Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXIX, вып. 2, 1961 г.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫСШИХ ПРОИЗВОДНЫХ МАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛА В МАГНИТОРАЗВЕДКЕ

А. А. Логачев

Использование высших производных магнитного потенциала для вычисления глубины и других элементов залегания по сложным магнитным аномалиям, указывающим на наличие ряда разобщенных тел с одинаковой намагниченностью или породами с меняющейся намагниченностью, обеспечивает ряд преимуществ перед методами вычислений непосредственно по кривым Z или ΔT : 1) возможность расчленения сложных кривых, изображающих суммарное поле ряда намагниченных тел; 2) резкое снижение или полное устранение зависимости решения задачи от ошибок в выборе нормального поля; 3) расширение возможности использования формул, справедливых для тел большого простирания; 4) применение к преобразованным кривым, изображающим высшие производные магнитного потенциала, простейших приемов вычисления элементов залегания.

Опыт применения рекомендованного способа [3] позволяет сделать некоторые методические выводы и указать новые приемы вычислений.

Относительно того, когда и какими именно производными следует пользоваться, можно высказать только некоторые общие соображения. При относительно простых изолированных аномалиях иногда могут оказаться весьма полезными кривые градиента по оси x. Это может быть, например, в случае пересечения границы, разделяющей магнитные и немагнитные породы большого распространения (такие аномалии часто называют аномалиями над уступами). Вместо сложных рекомендованных ранее приемов [3] проще построить кривую градиента по оси x с интервалом Δx, составляющим несколько десятых долей предполагаемой глубины залегания. Эту кривую можно рассматривать как кривую напряженности поля над пластом мощностью Δx, срезанным с краевой части реального тела. Для вычисления элементов залегания пласта малой мощности при любом угле падения и намагниченности можно предложить много простых приемов.

Использование кривых градиента по оси x может оказаться также весьма полезным при крупных овальных контурах аномалий, когда формулы, справедливые для сильновытянутых тел, оказываются неприменимыми для вычисления элементов залегания. При надлежащем выборе интервала Δx реальное тело с небольшим соотношением осей в горизонтальной плоскости можно заменить двумя фиктивными телами, из кото-

рых у каждого размеры по простиранию будут значительно больше мощности Δx. Если взаимное наложение полей двух фиктивных тел будет значительным, потребуется построение кривой градиента второго порядка по оси z. Фиктивные тела будут представлены призмами с сечением $\Delta x \times \Delta z$, намагниченными прямо противоположно. Такие тела можно рассматривать как круговые цилиндры и для вычисления их элементов залегания применять простые приемы.

При сложных кривых переход к рассмотрению градиентов — наиболее простой путь к возможно полному использованию кривых для вычисления элементов залегания и намагниченности. Выбор градиента зависит от предполагаемой мощности и глубины залегания. Если вероятная мощность отдельных тел меньше глубины залегания, то полезно перейти к рассмотрению градиента по оси z с интервалом Δz в несколько раз меньше предполагаемой глубины. В этом случае каждая ветвь кривой градиента будет соответствовать напряженности поля над фиктивным телом, срезанным горизонтальной поверхностью на глубину Δz от каждого реального тела. Применяя к каждой хорошо выделившейся ветви формулы, выведенные для определения глубины залегания осевой линии круговых цилиндров, можно найти близкие к действительности значения. Если мощность отдельных пластов значительно больше глубины залегания, то это скажется на форме кривой градиента. Для этой ветви кривой можно построить кривую градиента второго порядка по оси x.

Для тех тел, мощность которых в несколько раз больше глубины залегания, следует строить кривые градиентов второго порядка по осям x и z, а затем хорошо обособленные положительные или отрицательные ветви кривых использовать как кривые над круговыми цилиндрами. Исследования показывают, что пользоваться кривыми градиента первого порядка по оси x следует только в тех случаях, когда мощность тел по крайней мере раз в пять больше глубины залегания. Для градиентов второго порядка требования к отношению между мощностью и глубиной залегания тела сильно снижаются; достаточно двух-трехкратного превышения, чтобы получить удовлетворительные результаты.

Когда мощность тела немного превосходит глубину залегания, целесообразно использовать кривую, пересчитанную на новый, более высокий или более низкий уровень. Изменение глубины изменяет соотношение между мощностью и глубиной, благодаря чему создаются условия для применения известных формул вычисления глубины залегания.

Использование высших производных имеет и ряд недостатков:

1. Громоздкость вычислений, особенно по оси z. Этот недостаток в дальнейшем может быть устранен путем применения счетных машин. Кроме того, несомненны реальные возможности изготовления приборов для непосредственного измерения градиентов.

2. Повышение требований к точности измерений по мере повышения порядка производной. Имея в виду реализуемые в настоящее время возможности по созданию новой магнитной аппаратуры более высокой точности при измерении Z и перспективы создания градиентометров, можно также быть уверенным, что и это препятствие будет устранено.

В данной работе, являющейся продолжением приведенных возможностей использования высших производных [3], излагаются некоторые новые приемы вычислений производных и элементов залегания намагниченных тел. Поскольку кривые градиентов при соблюдении определенных условий можно рассматривать как кривые напряженности поля над простейшими телами (пластами мощностью Δx или призмами с сечением

$\Delta x \times \Delta z$), излагаются наиболее удобные приемы вычислений элементов залегания простейших тел. Вместе с тем указываются способы вычисления намагниченности пород по наблюдаемому магнитному полю.

Вычисление производных и градиентов по заданной кривой

Для построений кривой градиента по оси x можно пользоваться разностями ординат исходной кривой или разностями табличных значений функции через равные интервалы. Масштаб изображения исходной кривой выбирается такой, чтобы предполагаемая глубина залегания намагниченных тел была не менее 2—3 *см;* при этом можно использовать удобный интервал для снятия градиента, равный 1 *см.* Масштаб ординат выбирается с расчетом, чтобы погрешность определения разностей ординат не оказывала существенного влияния на увеличение погрешности измерений напряженности поля. Масштаб ординат кривой градиента почти всегда для удобства работы приходится укрупнять в 2—5 раз. На кривой градиента резко проявляются случайные погрешности измерений напряженности поля, которые при окончательном оформлении кривой градиента должны быть сглажены.

Для вычисления второй производной по оси x можно воспользоваться формулой, легко получаемой из выражения конечных разностей функции [2],

$$Z''_{xx} = \frac{1}{a^2}[-2{,}72Z_0 + 1{,}5\,(Z_a + Z_{-a}) - 0{,}15\,(Z_{2a} + Z_{-2a}) + \\ + 0{,}011\,(Z_{3a} + Z_{-3a})],$$

где a — расстояние между симметрично расположенными точками.

Способ построения кривой градиента по оси z как разности значений Z на двух уровнях [3] целесообразен в том случае, когда в дальнейшем предполагается использовать кривые, вычисленные на различных уровнях. Если же такой операции не намечается, то проще непосредственно вычислить ординаты кривой градиента изложенным ниже способом, пригодным для случая двухмерной задачи.

Будем исходить из представления о распределении на линии наблюдений фиктивных магнитных масс с переменной плотностью:

$$\sigma_i = \frac{Z_i}{2\pi},$$

где Z_i — значение Z на отрезке Δx, на протяжении которого определяется плотность σ_i.

