Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXIX, вып. 3, 1961 г.

РЕЦИПРОЧНЫЕ ПРОЕКЦИИ

П. В. Филиппов

1. Преобразование обратными радиусами

В основе реципрочных проекций лежит реципрочное преобразование, или так называемое преобразование обратными радиусами, которое вытекает из инволюции точек на прямой [1]. В инволюции точек на прямой имеются две вещественные или две мнимые двойные точки, которые делят гармонически любую пару соответственных точек. Средняя точка между двойными точками называется центром инволюции и ей соответствует бесконечно удаленная точка прямой. Произведение расстояний двух соответственных точек до центра инволюции есть величина постоянная.

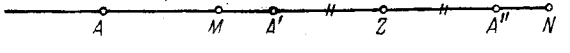


Рис. 1

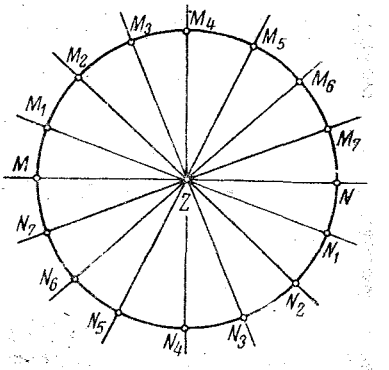


Рис. 2

Пусть на прямой имеются две двойные точки M и N и центр инволюции — точка Z (рис. 1).

Если двойные точки вещественные, то соответственными точками в инволюции на прямой будут точки A и A'.

Для этих точек

$$ZA \cdot ZA' = (ZM)^2.$$

Если двойные точки M и N мнимые, то точка A'', соответственная точке A, получается, если отрезок ZA' отложить по другую сторону центра инволюции.

Если через точку Z провести пучок прямых и на каждой прямой представить инволюцию точек, выбрав расстояние двойных точек до центра инволюции для всех направлений постоянным, то в плоскости будем иметь окружность инволюции (рис. 2). Эта окружность может

[1] Подробно об инволюции точек на прямой см. [1, 3, 4].

быть вещественной или мнимой в зависимости от того, вещественны или мнимы двойные точки инволюции на всех прямых пучка. Центр Z такой окружности соответствует каждой бесконечно удаленной точке плоскости чертежа.

Пользуясь имеющейся в плоскости окружностью инволюции, можно для каждой точки плоскости построить единственную ей соответственную точку. Такое построение выполняется на основе полярного соответствия точек и прямых относительно окружности. Если дана окружность инволюции с центром Z и вне этой окружности некоторая точка, для которой нужно построить соответственную точку, то строим для данной точки ее поляру относительно данной окружности, так как известно, что полюс и поляра на прямой, проходящей через центр окружности, определяют пару точек, гармонически сопряженных с точками пересечения этой прямой с окружностью.

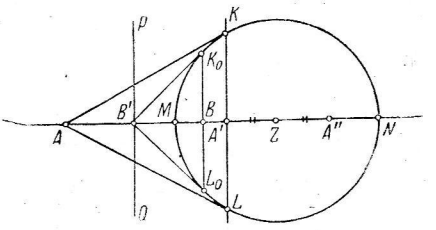


Рис. 3

Прямая KL на рис. 3 есть поляра точки A относительно данной окружности. Эта прямая проходит через точки K и L касания к окружности инволюции прямых, проходящих через точку A. Точка A в этом построении называется полюсом прямой KL. Пересечение поляры KL с прямой AZ определяет на этой прямой точку A', соответственную точке A на основании указанного свойства полюса и поляры.

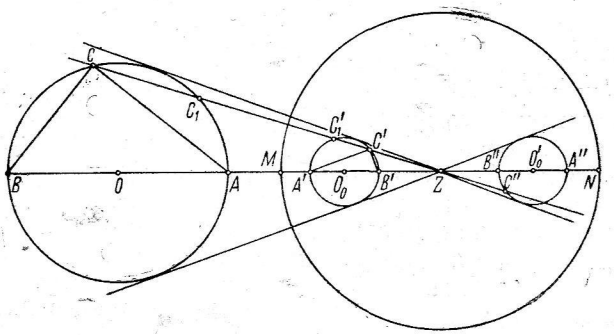


Рис. 4

Если окружность инволюции считать мнимой, то для построения точки A'', соответственной точке A, надо отрезок ZA' отложить по другую сторону центра инволюции, как показано на рис. 3 ($ZA' = ZA''$).

