\}$ Форма 12

$$O_h12[011]\left|\begin{array}{cc} 111 & 11\bar{1} \\ hhl & :hlh \end{array}\right|12$$

$\{111\}:\{hk0\}$ Формы 13, 14, 15

$$O_h48\,[rst]\left|\begin{array}{l} 111:hk0 \\ \qquad k<h-k \\ 111:hkl \\ \qquad k-l<h-k \\ hkl:h'k'l' \end{array}\right|13$$

Для $\{111\}$ $\{hk0\}$

$$r=h,\ s=h-k,\ t=k.$$

Для $\{111\}$ $\{hkl\}$

$$r=h-l,\ s=h-k,\ t=k-l.$$

$$O_h48\,[211]\left|\begin{array}{l} 111:210 \\ \qquad k=h-k \\ 111:hkl \\ \qquad k-l=h-k \\ hkl:h'k'l' \end{array}\right|14$$

$$O_h48\,[rst]\left|\begin{array}{l} 111:hk0 \\ \qquad k>h-k \\ 111:hkl \\ \qquad k-l>h-k \\ hkl:h'k'l' \end{array}\right|15$$

Для $\{111\}$ $\{hk0\}$

$$r=h;\ s=k;\ t=h-k.$$

Для $\{111\}$ $\{hkl\}$

$$r=h-l;\ s=k-l;\ t=h-k.$$

Граничное условие $k=h-k$ легко определяется для формы 14, так как миллеровский символ ее ребра [211] элементарно вычисляется простым построением. На рис. 4 проектируем AD на плоскость xOy, получаем AE — проекцию AD. Точка D делит BC пополам. Следовательно, исходя из подобия треугольников OBC и EDC, точка E делит пополам OC ($OC=AO$). Тогда символом плоскости ADE, проведенной через AD перпендикулярно xOy, будет (120).

Определяем символ ребра $AD(NN)$

$$\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & \times & \times & \times & & \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline & [\bar{2} & 1 & 1] & & \end{array}$$

Так как символ ребра $(111):(hk0)$ в общем виде $[kh(h-k)]$, то, сопоставляя его со значением [211], получаем условие $k=h-k$

$\{111\}:\{hhl\}$ (см. форму 8)

$\{111\}:\{hkk\}$ (см. форму 3)

$\{111\}$ $\{hkl\}$ (см. формы 13, 14, 15)

Граничное условие для $\{111\}$ $\{hkl\}$

$$\begin{array}{c|cccc|c} h & k & l & h & k & l \\ & \times & \times & \times & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & [(k-l) & (l-h) & (h-k)] & & \end{array}$$

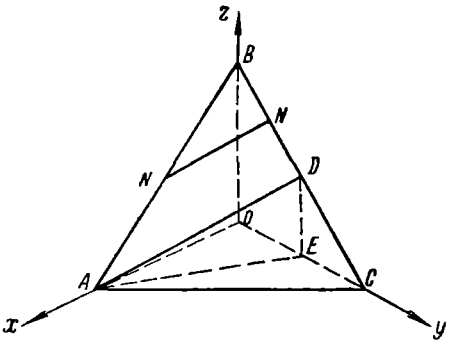


Рис. 4. К выводу форм 13—15
ABC — грань (111); NN — ребро формы 14; $AD \parallel NN$

Сопоставляем полученный результат с [211]. Всегда $h-l>h-k$ и $h-l>k-l$. Следовательно, $h-k=k-l$.

$\{hk0\}$ Формы 1 (см. выше) и 16

$$O_h24\ [rrt]\ \left|\begin{array}{c} hk0:h0k \\ hkl:hlk \end{array}\right|\ 16$$

Для $\{hk0\}$ $\{h0k\}$ при $k+l<h$

$$r=h,\quad t=k.$$

Для $\{hkl\}$ $\{hlk\}$

$$r=hk-hl;\quad t=k^2-l^2.$$

$\{hk0\}$ $\{h'k'0\}$ (см. форму 2)

$\{hk0\}:\{h'h'l\}$ формы 17—24

Символ ребра $(hk0):(h'h'l)$ в общем виде

$$\begin{array}{c|cccc|c} h & k & 0 & h & k & 0 \\ & \times & \times & \times & & \\ h' & h' & l & h' & h' & l \\ \hline & [kl & \bar{h}l & h'(h-k)] & & \end{array}$$

Вывод формы 18. Символ короткого ребра тригонтриоктаэдра, которому параллельно ребро формы 18

$$\frac{\begin{array}{c|cccc|c} h' & l & h' & h' & l & h' \\ l & h' & h' & l & h' & h' \end{array}}{[(h'^2-h'l)(h'^2-h'l)(h'^2-l^2)]}$$

Уменьшаемое $|h'^2|$ всюду одинаково, но $h'l>l^2$. Следовательно, имеем символ типа $[rss]$. Тогда можно составить зависимости:

$$\begin{cases} \dfrac{hl}{kl}=\dfrac{h'^2-l^2}{h'^2-h'l}; \\ kl=h'(h-k), \end{cases}$$

решение которых дает условие формы 18 (см. дополнительные условия для форм 17 и 18)

$$\frac{h}{k}=\frac{h'+l}{h'}$$

Пример: $\{221\}:\{320\}$, $\{331\}$ $\{430\}$

$$O_h48\,[rss]\left|\begin{array}{l} hk0:h'h'l \\ hk0:h'k'l \\ hhl:h'kl \\ hkk:h'k'l \\ hkl:h'k'l' \end{array}\right| 18$$