Тогда напряженность поля $Z(P)$ в точке P на высоте h над линией наблюдений выразится формулой

$$Z(P) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_i \frac{h}{h^2 + x^2}\, dx.$$

Производная Z_h' будет иметь вид:

$$\frac{\partial Z(P)}{\partial h} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_i \frac{h^2 - x^2}{(h^2 + x^2)^2}\, dx.$$

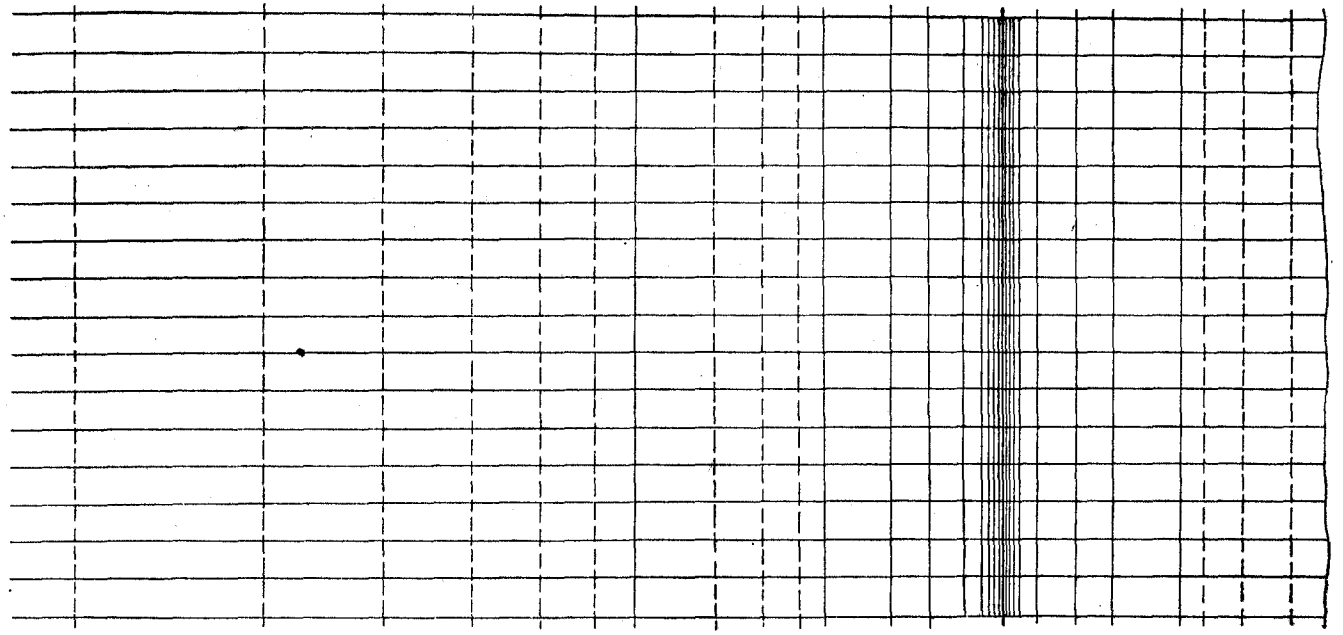


Рис. 1. Палетка для вычисления градиента по оси z при $\Delta h = h = 1$ *см*. На рисунке показана левая часть палетки, правая — симметрична

При конечных размерах Δx величина градиента будет интегралом в пределах от x_n до x_{n+1}. Заменяя $x=h\,\mathrm{tg}\,\varphi$, найдем

$$grad\,Z(P)=\frac{Z_i}{2\pi}\cdot\frac{\Delta h}{h}(\sin 2\varphi_{n+1}-\sin 2\varphi_n).$$

Положим разность синусов равной постоянной величине, например 0,2, причем в интервале от нуля до 45° со знаком плюс, а в интервале от 45 до 90° — со знаком минус. Тогда

$$grad\,Z(P)=\frac{0{,}1}{\pi}\cdot\frac{\Delta h}{h}\left(\sum_{\varphi=0}^{\varphi=\pm 45^\circ} Z_i-\sum_{\varphi=\pm 45^\circ}^{\varphi=\pm 90^\circ} Z_x\right).$$

Интервал, в пределах которого определяется величина градиента, можно положить равным высоте уровня, где взята точка P, т. е. $\Delta h=h$.

При заданном значении разности синусов значения угла φ будут следующие (*град*): 5,8; 11,8; 18,4; 26,6; 45; 63,4; 71,2; 78,2; 84,2; 90.

Построим палетку для случая $h=\Delta h=5$ *мм*. Тогда расстояния по оси x от проекции точки P на ось x вправо и влево будут (миллиметры): 0,5; 1,0; 1,6; 2,5; 5; 10; 15; 24; 49 и ∞. Определять среднее значение Z_i в больших интервалах трудно, поэтому полезно разбить крупные интервалы на несколько частей. На палетке, изображенной на рис. 1, предпоследний интервал разбит на четыре части (расстояния от начала координат 27; 33 и 39 *мм*), а в последнем интервале, заканчивающемся в бесконечности, вертикальные линии проведены через десятые доли полного интервала (разность синусов положена равной 0,02, расстояния от начала координат — 55; 62; 71; 83; 100; 125 *мм*). При пользовании описанной палеткой средние значения Z в интервале ± 5 *мм* нужно брать со своим знаком, а за пределами 5 *мм* — с обратным. Для вычисления напряженности поля ниже заданного уровня можно воспользоваться методом сеток [1] или любым другим способом, подробно описанным А. К. Маловичко [5].

Вычисление глубины залегания, угла падения и намагниченности горных пород в форме пласта малой мощности

Найдем общее выражение Z и H при любом угле падения α и любом направлении вектора намагниченности, определяемом углом i (отсчет угла падения α и угла i производится по часовой стрелке от положительного направления оси x; за положительное направление при широтном простирании тела принимается направление на север). Допустим, что намагниченность тела совпадает с направлением намагничивающего земного поля. Тогда для тел, имеющих большое простирание, угол наклонения вектора намагниченности в плоскости нормального сечения зависит от азимута простирания тела.

Заметим, что при изменении вертикального намагничивания $Z_в$ и $H_в$ на горизонтальное $Z_г$ и $H_г$ составляющие напряженности магнитного поля не изменяют своей формы, меняются только их названия и знак одной из них. Действительно, изменение направления вектора намагниченности равносильно повороту системы координат, в данном случае на 90°. Поворачивая систему координат по часовой стрелке, мы совместим новое положение оси z' с положительным направлением оси x, а положительное направление оси z совпадет с отрицательным направлением оси x'. Следовательно,

$$Z_г=H_в;\quad H_г=-Z_в. \tag{1}$$

В этом легко можно убедиться на примере горизонтально залегающего кругового цилиндра. Если круговой цилиндр намагничен горизонтально перпендикулярно его простиранию, то нити полюсов расположатся на одном горизонтальном уровне. Выражая напряженность поля двух нитей полюсов по известным формулам и полагая расстояние между ними бесконечно малым, получим формулы (1). Имея в виду, что любое цилиндрическое тело большого простирания можно представить состоящим из множества круговых цилиндров малого диаметра, сплошь заполняющих данное цилиндрическое тело, можно распространить этот вывод на все тела большого простирания при постоянном вертикальном сечении.

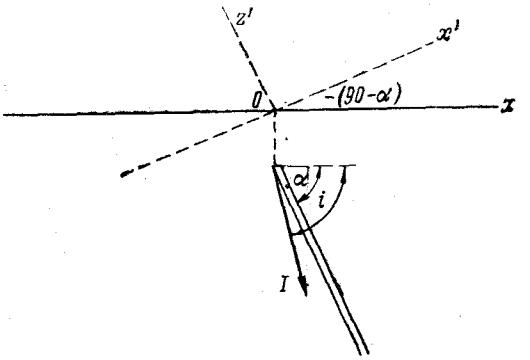


Рис. 2. Вычисление напряженности поля над телом при косом намагничивании

Теперь найдем выражения Z и H при наклонном падении пласта малой мощности, распространяющегося на большую глубину. Разложим изображенный на рис. 2 вектор намагниченности I на составляющие $I_x = I\cos i\cos A = I\cos i'$ и $I_z = I\sin i$, где A — азимут вектора H_a, а $\cos i' = \cos i\cos A$. Повернем систему координат так, чтобы ось x' была перпендикулярна оси сечения тела. При данном изображении ось x надо повернуть против часовой стрелки, поэтому угол поворота на рис. 2 отмечен знаком минус. В новой системе координат составляющие Z' и H' можно выразить через вертикальную и горизонтальную намагниченность, а затем заменить последние в соответствии с формулой (1):

$$Z' = Z_в\sin i + Z_г\cos i' = Z_в\sin i + H_в\cos i';$$
$$H' = H_в\sin i + H_г\cos i' = H_в\sin i - Z_в\cos i'.$$

Составляющие Z и H в начальной системе координат примут вид:

$$Z = Z'\sin\alpha - H'\cos\alpha;$$
$$H = Z'\cos\alpha + H'\sin\alpha.$$

Подставляя значения Z' и H' в последние выражения, получим:

$$\left.\begin{aligned} Z &= Z_в(\sin i\sin\alpha + \cos i'\cos\alpha) + H_в(\cos i'\sin\alpha - \sin i\cos\alpha)\\ H &= -Z_в(\cos i'\sin\alpha - \sin i\cos\alpha) + H_в(\sin i\sin\alpha + \cos i'\cos\alpha)\end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Введем замену $\frac{\cos i'}{\sin i} = \operatorname{ctg}\varphi$. После подстановки и простых преобразований получим

$$\left.\begin{aligned} Z &= (Z_в\cos\beta + H_в\sin\beta)\sqrt{\sin^2 i + \cos^2 i'}\\ H &= (-Z_в\sin\beta + H_в\cos\beta)\sqrt{\sin^2 i + \cos^2 i'}\end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

где $\beta = \alpha - \varphi$.