Если точка задана внутри окружности инволюции и надо построить точку, соответственную ей, то такое решение задачи выполняется также построением поляры этой точки относительно данной окружности. Построение поляры PQ точки B такое же, как и для поляры точки A, но в обратной последовательности.

Поляра центра Z есть бесконечно удаленная прямая плоскости чертежа, т. е. центр Z соответствует всем бесконечно удаленным прямым плоскости чертежа. Пусть при данной окружности инволюции с центром Z в плоскости чертежа имеется еще окружность с центром O. Требуется построить совокупность точек, соответственных точкам этой окружности (рис. 4). Совокупностью точек, соответственных точкам окружности с центром O, является также окружность с центром O_0 [1].

Если через центр инволюции Z провести касательную к данной окружности, то она будет касательной и к соответственной окружности, т. е. точка Z будет центром прямого подобия окружностей.

Несмотря на отношение подобия самих окружностей, соответствие их точек не выражается в подобии. На прямой ZC точке C соответствует не точка C_1', а точка C' и точке C_1 соответствует не точка C', а точка C_1'. В этом смысле соответственные точки двух окружностей могут быть названы обратными.

Так как соответственные точки лежат на радиусах окружности инволюции и являются обратными, то преобразование одних точек в другие и может быть названо преобразованием обратными радиусами [1, стр. 24].

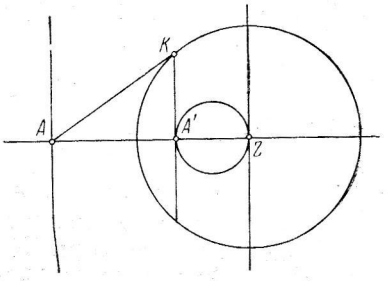


Рис. 5

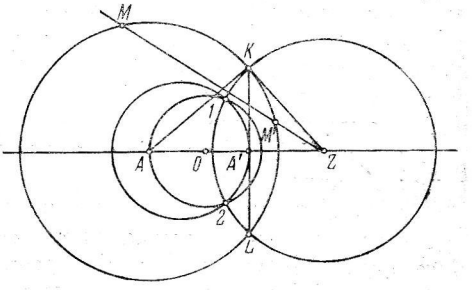


Рис. 6

Если окружность инволюции мнимая, то точкам A, B и C будут соответствовать точки A'', B'' и C'', которые получаются из точек A', B' и C' так же, как указано на рис. 3.

Совокупность точек A'', B'', C'' и других определит окружность, для которой точка Z — центр обратного подобия.

Если представить окружность бесконечно большого диаметра, то такая окружность может рассматриваться как прямая линия. В преобразовании обратными радиусами такой окружности, т. е. прямой линии, будет соответствовать окружность, проходящая через точку Z (рис. 5), так как эта точка соответствует бесконечно удаленной точке.

Для полного определения окружности, соответствующей прямой линии, надо известным путем определить на рис. 5 точку A', соответственную ближайшей точке A прямой.

Способ преобразования обратными радиусами позволяет в одной и той же плоскости преобразовать прямую линию в окружность и обратно.

Все точки окружности инволюции соответствуют сами себе, так как это двойные точки инволюции, поэтому преобразование окружности, пересекающей окружность инволюции, в соответственную окружность производится следующим образом (рис. 6). Пусть дана окружность с центром O, пересекающая данную окружность в точках *1* и *2*. Определив известным путем точку A', соответственную точке A, через три точки *1*, *2* и A' проводим окружность, которая и будет соответственной данной окружности.

Если центр некоторой окружности выбрать в точке A, а за радиус ее принять касательную AK к окружности инволюции (рис. 6), то точки такой окружности будут соответствовать точкам этой же окружности.