Для $\{hk0\}$ $\{h'h'l\}$

$$r=hl,\quad s=kl=h'(h-k).$$

Вывод формы 17 Форма 17 отвечает комбинации $\{hk0\}:\{h'h'l\}$, в которой $\{hk0\}$ ближе к $\{110\}$, чем в форме 18. Следовательно, отношение $\frac{h}{k}$ уменьшается. Отсюда условие формы 17

$$\frac{h}{k}<\frac{h'+l}{h}$$

Пример: $\{441\}:\{650\}$

$$O_h48\,[rst]\left|\begin{array}{l} hk0:h'h'l \\ hk0:h'k'l \\ hhl:h'kl \\ hkk:h'k'l \\ hkl:h'k'l' \end{array}\right| 17$$

Для $\{hk0\}$ $\{h'h'l\}$

$$r=hl;\quad s=kl;\quad t=h'(h-k).$$

Вывод формы 19. Форма 19 расположена между формами 18 и 19. Следовательно, условие формы 19

$$\begin{cases} \dfrac{h}{k}<\dfrac{h'+l}{h'} \\ \dfrac{h}{k}>\dfrac{h'}{h'-l}. \end{cases}$$

Пример: {850} {221}

$$O_h48\,[rst]\;\left|\begin{array}{l} hk0:h'h'l \\ hk0:h'k'l \\ hhl:h'kl' \\ hkk:h'k'l \\ hkl:h'k'l' \end{array}\right|\;19$$

Для $\{hk0\}:\{h'h'l\}$

$$r=hl;\quad s=h'(h-k);\quad t=kl.$$

Вывод форм 20—23. Эти формы образуются в комбинации разных тригонтриоктаэдров с $\{hko\}$, близким к $\{100\}$. Следовательно, $h-k$ велико и условия формы 18 приобретают вид:

$$\frac{h}{k}>\frac{h'+l}{h'}$$

Вывод формы 20. Ребро формы 20 параллельно ребру тетрагексаэдра, поэтому описывается формой 16. Отсюда символ его $[hkk]$, т. е. два индекса большие и равные. Так как $hl>kl$, то hl — один из двух наибольших индексов; при этом он равен $h'(h-k)$. Следовательно, условие формы 20

$$\frac{h}{k}=\frac{h'}{h'-l}$$

На это условие дополнительно накладывается ограничение для всех форм 20—23

$$\frac{h}{k}>\frac{h'+l}{h'}$$

Пример: {332} {310}

$$O_h48\,[rrt]\;\left|\begin{array}{l} hk0:h'h'l \\ hk0:h'k'l \\ hhl:h'kl' \\ hkk:h'k'l \\ hkl:h'k'l' \end{array}\right|\;20$$

Для $\{hk0\}$ $\{h'h'l\}$

$$r=h;\quad t=k.$$

Форма 20 является граничной в ряду 17—23. Поэтому для форм 17, 18 дополнительное условие

$$\frac{h}{k}<\frac{h'}{h'-l},$$

а для форм 21 — 23

$$\frac{h}{k}>\frac{h'}{h'-l}.$$

Вывод формы 22. Узор формы 22 в проекции на плоскость куба представляет собой правильный восьмиугольник[1] Проведем параллельно

[1] Строго говоря, узор в виде правильного восьмиугольника невозможен, поэтому реберные формы могут лишь бесконечно близко приближаться к форме 22, но не совпадают с ней.

одной из координатных осей плоскость, проходящую через ребро формы 22. Символ такой плоскости (2,414 1 0). Тогда символ искомого ребра

$$\begin{array}{c|cccc|c} k & 0 & h & k & 0 & h \\ & \times & & \times & & \\ 2{,}414 & 1 & 0 & 2{,}414 & 1 & 0 \\ \hline [h & & 2{,}414h & & & k] \end{array}$$

Символ ребра $(hk0)$ $(h'h'l)$ в общем виде $[hl\ kl\ h'(h-k)]$. Имея в виду $h'(h-k) \geqslant hl$, справедливое для всех форм 21—23, $h'(h-k) > hl > kl$. Тогда $\frac{2{,}414h}{h} = \frac{h'(h-k)}{hl}$ Отсюда условие формы 22 $\frac{h}{k} = \frac{h'}{h'-2{,}414l}$ Например, комбинация $\{221\}:\{510\}$ дает реберную форму, приближающуюся к форме 22

$$O_h48\,[rst] \left| \begin{array}{l} hk0:h'h'l \\ hk0:h'k'l \\ hhl:h'kl' \\ hkk:h'k'l \\ hkl:h'k'l' \end{array} \right| 22$$

Для $\{hk0\}$ $\{h'h'l\}$

$$r = h'(h-k); \quad s = hl; \quad t = kl.$$

Вывод формы 21. Эта форма находится между 20 и 22, для которых условия найдены. Следовательно,

$$\frac{h'}{h'-l} < \frac{h}{k} < \frac{h'}{h'-2{,}414l}$$

Пример: $\{221\}$ $\{410\}$

$$O_h48\,[rst] \left| \begin{array}{l} hk0:h'h'l \\ hk0:h'k'l \\ hhl:h'kl' \\ hkk:h'k'l \\ hkl:h'k'l' \end{array} \right| 21$$

Для $\{hk0\}$ $\{h'h'l\}$

$$r = h'(h-k); \quad s = hl; \quad t = kl.$$

Вывод формы 23. Форма 23 отвечает комбинации $\{hk0\}$ и $\{h'h'l\}$, в которой $\{hk0\}$ ближе к $\{100\}$, чем в форме 22. Отсюда условие формы 23 $\frac{h}{k} > \frac{h'}{h'-2{,}414l}$