При широтном простирании ($A = 0$) $i' = i$, при меридиональном ($A = 90°$) $i' = \varphi = 90°$, т. е. в первом случае намагниченность совпадает

с направлением намагничивающего поля (в соответствии с высказанным выше допущением), а во втором — намагниченность вертикальная.

При дальнейшем рассмотрении вычисления элементов залегания намагниченных тел второй множитель в правой стороне равенства писать не будем, так как, во-первых, он не влияет на вычисление геометрических характеристик намагниченного тела и, во-вторых, на территории СССР при намагничивании пород современным магнитным полем он всегда близок к единице. Будем пользоваться этим множителем только при вычислении намагниченности и лишь в тех случаях, когда простирание тела близко к меридиональному.

Напряженность поля $Z_в$ и $H_в$ над пластом малой мощности вертикального падения, как известно [4], имеет вид:

$$Z = 2I2bh\,(h^2 + x^2)^{-1};\quad H = -2I2bx\,(h^2 + x^2)^{-1}, \tag{4}$$

где $2b$ — мощность;

h — глубина залегания тела.

Подставив эти значения в выражения (3), получим общие выражения

$$\left.\begin{aligned} Z &= 2I2b\,(h\cos\beta - x\sin\beta)\,(h^2 + x^2)^{-1} \\ H &= -2I2b\,(h\sin\beta + x\cos\beta)\,(h^2 + x^2)^{-1} \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Симметричная кривая получается при $\beta = 0$, т. е. $\alpha = \varphi$, или, иначе говоря, когда тело намагничено по падению. Заметим также, что раздельное определение углов α и φ (или i') невозможно. Угол падения может быть определен только при условии справедливости предположения о совпадении направления вектора намагниченности с проекцией вектора земного поля на плоскость, перпендикулярную простиранию тела, т. е. если φ известно.

Как известно из теории намагничивания, отклонение намагниченности в сторону падения пласта происходит в тех случаях, когда порода обладает высокой магнитной восприимчивостью, выражающейся десятыми долями единицы. В то же время известны примеры, когда вектор намагниченности отклоняется от вектора намагничивающего земного поля на большие углы до прямо противоположного направления. По-видимому, правильное решение вопроса о падении пласта в таких случаях возможно только при одновременном использовании и других геофизических методов.

Точно так же невозможно раздельное вычисление намагниченности и мощности пласта, так как величина $2b$ предполагается известной — малой сравнительно с глубиной залегания.

Укажем несколько способов вычисления h, β и произведения $2I2b$. В тех случаях, когда для вычисления используется кривая градиента Z по оси x, величина $2b$ известна (интервал, в пределах которого определяется величина градиента), следовательно, легко определяется величина I.

1. Найдем точки максимума и минимума Z, которые обозначим x_1 и x_2:

$$x_1 = h\,(\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{cosec}\beta);\quad x_2 = h\,(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{cosec}\beta).$$

Пользуясь этими выражениями, получим

$$Z_{max} = 2Ib\,(1 + \cos\beta)\,h^{-1};\quad Z_{min} = -2Ib\,(1 - \cos\beta)\,h^{-1}; \tag{6}$$

$$Z_{max} + Z_{min} = 2I2b\cos\beta h^{-1} = Z\,(0). \tag{7}$$

Из последнего равенства следует, что ордината кривой Z, равная алгебраической сумме экстремальных значений, находится в начале координат, соответствующем проекции верхней кромки пласта на плоскость наблюдений.

Пользуясь выражениями (6), находим

$$\cos\beta = \frac{Z_{max} + Z_{min}}{Z_{max} - Z_{min}}. \qquad (8)$$

Найдем точки x_3 и x_4, где $Z = \frac{1}{2} Z(0)$. Решая уравнение, получим

$$h = \frac{1}{2}(x_3 - x_4)\cos\beta. \qquad (9)$$

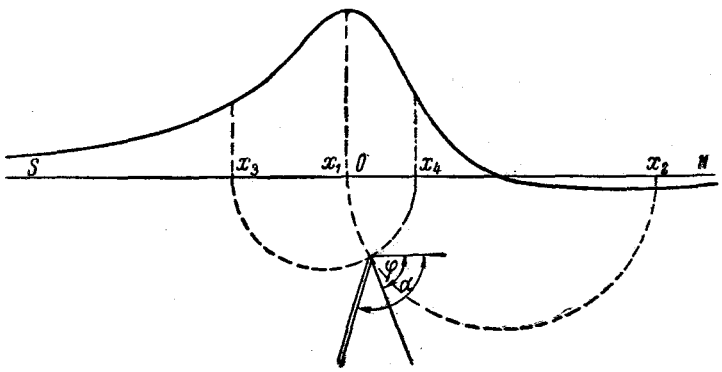


Рис. 3. Пример вычисления глубины h и угла β

Для симметричной кривой $\beta = 0$, следовательно, получим известную формулу вычисления глубины верхней кромки пласта малой мощности как половины расстояния между точками, где $Z = \frac{1}{2} Z_{max}$.

2. Пользуясь значениями x_1 и x_2, x_3 и x_4, найдем

$$|x_1x_2| = h^2; \; |x_3x_4| = h^2,$$

т. е. глубина залегания h является средней геометрической между указанными парами отрезков оси x. Строим полуокружности на отрезке x_1x_2 и на отрезке x_3x_4. Точка их пересечения определит местоположение вершины пласта. Изложенные способы вычисления иллюстрируются примером, изображенным на рис. 3. Угол $\beta = 35°$; если $\varphi = 70°$, то $\alpha = 105°$.

3. Напомним, что при любом угле β справедлива формула

$$h = \frac{Z_2}{Z_1 - Z_2} \Delta h, \qquad (10)$$

где Z_1 и Z_2 — максимальные значения Z на заданном уровне и на уровне выше заданного на величину Δh [3].

4. Глубина залегания может быть вычислена по площади Q, ограниченной кривой Z и осью x:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} Z dx = 2\pi I 2b \cos\beta. \qquad (11)$$

Пользуясь формулами (7) и (9), получим

$$h = \frac{Q}{\pi (Z_{max} + Z_{min})}. \qquad (12)$$

Этот способ может дать хорошие результаты, если нормальное поле выбрано правильно и для подсчета площади используется кривая Z, сильно затянутая в обе стороны от максимума.

5. Наилучшим способом вычисления глубины h и угла β является способ построения полных векторов, для чего требуется измерить или вычислить H.

Выражения (5) в полярной системе координат r и θ примут вид:

$$\left.\begin{aligned} Z &= 2I2br^{-2}\cos(\theta+\beta) \\ H &= -2I2br^{-2}\sin(\theta+\beta) \end{aligned}\right\}. \qquad (13)$$

Из выражений (13) находим

$$\theta+\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{-H}{Z},$$

откуда следует, что для нахождения угла θ, зная который, можно найти положение вершины пласта по точке пересечения направлений r, необходимо все углы θ изменить на постоянный угол β. Найдем этот угол. Обозначая точки, где $Z=|H|$, через x_5 и x_6 (см. рис. 4), будем иметь

$$h^2=|x_5x_6|.$$

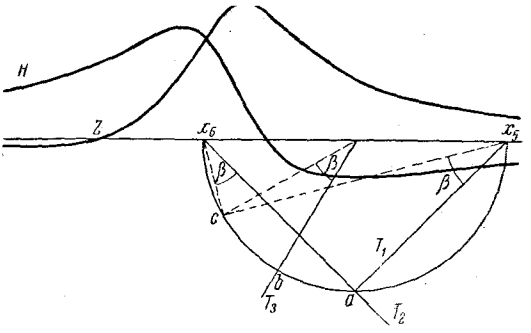


Рис. 4. Графический способ нахождения вершины пласта малой мощности

Следовательно, полюсная точка (вершина пласта малой мощности) лежит на окружности с центром на оси x и проходящей через x_5 и x_6. Построим эту окружность. Точку пересечения векторов T_1 и T_2 в точках x_5 и x_6, пересекающихся на окружности, обозначим a. Построим вектор T_3 в точке, являющейся центром окружности. Этот вектор пересекает окружность в точке b. Отложим на окружности дугу $bc=ab$, тогда точка c будет искомой вершиной пласта, а угол bc — углом β. Действительно, соединяя точки x_5, x_6 и центр окружности с точкой c, убеждаемся, что новые направления линий, проходящих через точку c, отличаются от направлений трех векторов на один и тот же угол.