Действительно, для точек M и M' этой окружности, лежащих на прямой, проходящей через точку Z, будет справедливо равенство

$$ZM \cdot ZM' = (ZK)^2 *,$$

т. е. точки M и M' являются соответственными в инволюции точек на прямой ZM. Таким образом, окружность с центром A является сама по себе соответственной. Радиус ZK окружности инволюции будет при этом касательной к построенной окружности с центром A. Окружности с центрами Z и A взаимно-перпендикулярны, так как взаимно-перпендикулярны их радиусы, проходящие через точку K — пересечения окружностей.

Окружность, соответственная прямой, которая пересекает окружность инволюции в точках *1* и *2*, проходит через эти две точки и через точку Z, как показано на рис. 7. Окружность, соответственная прямой *3—4*, проходящей через точку Z, имеет бесконечно большой диаметр и изображается той же прямой *3—4*.

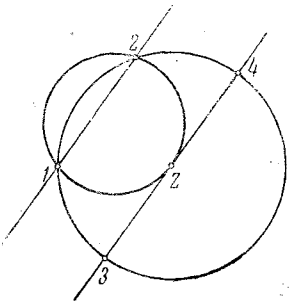


Рис. 7

Для краткости в дальнейшем будем называть элементы, полученные из других элементов путем преобразования обратными радиусами, реципрочными проекциями этих элементов. Так, например, на рис. 3 точка A' есть реципрочная проекция точки A; на рис. 4 окружность с центром O_0 есть реципрочная проекция окружности с центром O; на рис. 5 окружность, проходящая через точки Z и A', есть реципрочная проекция прямой, проходящей через точку A.

Реципрочные проекции могут быть применимы в тех случаях, когда необходимы преобразования одних элементов в другие в пределах одной плоскости чертежа, причем этими элементами могут являться точки, прямые и окружности. Для осуществления преобразования на чертеже должна быть задана точка Z — центр инволюции, поэтому такие проекции названы Е. С. Федоровым проекциями в системе с параметром точкой [2].

2. Решение некоторых задач в реципрочных проекциях

Задача 1. Через данные две точки A и B провести прямую.

На рис. 8 заданы точки A' и B' — реципрочные проекции точек A и B — и точка Z. Окружность, проходящая через точки A', B' и Z, является реципрочной проекцией искомой прямой.

Задача 2. Отрезок AB разделить пополам.

Для решения задачи рассмотрим на рис. 9 прямую AB и соответственную ей окружность с центром O_0 при данной окружности инволюции с центром Z. Точкам A, B, C и D прямой соответствуют точки A', B', C' и D' окружности. Точки A, B, C и бесконечно удаленная прямой AB образуют гармоническую четверку точек. Проектирующие их лучи ZA, ZB, ZC и $Z\infty$, параллельный AB, образуют гармоническую четверку лучей. На любой прямой, пересекающей эту четверку лучей, будет образована гармоническая четверка точек. Если эту четверку лучей пересечем прямой, параллельной AB (или что то же — прямой, параллельной $Z\infty$) и проходящей через точку A', то на этой прямой получим

* Так как для произвольной точки Z секущей, как известно из элементарной геометрии, имеет место равенство произведения отрезков $ZM \cdot ZM'$ квадрату отрезка касательной $(ZK)^2$.

два равных отрезка $A'C''$ и $C''B''$, так как точки A', B'', C'' и бесконечно удаленная прямая $A'B''$ образуют гармоническую четверку точек.

После изложенных соображений построение точки C' на реципрочной проекции $A'B'$ прямой AB (см. рис. 8) может быть выполнено следующим путем (рис. 10). Через точку Z проводим касательную $Z\infty$ к окружности, а через точку A' — прямую $A'B''$, параллельную этой касательной. Через точки Z и B' проводим прямую до пересечения с

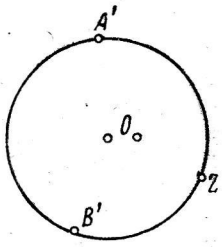


Рис. 8

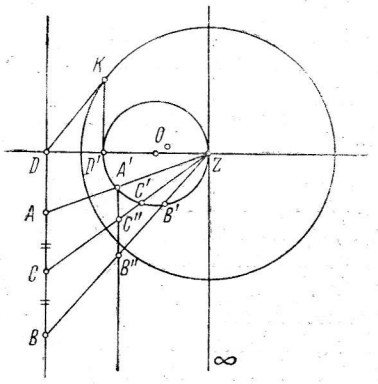


Рис. 9

прямой $A'B''$ в точке B''. Отрезок $A'B''$ точкой C'' делим пополам и проводим прямую ZC'' до пересечения с данной окружностью в искомой точке C', которая является реципрочной проекцией середины отрезка AB.