Пример: $\{221\}:\{610\}$

$$O_h48\,[rst] \left| \begin{array}{l} hk0:h'h'l \\ hk0:h'k'l \\ hhl:h'kl' \\ hkk:h'k'l \\ hkl:h'k'l' \end{array} \right| 23$$

Для $\{hk0\}$ $\{h'h'l\}$

$$r = h'(h-k); \quad s = hl; \quad t = kl.$$

Вывод формы 24. Это особый случай, выделяемый в качестве самостоятельной формы. Характерная особенность ее обнаруживается на тригонтриоктаэдре, так как ребра формы 24 перпендикулярны коротким ребрам тригонтриоктаэдра. Символ короткого ребра $[(h'^2 - h'l)(h'^2 - h'l)(h'^2 - l^2)]$. Ребро формы 24 перпендикулярно короткому ребру тригонтриоктаэдра и поэтому лежит в плоскости, перпендикулярной короткому ребру. Символ этой плоскости $((h'^2 - h'l)(h'^2 - h'l)(h'^2 - l^2))$. Находим символ искомого ребра, находящегося на пересечении этой плоскости с гранью $(h'lh')$.

$$\begin{array}{c|c|c} (h'^2 - h'l) & (h'^2 - h'l)(h'^2 - l^2)(h'^2 - h'l)(h'^2 - h'l) & (h'^2 - l^2) \\ \times & \times \times \times & \times \\ h' & l \quad h' \quad h' \quad l & h' \\ \hline \multicolumn{3}{c}{[(h'^3 - l^3)(2h'^3 - h'l^2 - h'^2l)(h'l^2 - 2h'^2l + h'^3)];} \end{array}$$

$$2h'^3 - h'l^2 - h'^2l > h'^3 - l^3 > h'l^2 - 2h'^2l + h'^3.$$

С другой стороны, необходимо помнить, что тетрагексаэдр, участвующий в образовании формы 24, должен иметь очень пологие грани, приближаясь по конфигурации к кубу. Поэтому $h - k \gg k$. Тогда индексы символа (hko) $(h'h'l)$ будут находиться в соотношении

$$h'(h-k) > hl > kl.$$

Это дает право написать систему отношений:

$$\begin{cases} \dfrac{h'^3 - l^3}{h'l^2 - 2h'^2l + h'^3} = \dfrac{hl}{kl}; \\ \dfrac{h'^3 - l^3}{2h'^3 - h'l^2 - h'^2l} = \dfrac{hl}{h'(h-k)} \end{cases}$$

Упрощение этих отношений приводит к условиям формы 24

$$\frac{h}{k} = \frac{h'^2 + h'l + l^2}{h'(h'-l)}$$

$$\frac{hl}{h-k} = \frac{h'^3 - l^3}{2h'^2 - l^2 - h'l}$$

Примеры: {331} {13 6 0}; {221} {720}

$$O_h 48\,[rst] \left| \begin{array}{l} hk0 : h'h'l \\ hk0 : h'k'l \\ hhl : h'kl' \\ hkk : h'k'l \\ hkl : h'k'l' \end{array} \right| \quad 24$$

Для $\{hk0\}$ $\{h'h'l\}$

$$r = h'(h-k); \quad s = hl; \quad t = kl.$$

Символ ребра $(hk0):(h'k'k')$ в общем виде

$$\begin{array}{c|cccccc|c} h & k & 0 & h & k & & 0 \\ h' & \times & \times & \times & & & k' \\ \hline & [kk' & \bar{h}k' & h'k-hk'] & & & \end{array}$$

$hk' > kk'$, так как $h > k$.

Вывод формы 26. Символ ребра тетрагексаэдра, которому параллельна форма 26 — $[hkk]$, т. е. два меньших индекса равны. Следовательно, условие формы 26:

$$\frac{h}{k} = \frac{h'k - hk'}{kk'}$$

После преобразования этой зависимости получаем

$$\frac{h'}{k'} = \frac{2h}{k}.$$

Пример: $\{210\}:\{411\}$; $\{310\}$ $\{611\}$

$$O_h 48\,[rrt] \left| \begin{array}{l} hk0:h'k'k' \\ hk0:h'k'l \\ hkl:h'k'l' \end{array} \right| 26$$

Для $\{hk0\}$ $\{h'k'k'\}$

$$r = h; \quad t = k.$$

Вывод формы 28. Ребра формы 28 параллельны линиям пересечения $\{hk0\}$ плоскостями куба. Поэтому символ формы 28

$$\begin{array}{c|cccccc|c} k & 0 & h & k & 0 & & h \\ 0 & \times & \times & \times & & & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}$$
$$[\bar{h}0k]$$

Сопоставляя этот символ с символом ребер $\{hk0\}:\{h'k'k'\}$ в общем виде, получаем для формы 28 $h'k - hk' = 0$; $\frac{h'}{k'} = \frac{h}{k}$

Пример: $\{210\}$ $\{211\}$; $\{310\}$ $\{311\}$

$$O_h 48\,[rs0] \left| \begin{array}{l} hk0:h'k'k' \\ hk0:h'k'l \\ hkl:h'k'l' \end{array} \right| 28$$

Для $\{hk0\}$ $[h'k'k']$

$$r = h; \quad s = k.$$

Вывод формы 25. Форма 25 отвечает комбинации $\{hk0\}$ и $\{h'k'k'\}$, в которой $\{h'k'k'\}$ ближе к $\{100\}$, чем в форме 26. Отсюда условие формы 25: $\frac{h'}{k'} > \frac{2h}{k}$