Чтобы убедиться в правильности предположения о форме тела, нельзя ограничиться построением только трех векторов. После нахождения угла β необходимо построить еще несколько полных векторов и повернуть их на угол β. Если они проходят через точку c (с допустимой погрешностью), то предположение о форме тела является правильным, а вычисленные элементы залегания — надежными.

При применении этого способа к кривым градиента по оси x удовлетворительное решение может быть получено только в случае большого соотношения между мощностью и глубиной, когда слабо проявляется взаимное наложение полей. Это замечание особенно важно для определения угла β.

Для суждения о форме тела и его положении в пространстве полезно построить векторную диаграмму, если аномалия является хорошо обособленной. Покажем это на примере пласта малой мощности при большом распространении в глубину.

Рассматривая Z и H как координаты параметрически заданной кривой, исключим параметр x из уравнений (4). Для этого напишем сумму квадратов Z и H:

$$H^2 + Z^2 = c^2 (h^2 + x^2)^{-1},$$

где $c = 2I2b$.

Замечая, что $\frac{c}{h} = Z_{\max}$, после подстановки x^2 из выражения Z (4), получим

$$H^2 + Z^2 = ZZ_{\max},$$

или

$$H^2 + \left(Z - \frac{1}{2} Z_{\max}\right) = \frac{1}{4} Z^2_{\max}. \qquad (14)$$

Рассматривая H как ось x, а Z как ось y прямоугольной системы координат, можно видеть, что уравнение (14) представляет собой уравнение окружности с центром на оси y, на расстоянии радиуса от начала координат. Радиус окружности равен половине максимального значения Z.

Если для построения векторной диаграммы использовать общие выражения Z и H, справедливые для любого угла падения и угла наклонения вектора I, то полученное уравнение также будет представлять собой уравнение окружности, центр которой будет находиться на новой оси y', повернутой относительно исходной на угол β. Таким образом, построение векторной диаграммы позволит: а) установить, правильно ли предположение о том, что источником изолированной аномалии является пласт малой мощности и большого распространения в глубину; б) определить угол β при положительном решении первого вопроса. Важно отметить, что выводы не зависят от правильности выбора нормального поля при изображении Z. Ошибка обнаружится в том, что окружность не пройдет через начало координат; ее смещение по оси y определяет величину ошибки.

Определение глубины залегания по векторной диаграмме невозможно, так как параметр x, определяющий расстояния, исключен.

Если мощность пласта превышает глубину залегания, то векторная диаграмма будет иметь эллиптическую форму; меньшая ось эллипса будет совпадать с осью y, если вектор намагниченности параллелен плоскости падения пласта, или же с осью y', отклоненной от начальной на угол β. Отношение осей эллиптического сечения находится в определенной связи с отношением между мощностью пласта и глубиной его залегания.

Ограниченное распространение пласта в глубину будет характеризоваться тем, что диаграмма будет представлена кривой, находящейся между окружностью и кардиоидой, соответствующей круговому цилиндру.

Более подробные исследования вопроса о построении векторных диаграмм выполнены другим путем Н. К. Ступаком [6].

Вычисление глубины залегания осевой линии горизонтально залегающего кругового цилиндра и его намагниченности

Рудные тела или горные породы в форме горизонтально залегающих цилиндров в практике магниторазведочных работ не встречаются, однако этот случай имеет большое практическое значение, так как, во-первых, напряженность поля некоторых реальных тел можно в первом приближении отождествить с напряженностью поля над круговыми

горизонтально залегающими цилиндрами и, во-вторых, как показано выше, высшие производные магнитного потенциала также можно в некоторых случаях рассматривать как напряженность поля над телами указанной формы.

Реальные тела значительного простирания (по сравнению с глубиной залегания и линейными размерами по перпендикулярному сечению) в форме, например, линз можно рассматривать как круговые цилиндры, если осевая линия реального тела залегает на глубине, в несколько раз превышающей линейные размеры нормального сечения реального тела. В этом случае действительная форма сечения определена не будет, глубина же залегания центра сечения может быть вычислена.

Как известно, аналитические выражения Z и H над круговыми цилиндрами при вертикальном намагничивании имеют вид:

$$Z = 2M(h^2 - x^2)(h^2 + x^2)^{-2}; \quad H = -2M2hx(h^2 + x^2)^{-2}. \tag{15}$$

В этом случае, как следует из уравнения $Z=0$, глубина определяется как половина расстояния между точками, где кривая Z проходит через нуль. Магнитный момент проще всего определить по формуле

$$M = \frac{1}{2} h^2 Z_{max}.$$

Если величина намагниченности I может быть задана по аналогии с ранее изученными аномалиями, то можно найти площадь сечения S, так как $M=IS$. Если представление о наличии тела в форме кругового цилиндра возникло в результате построения кривой градиента Z''_{xz} $\Delta x \Delta z$, то $S=\Delta x \Delta z$. Следовательно, из вычисленного значения M определяется намагниченность I.

Общее выражение Z и H при любом направлении намагниченности I и плоскости падения тела, отождествляемого с круговым цилиндром, получим путем дифференцирования выражения (5)

$$\left.\begin{aligned} Z &= 2M[(h^2 - x^2)\cos\beta - 2hx\sin\beta](h^2 + x^2)^{-2} \\ H &= -2M[(h^2 - x^2)\sin\beta + 2hx\cos\beta](h^2 + x^2)^{-2} \end{aligned}\right\}, \tag{16}$$

где $\beta = \alpha - \varphi$.

Для вычисления h, β и M можно рекомендовать различные способы:

1. Способ, основанный на использовании максимальных значений Z на исходном уровне и уровне выше заданного на высоте Δh [3]. Если первое значение обозначим Z_1, а второе Z_2, то формула примет вид:

$$h = \frac{Z_2^{\frac{1}{2}}}{Z_1^{\frac{1}{2}} - Z_2^{\frac{1}{2}}} \Delta h. \tag{17}$$

Там же указан способ определения угла β.

2. Вычисление глубины залегания центра сечения кругового цилиндра может быть выполнено по площади, ограниченной осью x и положительной частью кривой Z.

Пределами интегрирования будут:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= h(-\operatorname{tg}\beta + \sec\beta); \\ x_2 &= -h(\operatorname{tg}\beta + \sec\beta). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Выполнив интегрирование, найдем

$$Q = 2Mh^{-1}. \tag{19}$$

Из выражения (16) при небольшой асимметрии кривой Z находим приближенное значение абсциссы x_{max} [3]:

$$x_{max} = -\frac{1}{3} h \operatorname{tg} \beta.$$

Подставляя это значение в выражение Z, находим

$$Z_{max} = 2Mh^{-2} f(\beta). \tag{20}$$

Из (19) и (20) получаем

$$h = \frac{Q}{Z_{max}} f(\beta).$$

При $\beta = 0$ величина $f(\beta) = 1$, при $\beta = 30^\circ$ величина $f(\beta) = 0{,}96$. Следовательно, в широких пределах колебания угла можно пользоваться формулой

$$h = \frac{Q}{Z_{max}}. \tag{21}$$

3. Пользуясь формулой (19), можно вывести другую формулу для вычисления h по кривым Z на двух уровнях. Имея в виду, что $Qh = \text{const}$,

$$h = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \Delta h, \tag{22}$$

где Q_1 — площадь на исходном уровне;
Q_2 — площадь на новом уровне, отличном от первого на высоту Δh.