Задача 3. Построить центр окружности, если задана реципрочная проекция этой окружности и окружность инволюции.

Пусть на рис. 11 заданы: окружность инволюции с центром Z и некоторая окружность с центром O, для которой требуется построить реципрочную проекцию. Определяем диаметр $A'B'$ окружности проек-

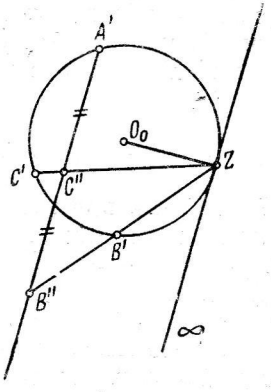


Рис. 10

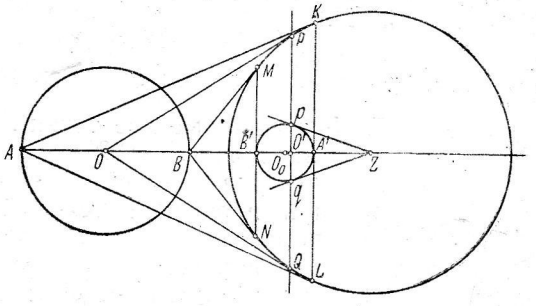


Рис. 11

ции путем построения поляр KL и MN точек A и B и строим эту окружность с центром в точке O_0. Реципрочная проекция центра O данной окружности определяется в точке O' так же на поляре PQ точки O относительно окружности инволюции, как и реципрочная проекция любой точки.

Докажем, что прямая PQ совпадает с прямой pq, которая является полярой Z относительно окружности проекции с центром O_0. На прямой ZO, как указано, имеет место инволюционное соответствие, в котором точкам A, B и O соответствуют точки A', B' и O'. Пара точек A и B точкой O и бесконечно удаленной точкой прямой ZO делится гармонически, следовательно, соответственная пара точек A' и B' должна

делиться гармонически точкой O', соответственной точке O, и точкой Z, которая соответствует бесконечно удаленной точке прямой ZO, так как инволюционное соответствие не нарушает гармонического отношения четырех точек. Поляра pq точки Z относительно окружности с центром O_0 вместе с полюсом Z делит гармонически пару точек A' и B', т. е. точка O' лежит на поляре pq точки Z относительно окружности проекции.

Таким образом, точка O' лежит и на прямой PQ, перпендикулярной к прямой ZO, и на прямой pq, также перпендикулярной к прямой ZO. Следовательно, прямые PQ и pq совпадают, что и требовалось доказать.

Приведенные построения позволяют решить поставленную задачу следующим путем. Если заданы окружность инволюции и реципрочная проекция некоторой окружности, то для построения центра этой окружности надо построить поляру pq точки Z относительно окружности проекции, принять эту поляру за поляру PQ относительно окружности инволюции и построить ее полюс. Этот полюс и будет искомым центром окружности.

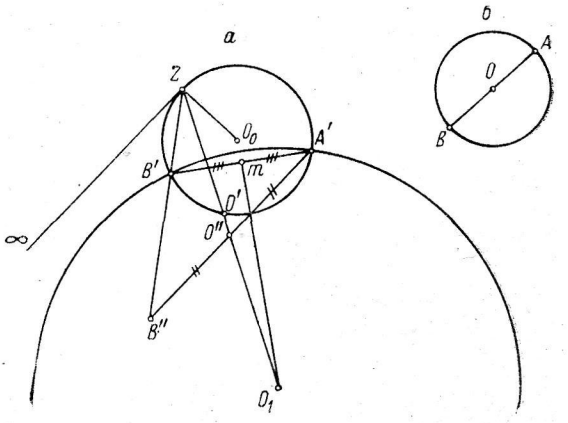


Рис. 12

Задача 4. Через данную точку провести окружность, если известно положение центра этой окружности.

