Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXIX, вып. 3, 1961 г.

ОБ ИЗОБРАЖЕНИИ ОБРАЗОВ МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ПРОЕКЦИЯМИ ВЕКТОРОВ

П. В. Филиппов

Методы проективной геометрии дают возможность пользоваться многочисленными геометрическими системами [3], что широко использовано в трудах Е. С. Федорова. В настоящее время даже в учебных руководствах по проективной геометрии не упоминается о существовании различных геометрических систем, которые, однако, открывают широкие возможности для решения ряда задач инженерной и научной практики.

При исследованиях различных процессов обычно приходится учитывать большое число факторов, влияющих на эти процессы, т. е. пользоваться функциональными зависимостями, в которых более трех независимых переменных. При графическом выражении таких зависимостей неизбежно приходится пользоваться понятиями о многомерных пространствах и изображениями образов этих пространств на плоскости чертежа.

Как показано в настоящей работе, для изображений образов многомерных пространств удобны геометрические системы, элементами которых являются векторы или их совокупности, определенным образом расположенные в трехмерном пространстве.

Е. С. Федоров в работе [2] доказал возможность построения системы параллельных векторов в пространстве, однако ни в этой работе, ни в других его трудах указанная возможность не получила конкретной разработки и не использовалась для решения задач, связанных с изображениями образов четырехмерного пространства на плоскости. Эти вопросы разрешены в настоящей статье.

Кроме того, Е. С. Федоров указал на возможность построения системы непараллельных векторов в пространстве. Более подробное изучение такой системы позволяет придти к выводу, что непараллельные друг другу векторы в пространстве образуют не одну, а две системы: систему векторов, параллельных некоторой плоскости, и систему произвольно расположенных векторов. Этот вопрос не освещен в трудах Е. С. Федорова, имеется в виду изложить его в настоящей работе, а также показать, каким образом указанные две системы могут быть использованы практически для изображений на плоскости образов пространств пяти и шести измерений.

Далее будет показано, каким образом системы векторов пространства могут получить практическое использование для изображений на плоскости образов пространств любого числа измерений.

1. Изображение образов четырехмерного пространства ортогональными проекциями параллельных векторов

Изображение точек пространства четырех измерений параллельными векторами трехмерного пространства легко может быть представлено в системе прямоугольных координат.

Пусть на рис. 1 некоторая точка A трехмерного пространства определяется тремя прямоугольными координатами x_A, y_A и z_A. Если эту точку принять за начало вектора и провести таковой, то длина вектора выразит четвертую координату t_A точки пространства уже четвертого измерения. Таким образом, некоторая точка A пространства

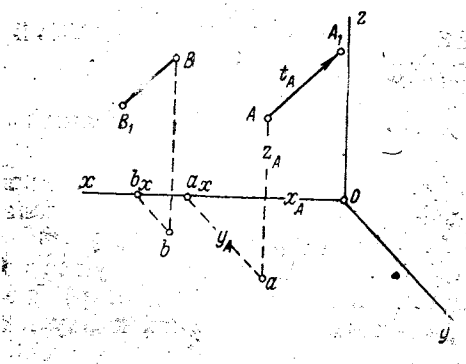


Рис. 1

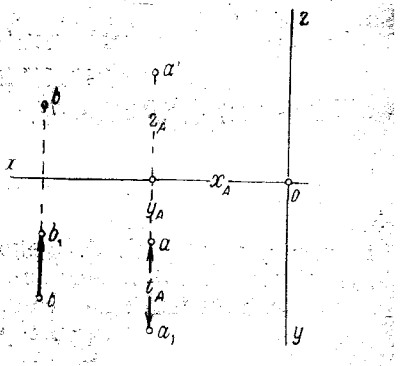


Рис. 2

четырех измерений изображается в трехмерном пространстве вектором AA_1. Любой другой вектор, например BB_1, параллельный вектору AA_1, будет изображать другую точку четырехмерного пространства B.

При переходе от пространственного изображения рис. 1 к плоскости чертежа каждый вектор должен быть представлен двумя ортогональными проекциями, положение которых зависит от положения вектора в пространстве. При выборе положения векторов в пространстве необходимо руководствоваться, во-первых, тем, чтобы в ортогональных проекциях их длины, т. е. четвертые координаты точек, были представлены без искажения, и, во-вторых, тем, чтобы сами ортогональные проекции векторов были простейшего вида. Поэтому направление векторов следует выбирать параллельным одной из осей координат, так как при этом на одну плоскость проекций вектор будет проектироваться без искажения, а на другую — в виде точки.

Примем направление векторов параллельным оси oy. В таком случае две ортогональные проекции вектора некоторой точки A изобразятся, как показано на рис. 2, и позволят определить все четыре координаты этой точки непосредственно по чертежу. Будем считать, что положительное направление координат t совпадает с положительным направлением координат y.