4. Пользуясь выражением (18), находим

$$h = \frac{1}{2} (x_1 - x_2) \cos \beta. \tag{23}$$

В начале координат

$$Z(0) = 2Mh^{-2} \cos \beta. \tag{24}$$

На основании равенства (19)

$$Z(0) = \frac{2Q}{x_1 - x_2}. \tag{25}$$

Таким образом, начало координат (проекция оси кругового цилиндра на ось x) может быть определено.

С другой стороны, из выражения (18) следует, что

$$h^2 = |x_1 x_2|. \tag{26}$$

Отсюда вытекает способ нахождения местоположения центра сечения кругового цилиндра: находится площадь Q, делится на половину расстояния между точками, где $Z = 0$; полученная величина определяет абсциссу Z в начале координат, по которой находится точка $x = 0$. Снимая с чертежа отрезки x_1 и x_2, находим h. Угол β находим по формуле из (23):

$$\cos \beta = \frac{2h}{x_1 - x_2}. \tag{27}$$

Изложенный способ вычисления может быть проверен на рис. 5. Заметим, что аналогично же может быть использована кривая H, если известны обе точки перехода кривой через нуль.

5. Наиболее надежным способом нахождения глубины залегания центра сечения и угла β является графический способ, основанный на использовании составляющих Z и H, при условии достаточной изолированности рассматриваемой аномалии.

Выражения (16) в полярной системе координат r и θ будут иметь вид:

$$Z = 2Mr^{-2}\cos(2\theta + \beta);$$

$$H = -2Mr^{-2}\sin(2\theta + \beta),$$

откуда легко получаем

$$\theta + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{-H}{Z} = \gamma.$$

Пользуясь этой формулой, можно построить радиусы-векторы, проходящие через данную точку под углом γ к вертикальной линии; для этого необходимо построить полный вектор T по значению H и Z и угол, образованный вертикалью и вектором T, разделить пополам. Когда $\beta = 0$, биссектрисы пересекутся в центре сечения кругового цилиндра. Если $\beta \neq 0$, все биссектрисы отклонятся от направления к центру сечения на постоянный угол $\frac{1}{2}\beta$. Для нахождения угла поворота, на который надо исправить направление биссектрис, чтобы получить направление на центр сечения цилиндра, можно поступить следующим образом.

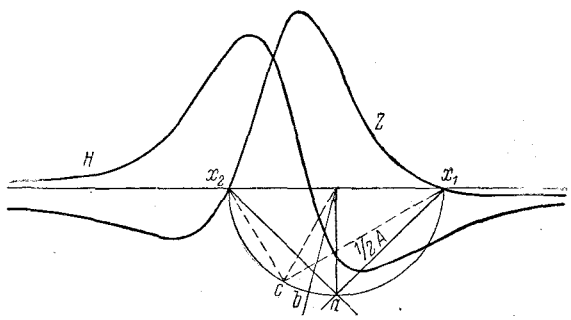


Рис. 5. Графический способ нахождения центра сечения круглого цилиндра

Выражение (26) показывает, что центр сечения цилиндра лежит на окружности, проходящей через точки x_1 и x_2, а расстояние между последними является диаметром окружности. Построим полный вектор в центре окружности (см. рис. 5). Этот вектор пересечет окружность в точке c, которая и является центром сечения кругового цилиндра.

Для доказательства построим три биссектрисы: в точках x_1, x_2 и в центре окружности. Соединив эти три точки с точкой c, легко убедиться, что все три новые направления отличаются от направления биссектрис на один и тот же постоянный угол, который требовалось найти. Действительно, углы при точках x_1 и x_2 измеряются половиной одной и той же дуги ac, а угол при точке, определяющей центр окружности, измеряется также половиной этой дуги — дугой bc.

При использовании изложенного способа на практике нельзя ограничиваться построением только трех векторов. После нахождения центра сечения цилиндра и угла β нужно построить еще несколько биссектрис и после поворота их на угол $\frac{1}{2}\beta$ убедиться в том, проходят ли они (с допустимой погрешностью) через установленный центр сечения цилиндра.

В случае применения этого способа к кривым градиента $Z''_{xz}\Delta x\Delta z$ следует иметь в виду, что наложенные поля соседних тел при малой мощности реального тела сильно влияют на вычисленную величину угла β и в значительно меньшей мере — на глубину залегания центра сечения.

Применение метода

Общая идея рекомендуемого метода заключается не в нахождении новых формул для всего многообразия сложных аномалий, а в преобразовании кривых Z (или ΔT) с целью приведения их к кривым, связанным с простейшими телами — пластами малой мощности или круговыми цилиндрами. Из различных способов вычисления элементов залегания тел простейших форм выбираются те, которые в данном случае являются наиболее удобными.

Рассмотрим несколько примеров.

1. На рис. 6 изображена кривая Z, полученная при магниторазведочных работах в одном из железорудных районов.

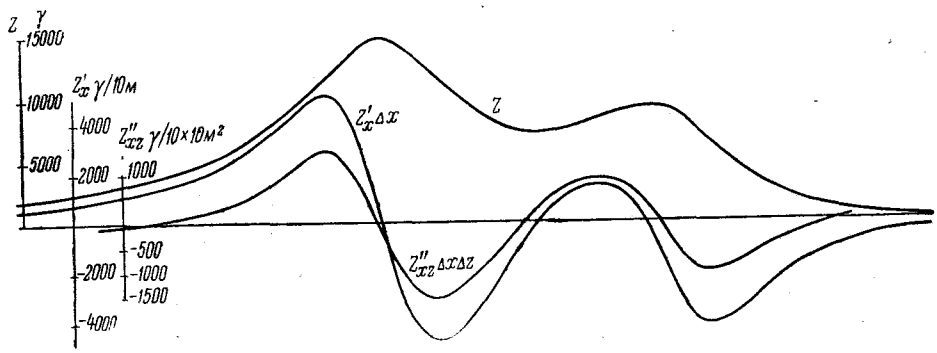


Рис. 6. Пример вычисления глубины залегания намагниченных тел по градиентам второго порядка

Измерения производились магнитометром М-2 в точках через 20 *м*. По результатам бурения в недалеко расположенных точках глубина залегания кристаллического фундамента 25—30 *м*.

По кривой Z видно, что магнитные поля двух тел наложены одно на другое. Построим кривые градиентов первого и второго порядков, положив $\Delta x = \Delta z = 10$ *м*. Каждую положительную и отрицательную ветвь кривой градиента второго порядка рассматриваем как кривые Z над круговыми цилиндрами (хотя отсекаются призмы с сечением 10×10 *м*). Вычисляем глубину залегания центров сечения круговых цилиндров по формуле (21). Уменьшая найденные глубины на $\frac{1}{2}\Delta z$, получим глубины залегания верхней кромки тел: 33; 31; 32 и 33 *м*. Средняя глубина от уровня установки прибора 32 *м*. Если воспользуемся формулой (17), содержащей отношение максимальных значений Z на разных высотах, то по крайним ветвям кривой получим глубины верхней кромки 33 и 28 *м*, а по двум центральным — 27 и 23 *м*, средняя глубина 28 *м*. Исследование этого способа вычисления глубин показало, что при недостаточно большом соотношении между мощностью и глубиной залегания реальных тел глубины получаются несколько заниженными, вследствие чего первое решение принимается как более надежное.

2. На рис. 7 изображено магнитное поле ΔT в изолиниях через 50γ по материалам полевых работ в одном из нефтяных районов. Для вычисления элементов залегания следует пользоваться первичными данными, по которым строились карты изолиний, так как при проведении последних возможны существенные отклонения от действительных значений. Однако воспользуемся этим примером, где очевидны трудности при выборе нормального поля и где небольшое отношение между осями

эллиптических форм изолиний не дает оснований для применения формул, справедливых для тел большого простирания.

На рис. 8 построены кривые градиентов первого и второго порядков при $\Delta x = \Delta z = 500$ *м* по двум направлениям, показанным на рис. 7. Пользуясь формулой (21), получим следующие глубины: по линии *AB* по двум ветвям — 1510 и 1750 *м*, средняя — 1630 *м*; по линии *CD* — 1590 и 1890 *м*, средняя — 1740 *м*. По данным бурения, глубина кристаллического фундамента в этом районе колеблется от 1760 до 1850 *м*.