Пример: {210} {511}

$$O_h48\,[rst]\ \left|\begin{matrix} hk0 : h'k'k' \\ hk0 : h'k'l' \\ hkl : h'k'l' \end{matrix}\right|\ 25$$

Для $\{hk0\}$ $\{h'k'k'\}$

$$r = h'k - hk';\quad s = hk';\quad t = kk'$$

Вывод формы 27. Форма 27 отвечает комбинации $\{hk0\}$ и $\{h'k'k'\}$, в которой $\{h'k'k'\}$ ближе к $\{111\}$, чем в форме 26. Следовательно, условие формы 27: $\frac{h'}{k'} < \frac{2h}{k}$

Пример: {210} {311}

$$O_h48\,[rst]\ \left|\begin{matrix} hk0 : h'k'k' \\ hk0 : h'k'l' \\ hkl : h'k'l' \end{matrix}\right|\ 27$$

Для $\{hk0\}$ $\{h'k'k'\}$ $r = hk'$; s и t определяются значениями индексов.

$\{hk0\} : \{h'k'l\}$ (см. формы 17—28)

$\{hhl\}$ формы 12 (см. выше) и 29

$$O_h24\,[rss]\ \left|\begin{matrix} hlh & lhh \\ hkl & hlk \end{matrix}\right|\ 29$$

при $k + l > h$

Для $(hlh) : (lhh)$ $r = h^2 - l^2$; $s = h^2 - hl$.
Для $(hkl) : (hlk)$ $r = k^2 - l^2$; $s = hk - hl$.

$\{hhl\}$ $\{h'h'l'\}$ (см. форму 8)

$\{hhl\} : \{h'kk\}$ формы 30—36

Символ ребра $(hhl) : (h'kk)$ в общем виде

$$\begin{matrix} h & h & l & h & h & l \\ & \times & \times & \times & & \\ h' & k & k & h' & k & k \end{matrix}$$
$$[(hk - kl)(h'l - hk)(hk - hh')]$$

Последовательность величин данных индексов зависит от конкретных значений индексов (hhl) и $(h'kk)$.

Вывод формы 31. Ребра формы 31 параллельны коротким ребрам тригонтриоктаэдра, поэтому имеют символ $[(h^2 - l^2)(h^2 - hl)(h^2 - hl)]$, т. е. символ типа $[rss]$. С другой стороны, ребра формы 31 параллельны прямой, соединяющей L_4 и L_3 тетрагонтриоктаэдра. Символ такой прямой легко вычисляется — $[h'h'2k]$. Очевидно, он тоже должен быть типа $[rss]$. Поэтому индекс $2k$ наибольший.

Отсюда

$$\begin{cases} 2k = h^2 - l^2 \\ h' = h^2 - hl \end{cases} \qquad \frac{h'}{k} = \frac{h(h-l)2}{h^2 - l^2} = \frac{2h}{h+l}.$$

Пример: {551} {533}; {331} {322}

$$O_h 48\,[rss] \left| \begin{matrix} hhl : h'kk \\ hhl : h'kl \\ hkl \quad h'k'l' \end{matrix} \right| 31$$

Для $\{hhl\}$ $\{h'kk\}$

$$r = 2k; \quad s = h'$$

Вывод формы 30. Тетрагонтриоктаэдр в форме 30 ближе к октаэдру, чем в форме 31. Следовательно, условия формы 30:

$$\frac{h'}{k} < \frac{2h}{h+l}$$

Пример: {331} {433}; {551} {544}

$$O_h 48\,[rst] \left| \begin{matrix} hhl : h'kk \\ hhl : h'kl \\ hkl : h'k'l' \end{matrix} \right| 30$$

Для $\{hhl\}$ $\{h'kk\}$

$$r = hk - kl; \quad s = hk - h'l; \quad t = hh' - hk.$$

Вывод форм 32—34. Как видно из рис. 2, тетрагонтриоктаэдр в формах 32—34 ближе к кубу, чем тетрагонтриоктаэдр в форме 31. Следовательно, условие форм 32—34: $\frac{h'}{k} > \frac{2h}{h+l}$ Каждую из этих форм отличают приводимые ниже условия.

Вывод формы 33. Ребра формы 33 в проекции на плоскость октаэдра параллельны ребрам октаэдра

$$\begin{array}{c|cccc|c} h & h & l & h & h & l \\ & \times & \times & \times & & \\ 1 & \bar{1} & 1 & 1 & \bar{1} & 1 \\ \hline \multicolumn{6}{c}{[(h+l)\,(h-l)\,2h]} \end{array}$$

$$2h > h + l > h - l.$$

Исследовав величины индексов, в общем виде символ ребра $(hhl) : (h'kk)$ для условий форм 32—34 можно записать:

$$\begin{cases} hh' - hk = 2h; \\ hk - kl = h + l; \\ hk - h'l = h - l; \end{cases}$$

$$h' - k = 2; \quad h' = k + 2.$$

Подстановка h' в последнее уравнение и сложение двух последних уравнений дает $hk - kl - l = h$. Отсюда

$$k = \frac{h+l}{h-l}, \text{ а } h' = k + 2 = \frac{3h-l}{h-l}.$$

Условие формы 33:

$$\frac{h'}{k} = \frac{3h - l}{h + l}$$

Пример: {552} {211}

$$O_h 48\,[rst] \quad \left| \begin{array}{l} hhl_{\frac{1}{2}}: h'kk \\ hhl : h'kl \\ hkl : h'k'l' \end{array} \right| 33$$