Так как вертикальные проекции начала и конца каждого вектора совпадают в одной точке, в дальнейшем эту точку будем обозначать лишь одной буквой, соответствующей началу вектора. На рис. 2 показана также точка B, координата t_B которой имеет отрицательное значение.

Рассмотрев проектирование точек четырехмерного пространства, можно придти к выводу, что каждая точка такого пространства изобра-

жается на плоскости чертежа в общем случае тремя проекциями, связанными друг с другом одной прямой, перпендикулярной оси ox. Назовем эти проекции горизонтальной — a, вертикальной — a' и векторной — a_1.

Две точки определяют прямую. На рис. 3 показана прямая AB, проекции которой — горизонтальная ab, вертикальная $a'b'$ и векторная a_1b_1 — определяются в результате соединения прямыми линиями начал и концов векторов точек A и B.

Построим следы прямой AB на координатных гиперплоскостях.

Для построения следа на гиперплоскости $oxyz$ надо на прямой найти такую точку, у которой координата t равна нулю. Эта точка Q определяется в пространстве как точка пересечения прямой начал векторов и прямой концов векторов. На рис. 3 горизонтальная q и векторная q_1 проекции следа Q определяются в пересечениях соответствующих

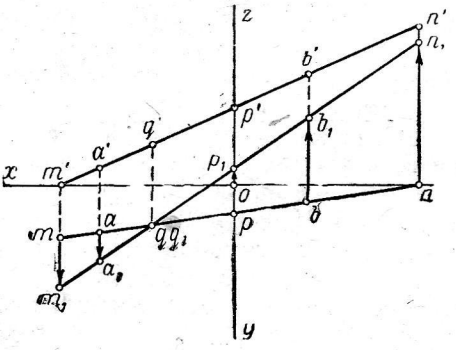


Рис. 3

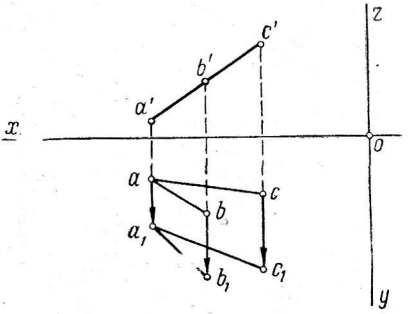


Рис. 4

проекций прямой; вертикальная проекция q' связана с найденными проекционно.

Следом прямой на гиперплоскости $oxyt$ является такая точка прямой, у которой координата z равна нулю. Этим следом на рис. 2 является точка M. Руководствуясь аналогичными соображениями, определены: точка P — след прямой на гиперплоскости $oyzt$ и точка N — след прямой на гиперплоскости $oxzt$.

С координатными плоскостями прямая в четырехмерном пространстве в общем случае не пересекается [1]. Плоскость определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой. В частном случае одна из трех проекций плоскости может изобразиться прямой, тогда плоскость может быть названа проектирующей. На рис. 4 представлена вертикально проектирующая плоскость ABC. Любая точка, лежащая в этой плоскости, будет иметь вертикальную проекцию на вертикальной проекции прямой $a'b'c'$.

Гиперплоскость определяется четырьмя точками, не лежащими в одной плоскости, и пересекается с координатными плоскостями по прямым, которые называются следами гиперплоскости на координатных плоскостях, с координатными осями — в точках, называемых точками схода следов гиперплоскости. Отрезки, которые гиперплоскость отсекает на координатных осях, называются параметрами гиперплоскости. Положение гиперплоскости в четырехмерном пространстве будет определенным, если задать все четыре ее параметра.

---

[1] Прямая и координатная плоскости могут пересекаться, если они лежат в одной гиперплоскости.

На рис. 5, *а* построены четыре параметра некоторой гиперплоскости P — отрезки op_x, op_y, op_z и op_t. Соединяя прямыми точку p_x с точками p_y, p_z и p_t, получаем прямые P_{xy}, P_{xz} и P_{xt}, которые являются следами гиперплоскости соответственно на координатных плоскостях xoy, xoz и xot.

Как видно из рисунка, три следа гиперплоскости определяют четыре ее параметра, а следовательно, гиперплоскость однозначно может быть задана тремя ее следами. Такое задание гиперплоскости является крайне простым, удобным и аналогичным заданию в трехмерном пространстве плоскости ее двумя следами.