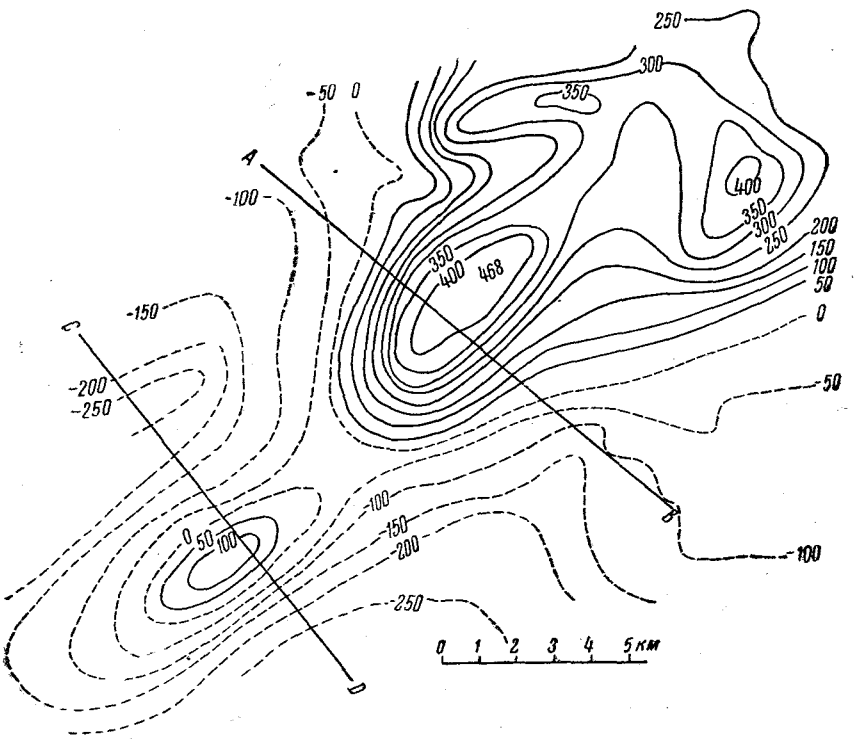


Рис. 7. Выкопировка из карты магнитного поля

3. Рассмотрим более сложный пример. На рис. 9 изображены кривые Z и U_{xz} по трем линиям, находящимся на расстоянии нескольких километров и проложенным перпендикулярно простиранию аномалии. Сложность кривых Z исключает возможность применения каких-либо готовых формул для вычисления элементов залегания. Между тем вычисление глубины залегания и намагниченности пород одновременно с вычислением избыточной их плотности имеет в данном случае решающее значение для оценки перспектив на поиски богатых руд.

Кривые градиентов Z по оси z и кривые градиентов U_{xz} по оси x (рис. 10, *а*), в отличие от кривых на рис. 9, являются вполне сравнимыми, так как их аналитические выражения для каждого однородного по намагниченности и плотности пласта отличаются только постоянными множителями у составляющих по осям координат. Отмечая достаточно определенно вырисовывающееся сходство полученных кривых, не будем останавливаться на их анализе, а рассмотрим градиенты следующего порядка, вычисленные по оси x (рис. 10, *б*). По профилю *50* устанавливаем, что сильномагнитные породы расположены в интервале приблизительно между точками *95—98*. Далее до точки *119* распространены породы со

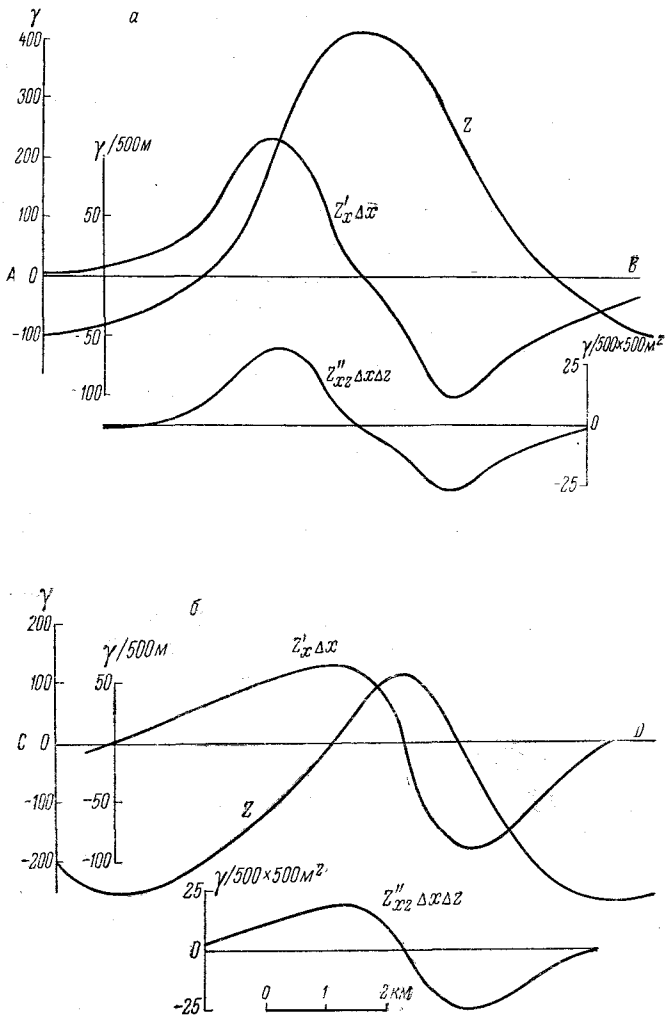


Рис. 8. Вычисление глубины намагниченного тела на карте изолиний рис. 7:

а* — по линии *AB*; *б* — по линии *CD

слабо изменяющейся относительно небольшой намагниченностью. Между точками *124—128* вновь появляются породы со значительно большей намагниченностью.

При рассмотрении гравитационной кривой устанавливаем, что породы с большой избыточной плотностью распространены от точки *95* до точки *119* со слабыми вариациями плотности. После небольшого перерыва вновь отмечаются породы высокой плотности между точками *126—128*.

По профилю *51* чередование положительных и отрицательных ветвей обеих кривых находится в полном соответствии, отмечаются только

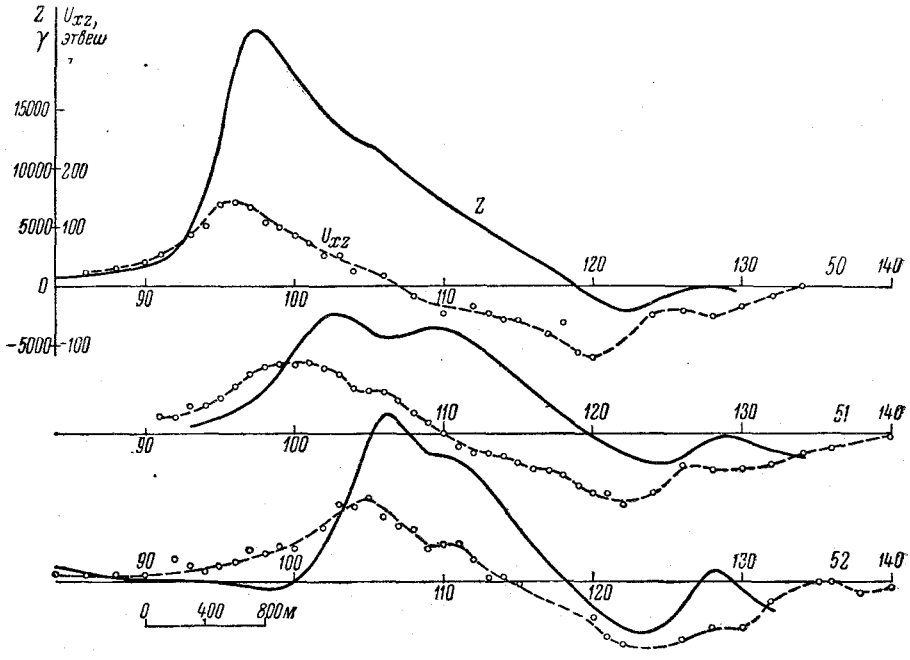


Рис. 9. Кривые Z и U_{xz} по профилям *50—52*

относительно небольшие сдвиги; такая же картина наблюдается и на профиле *52*. Установить определенную закономерность в направлении сдвигов не удается, ввиду чего приходится считать их следствием погрешности первичных данных и графического дифференцирования.