Для $\{hhl\}$ $\{h'kk\}$

$$r = 2h; \quad s = h + l; \quad t = h - l.$$

Вывод формы 32. Форма 32 отвечает комбинации $\{hhl\}$ и $\{h'kk\}$, в которой $\{h'kk\}$ ближе к $\{111\}$, чем в форме 33. Следовательно, условие формы 32:

$$\frac{h'}{k} < \frac{3h - l}{h + l}$$

Пример: {331} {744}

$$O_h 48\,[rst] \quad \left| \begin{array}{l} hhl : h'kk \\ hhl : h'kl \\ hkl : h'k'l' \end{array} \right| 32$$

Для $\{hhl\}$ $\{h'kk\}$

$$r = hh' - hk; \quad s = hk - kl; \quad t = hk - h'l.$$

Вывод формы 34. Форма 34 отвечает комбинации $\{hhl\}$ и $\{h'kk\}$, в которой $\{h'kk\}$ ближе к $\{100\}$, чем в форме 33. Условие формы 34:

$$\frac{h'}{k} > \frac{3h - l}{h + l}$$

Пример: {331} {733}

$$O_h 48\,[rst] \quad \left| \begin{array}{l} hhl : h'kk \\ hhl : h'kl \\ hkl : h'k'l' \end{array} \right| 34$$

Для $\{hhl\} : \{h'kk\}$

$$r = hh' - hk; \quad s = hk - kl; \quad t = hk - h'l.$$

Вывод формы 35. Ребра формы 35 параллельны линии пересечения плоскостей тригонтриоктаэдра и ромбододекаэдра. Символ формы

$$\begin{array}{c|cccc|c} h & h & l & h & h & l \\ - & \times & \times & \times & & \\ 1 & 1 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 \\ \hline [& \bar{l} & \bar{l} & 2h &] & \end{array}$$

С другой стороны, ребра формы 35 параллельны ребрам тетрагонтриоктаэдра, сходящимся на L_3. Символ формы

$$\begin{array}{c|cccc|c} h' & k & k & h' & k & k \\ & \times & \times & & \times & \\ k & h' & k & k & h' & k \\ \hline [(k^2 - h'k)(k^2 - h'k)(h'^2 - k^2)]. & & & & & \end{array}$$

Сопоставляя полученные результаты, можно составить отношение

$$\frac{2h}{l} = \frac{h'^2 - k^2}{k(h' - k)} = \frac{h' + k}{k}$$

Практически это дает

$$\begin{cases} l = k; \\ 2h = h' + k. \end{cases}$$

Использовав эти условия для исследования величин индексов в общем виде символа ребра (hhl) $(h'kk)$, можно записать отношение, дающее условие формы 35 в другом виде:

$$\frac{2h}{l} = \frac{h(h' - k)}{k(h - l)}.$$

Это условие идентично указанному выше. Окончательно

$$\frac{h'}{k} = \frac{2h - l}{l}$$

Пример: {221} {311}

$$O_h 48\,[rss] \left| \begin{matrix} hhl : h'kk \\ hhl : h'kl \\ hkl : h'k'l' \end{matrix} \right| 35$$

Для $\{hhl\} : \{h'kk\}$

$$r = 2h; \quad s = l.$$

Вывод формы 36. Тетрагонтриоктаэдр в форме 36 ближе к кубу, чем тетрагонтриоктаэдр в форме 34. Следовательно, условие формы 36:

$$\frac{h'}{k} > \frac{2h - l}{l}$$

Пример: {221} : {411}

$$O_h 48\,[rst] \left| \begin{matrix} hhl : h'kk \\ hhl : h'kl \\ hkl : h'k'l' \end{matrix} \right| 36$$

Для $\{hhl\} : \{h'kk\}$

$$r = hh' - hk; \quad s = h'l - hk; \quad t = hk - kl.$$

$\{hhl\} : \{h'kl'\}$ (см. формы 17—24; 30—36)

$\{hkk\}$ формы 37 и 38

$$O_h 24\,[rss] \left| \begin{matrix} hkk \quad khk \\ hkl : khl \end{matrix} \right| 37$$

Для $(hkk) : (khk)$

$$r = h^2 - k^2; \quad s = hk - k^2.$$

Для $(hkl):(khl)$

$$r = h^2 - k^2; \quad s = hl - kl.$$

$$O_h 24\ [rs0] \left| \begin{matrix} hkk : h\bar{k}k \\ hkl : hk\bar{l} \end{matrix} \right| 38$$

Для $(hkk):(h\bar{k}k)$ и $(hkl):(hk\bar{l})$

$$r = h; \quad s = k.$$

$$\{hkk\}:\{h'k'k'\}\ \textbf{(см. форму 3)}$$

$$\{hkk\}:\{h'k'l\}\ \textbf{(см. формы 17—24)}$$

$$\{hkl\}\ \textbf{(см. формы 7, 16, 29 и 36, 37)}$$

$$\{hkl\}:\{h'k'l'\}\ \textbf{(см. формы 4—6; 9—11; 13—15; 17—28; 30—36)}$$

Полный вывод реберных форм для других видов симметрии кубической сингонии (O, T_d, T_h, T) осуществляется на основе планаксиального вида симметрии при применении ныне почти забытых понятий классической кристаллографии — «голоэдрии», «гемиэдрии» и «тетартоэдрии» Эти понятия находились в основе учения о неполногранности, поскольку в одной и той же сингонии существуют простые формы, имеющие одни и те же индексы, но различающиеся числом граней.