Гиперплоскость, одна проекция которой изображается прямой линией, может быть названа проектирующей гиперплоскостью. На рис. 5, *б* изображена вертикально проектирующая гиперплоскость R

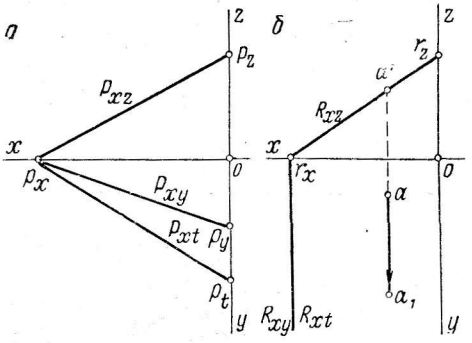


Рис. 5

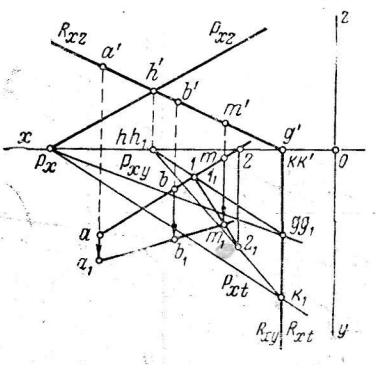


Рис. 6

следами R_{xy}, R_{xz} и R_{xt}. Вследствие совпадения следов R_{xy} и R_{xt} изображение этой гиперплоскости ничем не отличается от изображения вертикально проектирующей плоскости в начертательной геометрии трехмерного пространства.

В гиперплоскости R показана точка A, вертикальная проекция которой лежит на следе R_{xz}.

Рассмотрим решение некоторых задач на взаимное пересечение образов четырехмерного пространства.

Пересечение прямой с гиперплоскостью. Прямая пересекается с гиперплоскостью в одной точке, для определения которой необходимо: 1) через данную прямую провести вспомогательную гиперплоскость и определить плоскость ее пересечения с данной гиперплоскостью; 2) во вспомогательной гиперплоскости через данную прямую провести вспомогательную плоскость и определить прямую ее пересечения с плоскостью, полученной ранее в результате пересечения данной и вспомогательной гиперплоскостей (эти две плоскости пересекаются по прямой, так как лежат в одной вспомогательной гиперплоскости); 3) искомую точку определить как точку пересечения данной прямой с линией пересечения указанных выше двух плоскостей (эти две прямые пересекаются, так как лежат в одной вспомогательной плоскости).

На рис. 6 представлено решение задачи по определению точки встречи прямой AB с гиперплоскостью P, заданной следами. Для отыскания искомой точки выполнены следующие построения: 1) через прямую AB проведена вспомогательная вертикально проектирующая гиперплоскость R и определена плоскость GHK пересечения данной и вспомогательной гиперплоскостей; 2) в гиперплоскости R через пря-

мую AB проведена вспомогательная горизонтально проектирующая плоскость, горизонтальная проекция которой совпадает с горизонтальной проекцией данной прямой, и определена прямая *1—2* пересечения плоскостей вспомогательной и GHK; 3) искомая точка M определена в пересечении данной прямой AB и линии *1—2*; первоначально определена векторная проекция m_1 искомой точки, а затем и две другие.

На рис. 7 показано решение аналогичной задачи для случая, когда гиперплоскость задана не следами, а четырьмя не лежащими в одной плоскости точками A, B, C и D.

Для определения точки M на рис. 7 выполнены те же построения, что и на рис. 6. Плоскость *1—2—3* на рис. 7 — плоскость пересечения данной и вспомогательной вертикально проектирующей гиперплоскости, проведенной через данную прямую EF, прямая *I—II* — прямая пересечения плоскости *1—2—3* и вспомогательной горизонтально проектирующей плоскости, также проведенной через прямую EF.

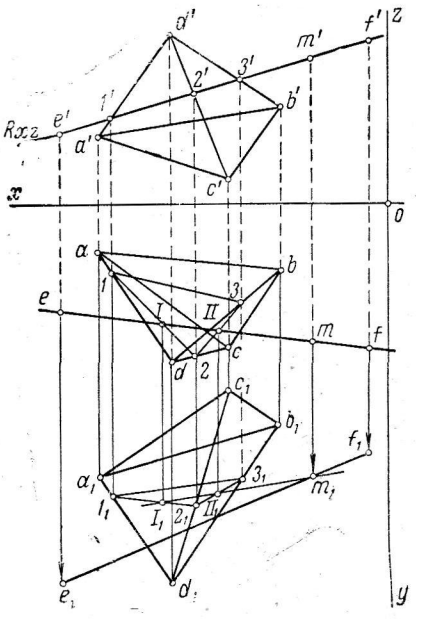


Рис. 7

Пересечение прямой и плоскости, лежащих в одной гиперплоскости. Прямая и плоскость, лежащие в одной гиперплоскости, пересекаются в одной точке как прямая и плоскость, лежащие в трехмерном пространстве. Пересечение прямой и плоскости, лежащих в одной гиперплоскости, может быть использовано как условие, определяющее принадлежность данной точки данной гиперплоскости. Такое условие может быть сформулировано следующим образом: если точка лежит в гиперплоскости, то с любой другой точкой этой гиперплоскости она образует прямую, которая либо пересекает любую плоскость, лежащую в данной гиперплоскости, либо лежит в этой плоскости. Это условие может быть использовано для решения практических задач, встречающихся в физико-химическом анализе. Рассмотрим решение одной из таких задач.