Элементы залегания вычислялись по кривым, вычерченным в масштабе 1 : 5000. Глубина определялась по формуле (21) или иногда другим формулам, а также и графическими способами. Методика и техника вычислений иллюстрируются примером исследования крайней западной аномалии на профиле *50*. На рис. 11, *а* изображена кривая $Z_x'\Delta x$, а на рис. 11, *б* — кривая $Z''_{xz}\Delta x\Delta z$. Применяя к последней интегральную формулу (21), находим глубину центра сечения $h=215$ *м*. Вычитая $\frac{1}{2}\Delta z=$ $=25$ *м*, получаем $h=190$ *м*. По формуле (17) получаем меньшее значение $h=170$ *м*. По точке пересечения биссектрис, повернутых на угол β, находим $h=185$ *м*.

По кривой $Z'_x\Delta x$ (см. рис. 11, *а*) по точке пересечения векторов, повернутых на постоянный угол, находим глубину, равную 190 *м*. Эпицентр залежи находится в точке *95* профиля. По второй производной

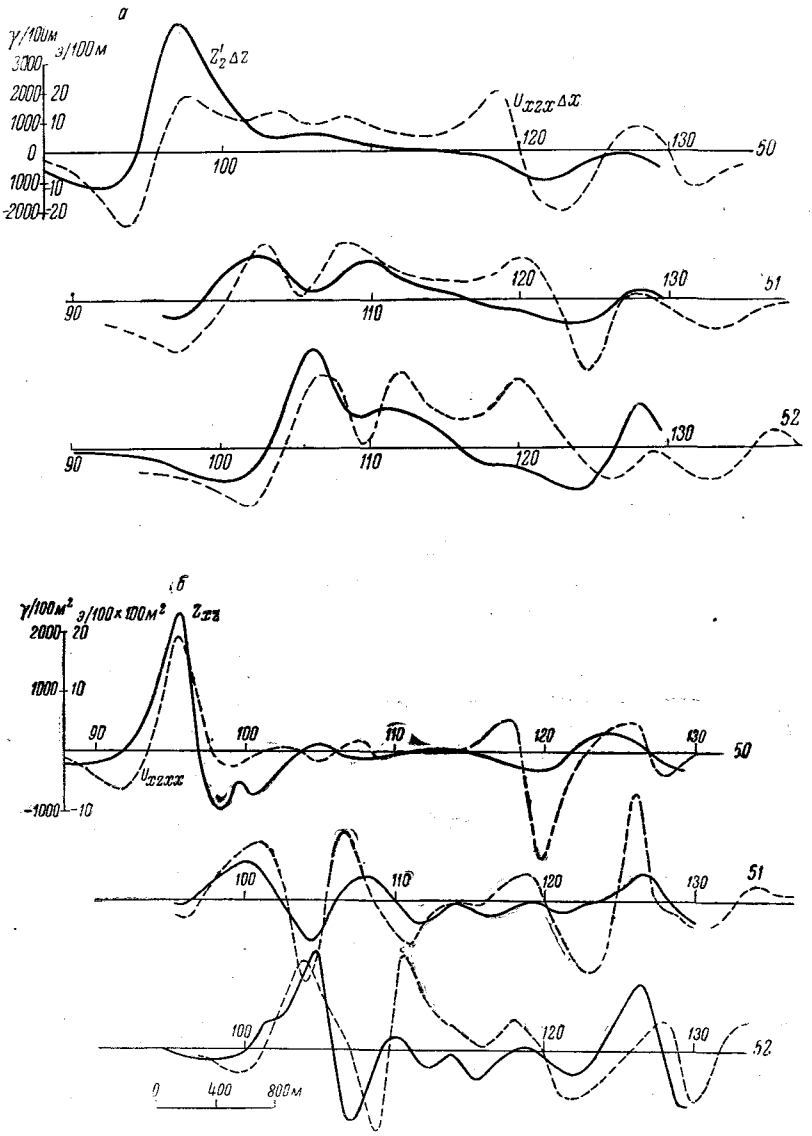


Рис. 10. Кривые градиентов первого (*а*) и второго (*б*) порядков, вычисленные для кривых, приведенных на рис. 9

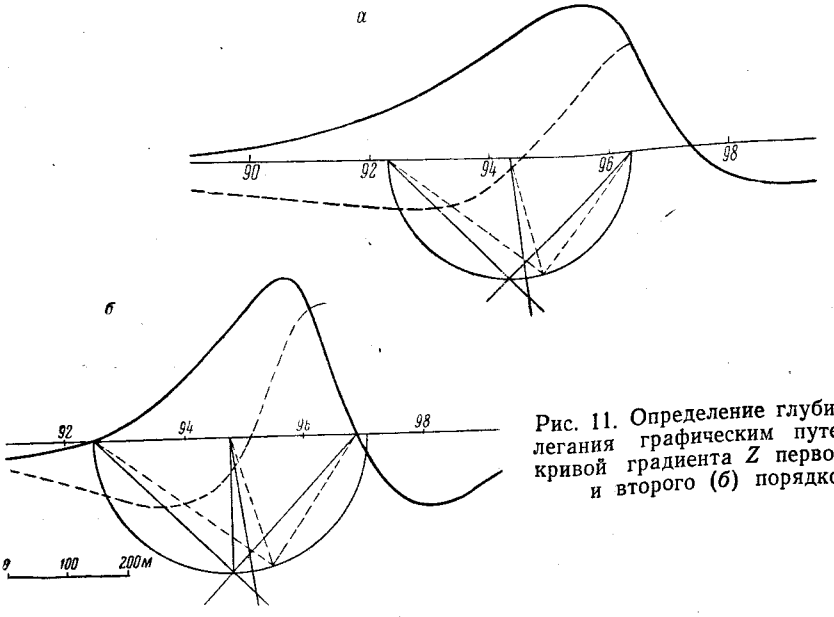


Рис. 11. Определение глубины залегания графическим путем по кривой градиента Z первого (*а*) и второго (*б*) порядков

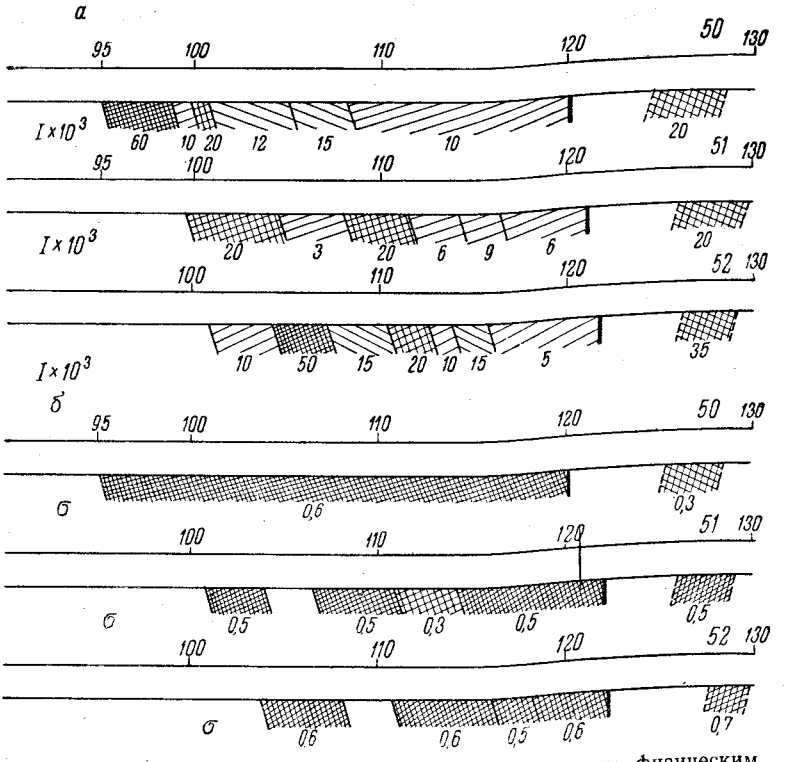


Рис. 12. Разрезы по профилям *50—52*, построенные по физическим параметрам:

а — по намагниченности; *б* — по избыточной плотности

(см. рис. 11, *б*) эпицентр залежи находится в точке *95,5*. Расхождение, несомненно, объясняется влиянием наложенных полей соседних тел, так как мощность их лишь немного превышает глубину залегания.