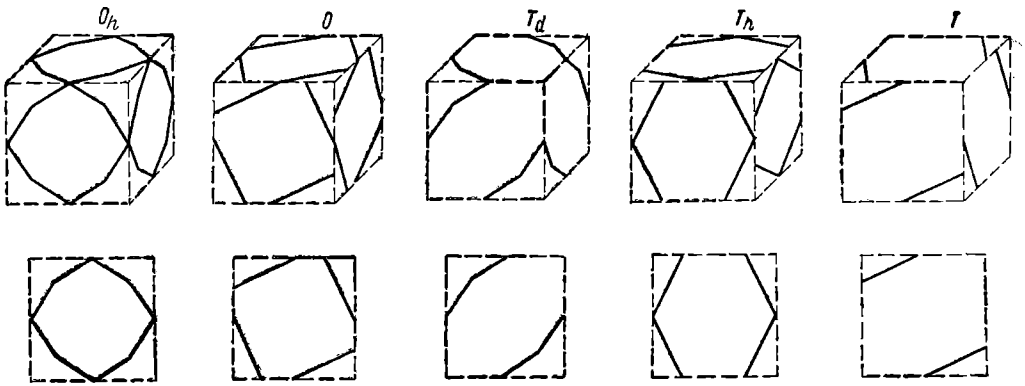


Рис. 5. Реберные формы для комбинации $\{100\}$ $\{hkl\}$ в пяти видах симметрии кубической сингонии

Гемиэдрическая форма получается из голоэдрической; по определенному закону у нее исчезает половина граней при отнятии известных элементов симметрии. К трем типам гемиэдрии относятся аксиальный, планальный и центральный виды симметрии. Тетартоэдрические формы обладают четвертой частью граней голоэдрической формы. К тетартоэдрии относится примитивный вид симметрии, где общая форма сохранила лишь четвертую часть граней гексоктаэдра.

Закономерное уменьшение числа граней простой формы, естественно, приводит к закономерному уменьшению числа ребер в комбинации, где участвует данная простая форма. Это положение и было нами использовано.

Переход от полногранных комбинаций к неполногранным иллюстрируется на примере комбинации $\{100\}$ $\{h\bar{k}l\}$ (рис. 5). Необходимо иметь

в виду, что во всех видах симметрии, особенно аксиальном, имеют место случаи, когда двум совершенно разным формам в O_h может соответствовать один общий аналог.

Достоинство предлагаемого метода полного вывода реберных форм состоит в том, что для устанавливаемых аналогичных форм полностью применимы все расчеты, сделанные для планаксиального вида симметрии. Это избавляет от необходимости новых специальных вычислений. Например, форма 20 (O_h) возможна в комбинации тригонтриоктаэдра {332} и тетрагексаэдра {320}. На основании сказанного аналогичная ей форма 109 (T_h) характерна для комбинации тригонтриоктаэдра {332} и пентагондодекаэдра {320}.

РЕБЕРНЫЕ ФОРМЫ АКСИАЛЬНОГО ВИДА СИММЕТРИИ (ТАБЛ. 3)

Из реберных форм, характерных для планаксиального вида симметрии, в аксиальном виде встречается 10. Кроме того, выведены 23 новые формы, свойственные только аксиальному виду симметрии:

Номер формы в O	39	40	41	42	43
Номер соответствующей формы в O_h	4	5	6	9	10
Номер формы в O	51	52	53	54	55
Номер соответствующей формы в O_h	20 и 26	21 и 25	22 и 25	23 и 25	24 и 33

Продолжение

Номер формы в O	44	45	46	47	48	49	50
Номер соответствующей формы в O_h	11	13	14	15	17 и 30	18 и 31	19 и 32
Номер формы в O	56	57	58	59	60	61	
Номер соответствующей формы в O_h	27	28	34 и 36	35	12	38	

Таблица 3

O	Рёберники простой гранной формы	100	110		$hk0$	hhl	hkk	hkl
100		—	2	3	2	39, 40, 41	3	39, 40, 41
110	7	2	—	8	2	8	42, 43, 44	42, 43, 44
111	12	3	8	—	45, 46, 47	8	3	45, 46, 47
$hk0$	1 и 16	2		45, 46, 47	2	48—55	51—54, 56, 57	48—57
hhl	12 и 29	39, 40, 41	8	8	48—55	8	48, 49, 50 55, 58, 59	48—55 58, 59
hkk	37 и 38	3	42, 43, 44	3	51—54, 56, 57	48, 49, 50, 55, 58, 59	3	48—55
hkl	60, 61 и 50, 52—55, 58	39, 40, 41	42, 43, 44	45, 46, 47	48—57	48—55, 58, 59	48 - 55	39—59

Все выведенные формы могли быть получены в комбинациях всех присутствующих здесь гранников с пентагонтриоктаэдром, кроме тех (формы 60, 61), которые являются принадлежностью самого пентагонтриоктаэдра. При этом ребра его, сходящиеся на L_3, не образуют самостоятельной формы, так как в зависимости от символа они отвечают одной из форм со сходящимися на L_3 ребрами. Для всех 23 форм характерно, что ребра нигде не образуют замкнутого контура. Это следствие отсутствия плоскостей симметрии. Поэтому, если в виде симметрии O_h комбинация двух гранных форм обычно образует одну простую реберную форму, то в O аналогичная комбинация двух гранных форм ведет к образованию комбинации простых реберных форм. Например, комбинация $\{100\}$ $\{hhl\}$ в виде симметрии O_h пересекаются в ребрах одной простой формы (формы 4—6), тогда как в виде симметрии O эта же комбинация дает в пересечении комбинацию двух одинаковых реберных форм (формы 39—41).