Всякое сложное вещество (минерал, горная порода и т. п.) в физической химии принято называть равновесной системой, состоящей из нескольких компонентов. За компоненты системы обычно принимаются химические элементы и наипростейшие химические соединения, в виде которых определяются элементы при химическом анализе. При исследовании сложных систем приходится устанавливать принадлежность данной системы к группе систем, характеризующихся определенными соотношениями между концентрациями компонентов.

Решить этот вопрос можно графическим и аналитическим путями [7, 8].

Г. Буке при выяснении принадлежности минералов к группе турмалинов использует следующий прием. Выбираются четыре химических состава, которые входят в ряд турмалина и принимаются за четыре точки четырехмерного пространства, так как каждый состав определяется соответствующими количествами четырех независимых компонентов; количество каждого компонента принимается за одну из четырех координат точки.

Если вещество, состоящее из тех же компонентов, является также турмалином, то оно может рассматриваться как точка четырехмерного пространства, принадлежащая геометрическому образу, определяемому четырьмя данными точками. С точки зрения начертательной геометрии четырехмерного пространства решение такого вопроса представляет собой решение задачи о принадлежности данной точки данной гиперплоскости.

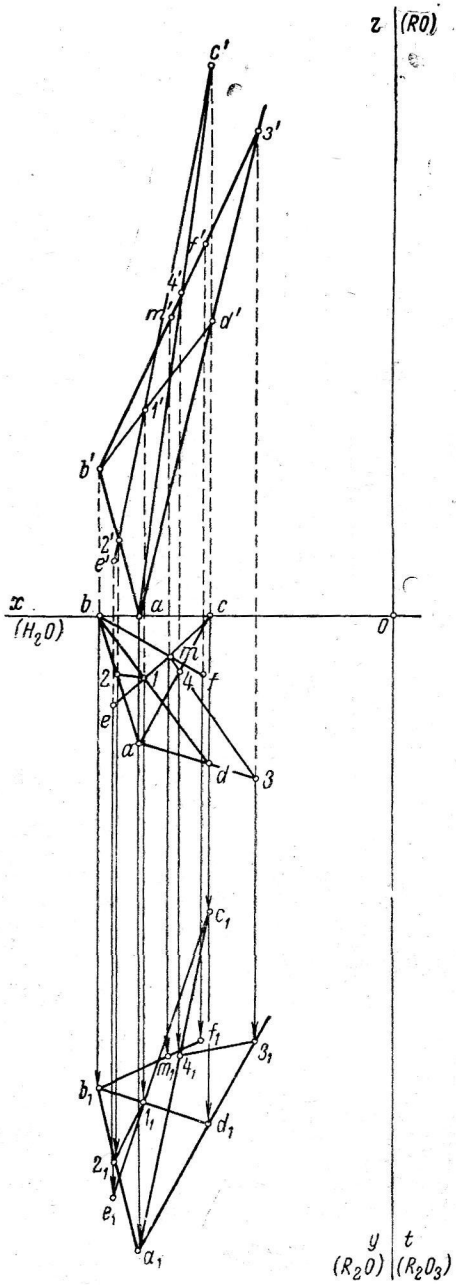


Рис. 8

Г. Буке [11] эту задачу решил методом П. Шоута [12]. Недостатком этого метода является необходимость наличия на чертеже четырех проекций каждой точки четырехмерного пространства.

Более простое графическое решение того же примера было предложено Е. С. Федоровым [5], а аналитическое В. П. Шишокиным [8]*. Простое графическое решение этого примера методом параллельных отрезков дала З. И. Прянишникова [9].

Рассмотрение того же примера в настоящей работе преследует цель показать, что подобные задачи могут успешно решаться методом ортогональных проекций параллельных векторов пространства, и эти решения, как показано, аналогичны решениям элементарных задач начертательной геометрии.

Итак, даны четыре вещества *A*, *B*, *C* и *D*, из которых каждое представляет пятикомпонентную систему. Количественный и качественный составы этих веществ следующие:

	H_2O	R_2O	RO	R_2O_3	$SiO_2+B_2O_3$
A	13,79	6,90	—	27,58	51,72
B	16	—	8	25,60	50,40
C	10	—	30	16	44
D	10	8	16	19,60	46,40

Независимыми являются числа первых четырех столбцов; числа последнего столбца дополняют сумму чисел первых четырех до 100.