Обращаясь к той же ветви кривой, изображенной на рис. 12 при $\Delta x=\Delta z=100$ *м* (интервал вдвое больше, чем на рис. 11, *б*), получаем следующие глубины залегания верхней кромки: по формуле (21) $h=180$ *м*, по формуле (17) $h=165$ *м*. Произведя такие же вычисления по гравитационной ветви кривой двумя указанными способами, получаем одинаковую глубину 180 *м*, а графическим способом — 170 *м*. Принимая во внимание небольшое расхождение вычисленных глубин и отдавая предпочтение результатам, полученным графическим способом и по формуле (21), определяем глубину залегания свиты пород в западной части в 180 *м*.

Вычислим избыточную плотность и намагниченность пород, создающих западную ветвь аномалии. Намагниченность

$$I=\frac{Z_{\max}h_c^2}{2\Delta x\Delta z},$$

где h_c — глубина залегания центра сечения.

При $\Delta x=\Delta z=50$ *м* величина $Z_{\max}=660\cdot10^{-5}$, $h_c=205$ *м*. После подстановки находим $I=0{,}056$ *cgs*. Если же I вычислить по кривой, построенной при $\Delta x=\Delta z=100$ *м*, когда $Z_{\max}=2300\cdot10^{-5}$, то $I=0{,}061$ *cgs*. Результаты получились почти одинаковые. Принимаем $I=0{,}06$ *cgs*.

Для вычисления избыточной плотности формула будет та же, изменятся лишь коэффициенты. Обозначая гравитационный максимум на рассматриваемой ветви кривой через F, определим избыточную плотность:

$$\sigma=\frac{Fh_c^2}{2k\Delta x\Delta z}=0{,}7\ cgs,$$

где $k=66{,}7\cdot10^{-9}$;

$F=18\cdot10^{-9}$ *cgs*;

$S=100\times100$ *м*^{2};

$h_c=230$ *м*.

При вычислении градиента на интервале $\Delta x=\Delta z=50$ *м* получаем $\sigma=0{,}6$ *cgs*.

Изменения магнитной кривой восточнее рассмотренной части использовать для вычисления глубины не удается, так как ближайшая ветвь осложнена, а последующие изменения слишком малы. Крайние восточные отрицательная и положительная ветви кривой недостаточно надежны: первая вследствие того, что здесь, по-видимому, сохранилось влияние отрицательного фона, вследствие чего смещена нулевая линия, а вторая — вследствие прекращения съемки до выхода в спокойное поле. Вычисленная по последней ветви глубина равна 200 *м*.

Гравитационная съемка выполнена по профилю большей длины. По этой кривой (см. рис. 10, *б*) в районе точки *120* вычисленная глубина равна 170 *м*, $\sigma=0{,}6$ *cgs*; в районе точки 125 $h=200$ *м*, $\sigma=0{,}25$ *cgs*. При оценке результатов, вычисленных по гравитационной кривой, необходимо иметь в виду, что вследствие значительной относительной погрешности первичных данных использована сглаженная кривая U_{xz}.

Ориентируясь на вычисленные глубины как по рассматриваемому, так и по другим профилям, считаем, что по профилю *50* глубина залега-

ния кристаллического фундамента выдерживается на уровне порядка 180 *м*. Имея в виду одинаковую форму фиктивных тел, центры которых залегают на одинаковой глубине 230 *м* (см. рис. 10, *б*), и зная I и σ для некоторых из этих тел, можно оценить физические параметры всех других, находящихся на этом профиле, по относительным максимумам и минимумам над фиктивными телами.

Изменения гравитационного поля в интервале точек *100—123* не выходят за пределы погрешности измерений и сглаживания, поэтому не придаем им реального значения. В соответствии с этим полагаем, что от точки *95* до точки *120* породы обладают избыточной плотностью $\sigma=0{,}6$ *cgs*. Далее распространены породы с избыточной плотностью $\sigma=0$, а в интервале точек *125,5—128* — с избыточной плотностью 0,2—0,3 *cgs*.

Намагниченность пород в интервале точек *95—98* наибольшая и равна 0,06 *cgs*. Далее к востоку до точки *120* она меняется приблизительно в пределах 0,01—0,02 *cgs*. В интервале точек *124—129* намагниченность пород порядка 0,02 *cgs* или несколько больше.

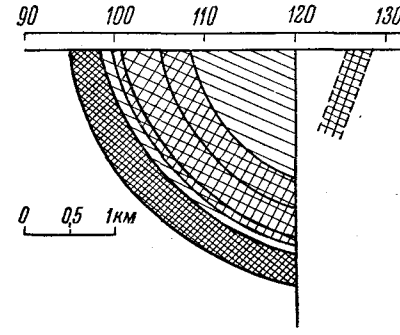


Рис. 13. Структурно-тектоническая схема по профилю *50*

Такая же работа выполнена с кривыми по профилям *51* и *52* (см. рис. 10, *б*), на которых число использованных ветвей увеличилось за счет хорошо расчленившихся полей в западной части. Глубины залегания получились близкие к установленным для профиля *50*. Наибольшие отклонения в отдельных случаях достигали 150 и 220 *м*. По профилю *52* глубины получались несколько меньше, особенно в восточной части, где они равны 160—170 *м*. Результаты определения глубин и разрезов по физическим свойствам изображены на рис. 12. Интерполирование разрезов не произведено вследствие большого расстояния между профилями.

Таким образом, по высшим производным построен разрез верхней части свиты пород кристаллического фундамента. Как видно из разрезов, участками, перспективными для поисков богатых руд, являются: по профилю *50* — от точки *100* до точки *120* и в первую очередь от точки *108* до точки *120* (ширина зоны 1200 *м*); по профилю *51* — от точки *111* до точки *121* (ширина зоны 1000 *м*); по профилю *52* — от точки *113* до точки *122* (ширина зоны 900 *м*).

Для суждений о поведении свиты пород на глубине необходимо иметь геофизические данные на значительно большей площади. Пользуясь весьма ограниченными материалами, можно все же высказать некоторые важные для оценки перспектив предположения. Для этого обратимся к исходным кривым рис. 9. Не останавливаясь на этом вопросе подробно, так как он выходит за рамки темы настоящей статьи, отметим следующее.

Измерения магнитного поля с западной стороны не закончены, однако по профилю *52* ясно видно, что кривая Z имеет отчетливый минимум. Учитывая это обстоятельство, а также тот факт, что кривая U_{xz} в западной части имеет по всем профилям бо́льшие ординаты, чем с восточной, можно предполагать крутое падение свиты пород к востоку. Этот вывод отражен при построении разрезов.

Отрицательное поле Z с восточной стороны, почти полностью исчезающее при построении кривых градиентов второго порядка, объясняется

влиянием нижней границы магнитных пластов, резко ограниченных в районе точки *120*. На этом основании возникает представление о наличии сброса в районе названной точки по всем профилям, подтверждаемое двумя другими фактами: а) новым азимутом простирания изолированной восточной аномалии (на фоне отрицательного поля) по сравнению с азимутом простирания пластов, входящих в состав западной свиты; б) уменьшением мощности западной свиты, которое сопровождается повышением отрицательных значений с восточной стороны, что указывает на приближение к дневной поверхности нижней границы падающих к востоку пластов, срезанных сбросом. Структурно-тектоническая схема, отражающая изложенные соображения (рис. 13), сильно повышает шансы на обнаружение богатых руд, так как окисленные руды в условиях Курской магнитной аномалии приурочены к зонам тектонических нарушений.

Приведенные примеры достаточно убедительно подтверждают практическую полезность использования высших производных магнитного и гравитационного потенциалов и, следовательно, целесообразность дальнейшей работы над развитием метода и его внедрением в практику магниторазведки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Б. А. Расчеты пространственного распределения потенциальных полей и их использование в разведочной геофизике. Изв. АН СССР, серия геофиз., 1947, № 1; 1949, № 3; 1952, № 2; 1954, № 1.
2. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Изд-во АН СССР, 1933.
3. Логачев А. А. Методическое руководство по аэромагнитной съемке. Госгеолтехиздат, 1955.
4. Логачев А. А. Курс магниторазведки. Госгеолтехиздат, 1955.
5. Маловичко А. К. Методы аналитического продолжения силы тяжести и их приложение к задачам гравиразведки. Гостоптехиздат, 1956.
6. Ступак Н. К. О новом способе изображения магнитных и гравитационных аномалий. Разведка и охрана недр, 1959, вып. 7.