Отсюда вытекает важное общее свойство реберных форм — их бо́льшая, чем у гранных форм, чувствительность к симметрии. Комбинация $\{100\}:\{hhl\}$ при отсутствии общих форм одинакова в видах симметрии O_h и O, получающиеся же в их пересечении реберные формы различны. Если в виде симметрии O_h наиболее распространены 48-реберники, то в виде симметрии O, вследствие гемиэдрии, присутствуют почти исключительно 24-реберники.

Как известно, общая форма аксиального вида — пентагонтриоктаэдр — может быть правым и левым, т. е. является энантиоморфной фигурой. Соответственно и выводимые реберные формы могут быть правыми и левыми, однако такое их различие при выводе во внимание не принималось.

РЕБЕРНЫЕ ФОРМЫ ПЛАНАЛЬНОГО ВИДА СИММЕТРИИ (ТАБЛ. 4)

Таблица 4

T_d	Реберники простой гранной формы	100	110		*hk*0	*hhl*	*hkk*	*hkl*
100	1	—	2	62	2	63, 64, 65	62	6 3,64, 65
110	7	2	—	66	2	66	67, 68, 69	67, 68, 69
111	70	62	66	66 (и 12)	71, 72, 73	66	62	71, 72, 73
*hk*0	1 и 16	2	2	71, 72, 73	2	74—81	77—83	74—83
hhl	84 и 85	63, 64, 65	66	66	74—81	66	86—92	74—81, 86—92
hkk	70 и 93	62	67, 68, 69	62	77—83	86—92	62	74—81
hkl	84, 85 и 93	63, 64, 65	67, 68, 69	71, 72, 73	74—83	74—81, 86—92	74—81	63—65, 67—69, 71—73, 74—83, 86—92

Из реберных форм планаксиального вида симметрии в планальном виде встречаются только формы 1, 7, 16 и 2; из них первые три принадлежат простым гранным формам, общим для этих видов симметрии. Эти четыре формы встречаются и в аксиальном виде симметрии. В частном случае комбинации двух тетраэдров при одинаковом их развитии форма 66 превращается в форму 12.

Кроме того, выведены 32 новые формы, специфичные для планального вида:

Номер формы в T_d	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
Номер соответствующей формы в O_h	3	4	5	6	8	9	10	11	12	13	14	15	17	18	19	20 и 26
Номер формы в T_d	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
Номер соответствующей формы в O_h	21 и 25	22 и 25	23 и 25	24	27	28	37	38	30	31	32	33	34	35	36	29

Обращает внимание сходство реберных форм T_d и O_h; первые обычно являются как бы половинками вторых.

В планальном виде наиболее распространены 24-реберники. При этом, как и в планаксиальном виде, комбинация двух гранных форм обычно образует одну простую реберную форму.

РЕБЕРНЫЕ ФОРМЫ ЦЕНТРАЛЬНОГО ВИДА СИММЕТРИИ (ТАБЛ. 5)

Таблица 5

T_h	Реберники простой гранной формы	100	110		*hk*0	*hhl*	*kkk*	*hkl*
100	1	—	94	3	94	95, 96, 97	3	95, 96, 97
110	7	94	—	8	94	8	98, 99, 100	98, 99, 100
111	12	3	8	—	101, 102, 103	8	3	101, 102, 103
*hk*0	104 и 105	94	94	101, 102, 103	94	106—113	114—117	106—117
hhl	12 и 29	95, 96, 97	8	8	106—113	8	106, 107, 108, 113, 118, 119	106—113, 118, 119
hkk	37 и 38	3	98, 99, 100	3	114—117	106, 107, 108, 113, 118, 119	3	106—113
hkl	120 и 108, 112, 113, 114, 116, 117, 118	95, 96, 97	98, 99, 100	101, 102, 103	106—117	106—113, 118—119	106—113	95—97, 93—100, 101—103, 106—119

Из реберных форм планаксиального вида симметрии в центральном виде симметрии возможны восемь форм, причем все они встречаются также и в аксиальном виде. Кроме того, для центрального вида характерны 27 форм, из которых только две, являющиеся ребрами специфич-

ного для данного вида пентагондодекаэдра, не имеют очевидных аналогов в планаксиальном виде симметрий.

Номер формы в T_h	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107
Номер соответствующей формы в O_h	2	4	5	6	9	10	11	13	14	15	—	—	17 и 30	18 и 31
Номер формы в T_h	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	
Номер соответствующей формы в O_h .	19 и 32	20	21	22	23	24 и 33	25	26	27	28	34 и 36	35	38	

В случае куба и ромбододекаэдра комбинация двух одинаковых реберных форм дает на плоскости куба квадрат, четыре ребра которого распадаются на две формы из двух попарно параллельных ребер. В случае же куба и пентагондодекаэдра на плоскости куба возникает прямоугольник. Таким образом, несмотря на то, что в обоих случаях в комбинациях участвуют формально одинаковые простые реберные формы, внешний вид реберного узора различен. Следовательно, при снижении симметрии надо обращать внимание не только на простые реберные формы, но также и на характер их комбинаций. Наибольшее распространение в центральном виде получили 24-реберники.