* Метод решения, предложенный В. П. Шишокиным, следует также назвать графоаналитическим, так как им вычислено характеристическое уравнение и составлена его номограмма. По этой номограмме и выясняется принадлежность минералов к группе турмалинов.

Даны также вещества E и F, состоящие из тех же компонентов:

	H_2O	R_2O	RO	R_2O_3	$SiO_2+B_2O_3$
E	15,21	4,80	3,04	26,75	50,19
F	10,34	3,21	20,22	19,82	46,41

Вещества A, B, C и D—турмалины, требуется определить, являются ли турмалинами вещества E и F. Для решения поставленной задачи принимаем вещества A, B, C и D за четыре точки четырехмерного пространства, координатами x, y, z и t которых являются соответственно компоненты H_2O, R_2O, RO и R_2O_3. Эти четыре точки определяют некоторую гиперплоскость $ABCD$ (рис. 8).

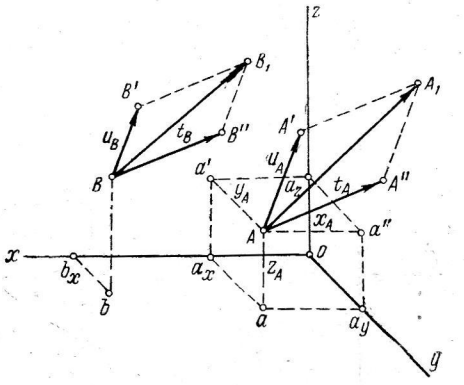


Рис. 9

Если вещество E является турмалином, то точка E, построенная на рис. 8, должна лежать в гиперплоскости $ABCD$, т. е., например, вместе с точкой C должна определить прямую, которая пересекает плоскость ABD в некоторой точке.

Для построения точки встречи прямой CE с плоскостью ABD в гиперплоскости $ABCD$ через прямую CE проведена вспомогательная вертикально проектирующая плоскость, вертикальная проекция которой совпадает с вертикальной проекцией $c'e'$ прямой CE, и построена прямая $1—2$ пересечения этой плоскости с плоскостью ABD. Прямые CE и $1—2$ пересекаются в точке 1 (горизонтальная и векторная проекции пересекаются и точки пересечения связаны проекционно), и, следовательно, вещество E является турмалином.

Аналогично доказывается, что вещество F—также турмалин (прямая FB пересекает плоскость CAD в точке M, а следовательно, точка F лежит в гиперплоскости $ABCD$).

Как видно из рис. 8, вопрос о принадлежности данной системы к группе систем с соответствующими соотношениями компонентов решается графически — построением точки встречи прямой с плоскостью.

2. Изображение образов пятимерного пространства ортогональными проекциями векторов, параллельных некоторой плоскости

Если в точке A пространства (рис. 9) провести два вектора AA' и AA'', то длина каждого может выражать одну из координат некоторой точки. Так как положение точки A уже определяется тремя координатами x_A, y_A и z_A, то длины двух векторов выражают еще две координаты t_A и u_A точки пространства уже пяти измерений. Эти векторы могут быть сложены по правилу параллелограмма, и тогда равнодействующий вектор AA_1 будет однозначно соответствовать точке пространства пяти измерений. Если в точке B пространства провести два вектора BB' и BB'', соответственно параллельные векторам AA' и AA'', то длины проведенных векторов будут выражать координаты t_B и u_B второй точки пространства пяти измерений. Плоскость, определяемая векторами BB' и BB'', параллельна плоскости векторов AA' и AA'', и, следовательно, равнодействующие векторы AA_1 и BB_1 параллельны одной плоскости.

В связи с изложенным можно построить систему векторов в пространстве, параллельных некоторой плоскости, которую назовем плоскостью параллелизма. В этой системе каждый вектор однозначно

соответствует точке пространства пяти измерений. Такой вектор может быть изображен на плоскости чертежа двумя ортогональными проекциями, как это принято в начертательной геометрии.

Возможность построения системы векторов, параллельных плоскости, подтверждается тем, что два произвольных элемента этой системы — два вектора — определяют так называемую линейную приму [1], т. е. такую совокупность элементов (векторов), которая всегда получается тождественной, какие бы два ее элемента мы ни избрали для определения.

Линейная прима данной системы представляет линейчатую поверхность второго порядка, в частности гиперболический параболоид. Действительно, если взять два вектора, параллельных некоторой плоскости, и соединить их начала и концы прямыми линиями, то определяется их линейная прима. Каждый вектор примы должен быть параллелен той же плоскости и иметь начальную точку на прямой, соединяющей начала двух данных векторов, а конечную точку на прямой, соединяющей концы этих векторов. Совокупность всех векторов примы и образует гиперболический параболоид.