На рис. 12, *а* заданы: точка Z, точка A' — реципрочная проекция некоторой точки A — и точка O' — реципрочная проекция центра O некоторой окружности, которую надлежит провести через точку A. Реципрочной проекцией окружности является также окружность, которая должна проходить через точку A' и центр которой расположен на прямой ZO' (см. рис. 11). Для построения центра окружности проекции надо найти еще хотя бы одну точку, например B', через которую проходит эта окружность.

На рис. 12, *б* условно показана окружность, центр которой O делит диаметр AB пополам.

Проведем через точки A' и O' реципрочную проекцию прямой AO (рис. 12, *а*) — окружность с центром O_0 — и на этой проекции от точки O' отложим отрезок $O'B'$, равный отрезку $O'A'$ (как $OB = OA$ на рис. 12, *б*). Точка B' и будет являться второй точкой, через которую должна проходить искомая проекция окружности.

Построение точки B' на рис. 12, *а* выполнено на основе закономерностей, показанных на рис. 9 и 10; через точку Z проведена касательная $Z\infty$ к окружности — проекции прямой AB, а через точку A' параллельная ей прямая $A'B''$; отмечена точка O'' пересечения этой прямой с прямой ZO' и от точки O'' отложен отрезок $O''B'' = O''A'$. Пересечение прямой ZB'' с окружностью, центр которой O_0, определяет точку B'.

Соединив точки A' и B' прямой, отметив точку m, середину отрезка $A'B'$, и проведя в точке m перпендикуляр к прямой $A'B'$ до пересечения с прямой ZO', определим центр O_1 искомой реципрочной проекции окружности, которая проведена через точки A' и B'.

Задача 5. Через данную точку A провести прямую, пересекающую данную прямую BC под углом α.

На рис. 13 даны: реципрочная проекция некоторой прямой BC — окружность с центром O_0, проходящая через точки Z, B' и C', и реципрочная проекция A' точки A.

Пусть на рис. 14 заданы: окружность инволюции с центром Z, прямая BC и ее реципрочная проекция — окружность с центром O_0, проходящая через точки Z и A', соответственную ближайшей точке A прямой. Если через точки A' и Z провести еще одну окружность с центром O_1, то эта окружность будет представлять собой реципрочную проекцию некоторой прямой DE, которая пересекает прямую BC в точке A и перпендикулярна прямой ZO_1, подобно тому, как прямая

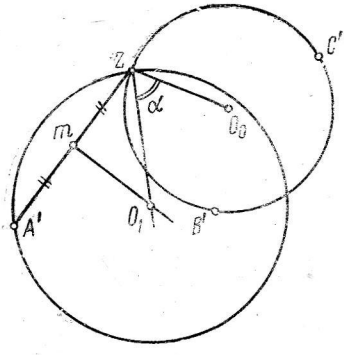


Рис. 13

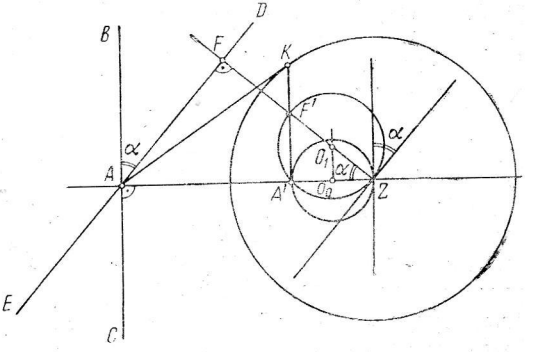


Рис. 14

BC перпендикулярна прямой ZO_0. Точка F' — соответственная ближайшей точке F прямой DE.

Если в плоскости чертежа через точку A провести пучок прямых, то реципрочной проекцией этого пучка будет пучок окружностей, проходящих через точки Z и A', при этом реципрочной проекцией прямой AZ будет прямая $A'Z$ как окружность бесконечно большого радиуса.