Особое место среди реберных форм данного вида симметрии занимают те, которые связаны с пентагондодекаэдром. Например, пентагондодекаэдры пирита часто несут интересную и довольно сложную штриховку, описание которой требует детальной разработки реберных форм. Эти реберные формы выводятся по принципу гемиэдрии на основе реберных форм, выведенных для тетрагексаэдра в планаксиальном виде симметрии. Чтобы от тетрагексаэдра перейти к пентагондодекаэдру (они имеют одинаковый символ $\{hko\}$), надо приписать тетрагексаэдру симметрию с $4L_3 3L_2 3P$. Тогда из его 24 граней останется только 12 (как того требует гемиэдрия), пересечение которых образует пентагондодекаэдр.

Так как все реберные формы, выведенные для тетрагексаэдра, различаются положением относительно его ребер, сходящихся на L_4, то необходимо найти соответствующие им в качестве критерия ребра на пентагондодекаэдре. Ими являются две проводимые в плоскости (hko) прямые, соединяющие L_3 и L_2. Своим положением относительно этих граничных прямых и различается все многообразие реберных форм, выведенных для комбинации пентагондодекаэдра с другими формами. Например, ребра формы 115, аналогичной форме 26, параллельны данным граничным прямым. Поэтому при перемещении ребер параллельно самим себе в некоторый момент они совпадают с этими прямыми и, таким образом, одна из разновидностей формы 115 тождественна форме 16. Ребра общей формы — дидодекаэдра, сходящиеся на L_3, не образуют самостоятельной формы, а отвечают разновидностям группы форм.

РЕБЕРНЫЕ ФОРМЫ ПРИМИТИВНОГО ВИДА СИММЕТРИИ (ТАБЛ. 6)

Таблица 6

T	Реберники простой гранной формы	100	110		$hk0$	hhl	hkk	hkl
100	1	—	94	62	94	121, 122, 123	62	121, 122, 123
110	7	94	—	66	94	66	124, 125, 126	124, 125, 126
111	70	62	66	66 (и 12)	127, 128, 129	66	62	127, 128, 129

Продолжение табл. 6

	Реберники простой гранной формы	100	110		*hk*0	*hhl*	*hkk*	*hkl*
*hk*0	104 и 105	94	94	127, 128, 129	94	130—137	133—136, 138, 139	130—139
hhl	84 и 85	121, 122, 123	66	66	130—137	66	130, 131, 132, 137, 140, 141	130—137, 140, 141
hkk	70 и 93	62	124, 125, 126	62	133—136, 138, 139	130, 131, 132, 137, 140, 141	62	130—137
hkl	142 и 143 и 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 140	121, 122, 123	124, 125, 126	127, 128, 129	130—139	130—137, 140, 141	130—137	121—123, 124—126, 127—141

Этим видом завершается полный вывод реберных форм кубической сингонии. Из реберных форм планаксиального вида в нем сохраняются только две формы, являющиеся ребрами куба и ромбододекаэдра. Зато здесь встречается восемь форм планального вида. Сопоставление их с десятью формами, переходящими в аксиальный вид из планаксиального, а также сам вывод показывают, что в отношении реберных форм примитивный вид занимает в общем такое же положение по отношению к планальному, как аксиальный к планаксиальному. Поэтому выводимые в примитивном виде формы (а их здесь 23) как бы являются гемиэдричными по отношению к формам аксиального вида, за исключением форм, связанных с пентагондодекаэдром. Последние удобнее выводить из форм центрального вида. Сопоставим формы примитивного вида с формами планаксиального вида:

Номер формы в T . .	121	122	123	124	125
Номер соответствующей формы в O_h .	4	5	6	9	10
Номер формы в T .	133	134	135	136	137
Номер соответствующей формы в O_h	20 и 26	21 и 25	22 и 25	23 и 25	24 и 33

Продолжение

Номер формы в T .	126	127	128	129	130	131	132
Номер соответствующей формы в O_h . .	11	13	14	15	17 и 30	18 и 31	19 и 32
Номер формы в T . .	138	139	140	141	142	143	
Номер соответствующей формы в O_h	27	28	34 и 36	35	12	38	

Вследствие отсутствия плоскостей симметрии все реберные формы не замкнуты, поэтому они возможны только в комбинациях друг с другом. Ребра общей формы — пентагонтритетраэдра, сходящиеся на L_3, не образуют самостоятельной формы, а отвечают разновидностям группы форм.

Наиболее распространены в примитивном виде 12-реберники, так как этот вид является тетартоэдрией планаксиального вида.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате вывода для кубической сингонии установлены 143 реберные формы. Распределение их по числу входящих в них ребер приведено в табл. 7.

Таблица 7

Число ребер в форме	Распределение реберных форм по видам симметрии					
	O_h	O	T_d	T_h	T	Всего
48	28	—	—	—	—	28
24	8	22	26	24	—	80
12	2	1	5	2	22	32
6	—	—	1	1	1	3
Всего	38	23	32	27	23	143

ЛИТЕРАТУРА

1. Генделев С. Ш. Шафрановский И. И. Реберные формы кубической сингонии. Кристаллография, 1958, т. 3, вып. 4.
2. Генделев С. Ш. Что такое реберная форма? Зап. Всес. минералог. об-ва, 1959, вып. 1.
3. Михеев В. И., Шафрановский И. И. Реберные формы кристаллов. Минерал. сб. Львовск. геол. об-ва, 1955, № 9.
4. Михеев В. И., Шафрановский И. И. Реберные формы кристаллов. Сообщение II. Сб. «Кристаллография». Вып. 5, Металлургиздат, 1956.
5. Fischer E. Einführung in die geometrische Kristallographie. Berlin, 1956.