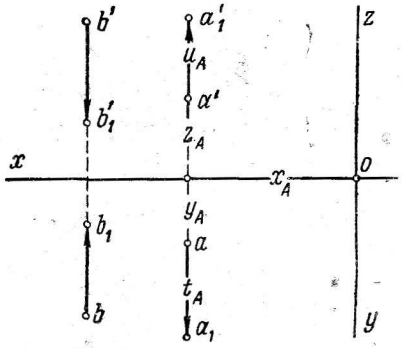


Рис. 10

При практическом использовании системы векторов, параллельных плоскости, для изображения на чертеже образов пространства пяти измерений следует выбрать плоскость параллелизма так, чтобы все пять координат каждой проектируемой точки были представлены без искажения.

Выберем за плоскость параллелизма координатную плоскость yoz и изобразим вектор AA_1 (рис. 10), параллельный этой плоскости, проекциями на плоскости xoy и xoz. Эти проекции будут являться составляющими векторами и их длины будут выражать без искажения координаты t_A и u_A точки пространства пяти измерений в дополнение к трем координатам x_A, y_A и z_A, которые определяются началом вектора.

Будем считать, что положительное направление координат t совпадает с положительным направлением координат y, а положительное направление координат u — с положительным направлением координат z. На рис. 10 показан также вектор BB_1, координаты которого t_B и u_B отрицательные.

Предложенный выбор плоскости параллелизма удобен тем, что на чертеже точка пространства пяти измерений изображается фактически четырьмя проекциями (две проекции начала вектора и две — конца вектора), связанными прямой проекционной связи, перпендикулярной оси ox, как это имеет место при изображении точек трехмерного пространства их ортогональными проекциями. Назовем эти проекции: a — горизонтальной, a' — вертикальной, a_1 — горизонтальной векторной, a_1' — вертикальной векторной.

На рис. 11 показано решение задачи на построение точки пересечения прямой FG с гиперплоскостью $ABCDE$ [2].

---

[1] Терминология Е. С. Федорова [1].

[2] В пространстве пяти измерений гиперплоскостью является четырехмерное пространство, которое определяется пятью точками, не принадлежащими одному трехмерному пространству.

1. Через прямую проведена вспомогательная проектирующая гиперплоскость, вертикальная векторная проекция которой совпадает с соответственной проекцией прямой $f_1'g_1'$, и построено трехмерное пространство пересечения вспомогательной и данной гиперплоскостей. Это пространство определено точками *K*, *L*, *M* и *N*.

2. Через прямую проведено лежащее во вспомогательной гиперплоскости вспомогательное трехмерное проектирующее пространство, вертикальная проекция которого совпадает с вертикальной проекцией прямой $f'g'$, и построена плоскость *1—2—3* пересечения этого пространства с пространством *KLMN*.

3. Через прямую проведена лежащая во вспомогательном трехмерном пространстве проектирующая плоскость, горизонтальная проекция которой совпадает с горизонтальной проекцией прямой *fg*, и построена прямая *I—II* пересечения этой плоскости с плоскостью *1—2—3*.

4. Точка *P* пересечения данной прямой с данной гиперплоскостью определена в пересечении данной прямой с прямой *I—II*; первоначально определена горизонтальная векторная проекция этой точки p_1 в пересечении соответственных проекций прямых *FG* и *I—II* *;

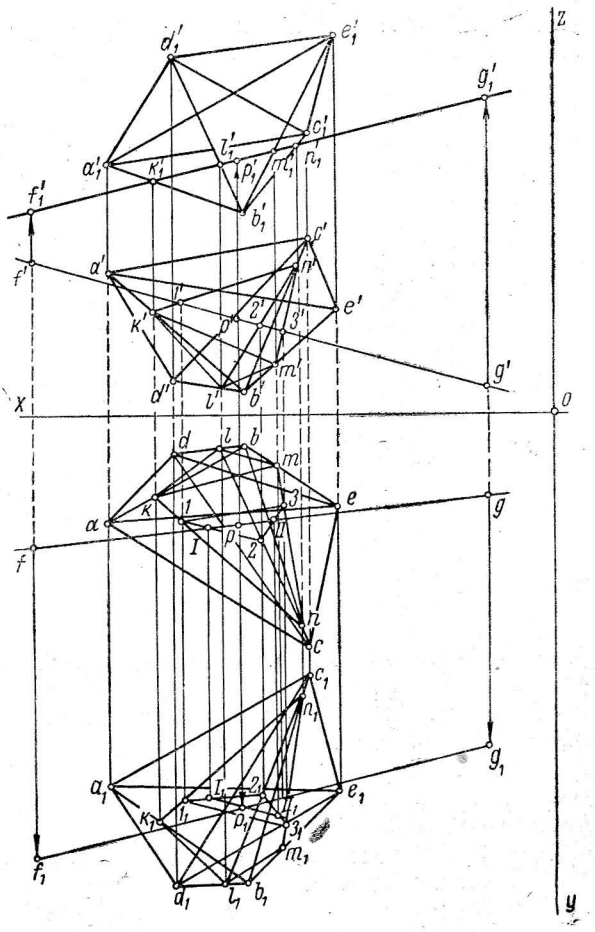


Рис. 11

Решение рассмотренной задачи аналогично решению подобной задачи для четырехмерного пространства, которая была представлена на рис. 7. В случае рис. 11 добавляется по сравнению со случаем рис. 7 лишь одно построение — проведение через прямую вспомогательной гиперплоскости, т. е. вспомогательного четырехмерного пространства. Сравнивая решения этих двух задач с решением задачи на построение точки встречи прямой с плоскостью в трехмерном пространстве, можно во всех трех случаях отметить общее положение: все вспомогательные построения позволяют задачу пространства того или иного числа измерений свести к задаче планиметрической — построению точки пересечения двух прямых, лежащих в одной плоскости.

* Чтобы не загромождать чертеж, стрелки векторов показаны лишь у проекций прямой *FG* и точки *P*.

3. Изображение точек пространства шести и более измерений ортогональными проекциями векторов, произвольно расположенных в пространстве, и различными комбинациями векторов

Если в точке A пространства провести не два вектора, как показано на рис. 9, а три AA', AA'' и AA''' (рис. 12), то длины этих векторов будут выражать три координаты t, u и v точки. Так как положение точки A уже определяется тремя координатами x_A, y_A и z_A, то длины векторов выражают еще три координаты точки пространства уже шести измерений. Три вектора AA', AA'' и AA''' могут быть представлены одним равнодействующим вектором, который однозначно будет соответствовать точке пространства шести измерений. В связи с изложенным можно построить систему произвольно расположенных векторов в простран-

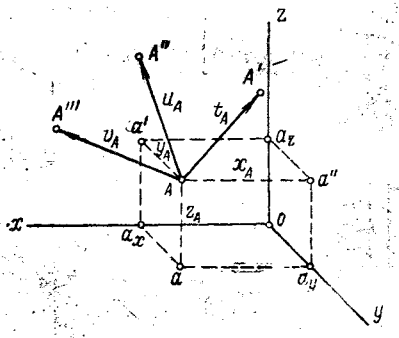


Рис. 12

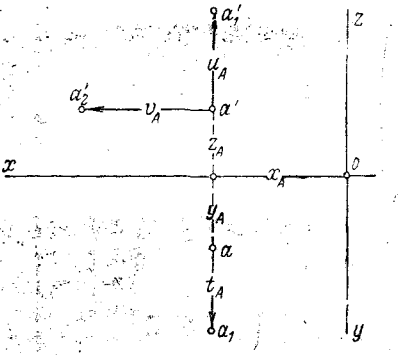


Рис. 13

стве, в котором каждый вектор произвольного направления в пространстве однозначно соответствует точке пространства шести измерений. Такой вектор на плоскости чертежа может быть изображен также двумя ортогональными проекциями, как и в предыдущей системе. Совокупность векторов линейной примы такой системы будет представлять собой также линейчатую поверхность второго порядка, но эта поверхность будет однополостным гиперболоидом, так как никакие три вектора примы не должны быть параллельны одной плоскости.

Практически изображение точки пространства шести измерений на ортогональном чертеже удобно осуществить составляющими векторами, которые следует принять параллельными осям координат ox, oy и oz. На рис. 13 таким методом изображена точка A пространства шести измерений. Все шесть координат этой точки x_A, y_A, z_A, t_A, u_A и v_A представлены на чертеже без искажения. Положительные направления координат t, u и v будем считать совпадающими с положительными направлениями осей соответственно oy, oz и ox.

Предложенный метод позволяет изобразить точку пространства шести измерений на плоскости чертежа пятью проекциями, из которых четыре связаны общей прямой, перпендикулярной оси ox, а пятая связана с одной из четырех прямой, перпендикулярной оси oz. Эта проекционная связь аналогична связи между ортогональными проекциями точки трехмерного пространства.

На рис. 14 показана прямая шестимерного пространства и построены ее следы на координатных гиперплоскостях: точка P — на $oxytuv$, точка S — на $oxyzuv$, точка L — на $oxyztw$, точка K — на $oxyztv$, точка M — на $oyztuv$ и точка N — на $oxztuv$.

Если к вектору, произвольно расположенному в пространстве, прибавить вектор, параллельный координатной оси, то образуется пара векторов, которая будет однозначно соответствовать точке пространства уже семи измерений.

Пара векторов — произвольно расположенный в пространстве и параллельный некоторой плоскости — будет выражать точку пространства восьми измерений.

Пара произвольно расположенных векторов в пространстве однозначно соответствует точке пространства уже девяти измерений. Изображение такой точки представлено ортогональными проекциями на

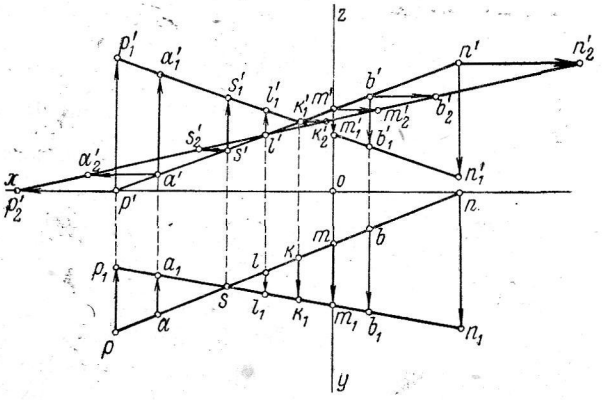


Рис. 14

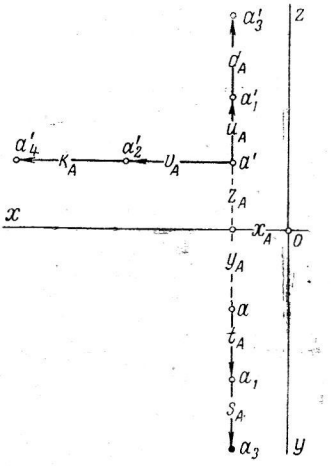


Рис. 15

рис. 15, где все девять координат x_A, y_A, z_A, t_A, u_A, v_A, s_A, d_A, k_A изображены в натуральную величину.

Как видно из рисунка, точка девятимерного пространства изображается восемью проекциями, из которых шесть связаны прямой, перпендикулярной оси *ox*, а две следующие — с одной из шести первых прямой, перпендикулярной оси *oz*.

Три вектора, из которых два произвольно расположены в пространстве, а третий параллелен координатной оси, соответствуют точке пространства десяти измерений. Если вместо вектора, параллельного оси координат, третий вектор будет параллелен плоскости координат, то такая тройка векторов будет соответствовать точке пространства одиннадцати измерений. Тройка векторов, произвольно расположенных в пространстве, соответствует точке пространства двенадцати измерений.

Таким образом, пользуясь комбинациями векторов — параллельных оси координат, параллельных плоскости координат и произвольно расположенных в пространстве, можно изображать в ортогональных проекциях точки пространства любого числа измерений, т. е. практически в ортогональных проекциях могут быть изображены функциональные зависимости с любым числом независимых переменных.

Выводы

1. Показана возможность построения двух геометрических систем непараллельных векторов в пространстве.

2. Разработан новый способ изображения образов многомерных пространств ортогональными проекциями различно расположенных

в пространстве векторов и их комбинаций, который является весьма простым и доступным, так как основан на методе ортогональных проекций и методе прямоугольных координат.

3. Решение позиционных задач многомерных пространств аналогично решению подобных задач в элементарной начертательной геометрии трехмерного пространства, за исключением особенностей, характеризующих многомерные пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Е. С. Новая геометрия как основа черчения. Спб, 1907.
2. Федоров Е. С. Точное изображение точек пространства на плоскости. Записки ЛГИ, т. I, вып. 1, 1908.
3. Федоров Е. С. Основные черты новой геометрии. Записки ЛГИ, т. III, вып. 5, 1912.
4. Федоров Е. С. Простое и точное изображение точек пространства четырех измерений на плоскости посредством векторов. Записки ЛГИ, т. II, вып. 3, 1909.
5. Федоров Е. С. Графические операции с четырьмя независимыми переменными. Изв. Российской Академии наук, серия VI, № 7, 1918.
6. Федоров Е. С. Линейные совокупности векторов в пространстве. Записки ЛГИ, т. V, вып. 1, 1914.
7. Лодочников В. Н. Простейшие способы изображения многокомпонентных систем. Изв. Ин-та физико-химич. анализа, т. II, вып. 2, 1924.
8. Шишокин В. П. Аналитические и графические методы исследования сложных равновесных систем. Изв. Ин-та физико-химич. анализа, т. III, вып. 1, 1926.
9. Прянишникова З. И. Обобщение проекций Е. С. Федорова. Сб. «Методы начертательной геометрии и ее приложения». ГИТТЛ, 1955.
10. Житомирский О. К. Проектная геометрия в задачах. ГИТТЛ, 1954.
11. Rocke H. E. Neues Jahrbuch für Mineralogie etc, 1916, B. II, S. 109.
12. Schoute P. H. Mehrdimensionale Geometrie. B. I. Leipzig, 1902.