Угол α, образованный прямыми BC и DE, пересекающимися в точке A, равен углу, под которым пересекаются реципрочные проекции этих прямых, в чем легко убедиться, проведя в точке Z касательные к окружности с центрами O_0 и O_1. Так как касательная перпендикулярна радиусу, то, следовательно, и угол O_0ZO_1 также равен углу α.

Таким образом, если прямые пересекаются под некоторым углом, то их реципрочные проекции также пересекаются под тем же углом, который может быть определен как угол, образованный радиусами окружностей, проведенными через точку Z.

После установления взаимного положения реципрочных проекций пересекающихся прямых задача, условие которой представлено на рис. 13, решается следующими построениями. Проводим радиус окружности проекции O_0Z и под углом α к нему через точку Z прямую, на которой должен лежать центр окружности проекции, пересекающей данную окружность под углом α. Положение центра O_1 этой окружности проекции определяем, разделив отрезок $A'Z$ пополам и восставив в середине его — точке m — перпендикуляр до пересечения в точке O_1 с ранее проведенной прямой через точку Z.

Задача имеет два решения, так как прямую ZO_1 можно было бы построить под углом α к прямой ZO_0, но по другую сторону.

Задача 6. Через данную точку A провести прямую, параллельную данной прямой BC.

На рис. 15 заданы точка A и прямая BC своими реципрочными проекциями.

Прежде чем решать поставленную задачу, рассмотрим построения рис. 16. Пусть заданы: окружность инволюции с центром Z, прямая BC и ее реципрочная проекция — окружность с центром O_0, проходящая через точки Z и A', которая соответствует ближайшей точке A прямой.

Если через точку Z провести окружность с центром O_1, которая будет касаться в точке Z окружности с центром O_0, то построенная окружность будет являться реципрочной проекцией прямой, составляющей с данной прямой BC угол, равный нулю, так как в рассматриваемом случае нулю равен угол O_0ZO_1 (сравнить с рис. 14). Иначе, построенная на рис. 16 окружность с центром O_1 есть реципрочная

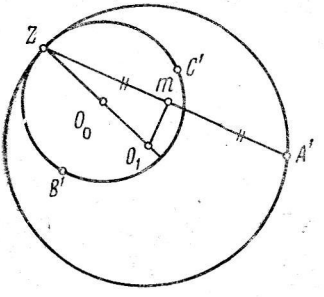


Рис. 15

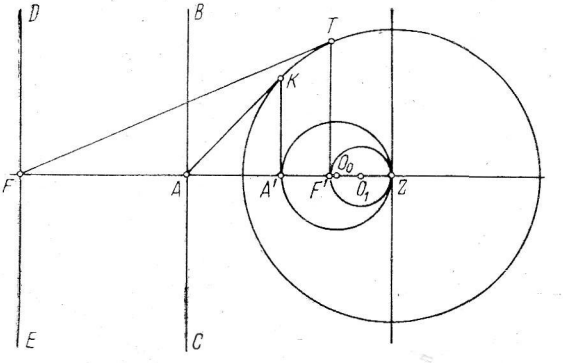


Рис. 16

проекция прямой, параллельной данной прямой BC — это прямая DE и на ней показана точка F, соответственная точке F' на окружности проекции.

Таким образом, относительно параллельных прямых в реципрочных проекциях может быть сформулировано следующее положение: реципрочные проекции параллельных прямых касательны одна к другой в точке Z.

После установления взаимного положения реципрочных проекций параллельных прямых решение задачи, условие которой представлено на рис. 15, выполняется проведением через точки A' и Z окружности с центром в точке O_1.

Задача 7. Через точку C провести отрезок CK, равный данному отрезку AB и составляющий с ним угол α.

На рис. 17, *а* заданы: точка C и отрезок AB своими реципрочными проекциями C' и $A'B'$. Для решения поставленной задачи необходимо выполнить построения, показанные на рис. 17, *б*: точки A и C соединить прямой; через точку C провести прямую, параллельную отрезку AB, а через точку B — прямую, параллельную AC, и определить точку D пересечения этих прямых; радиусом CD с центром в точке C провести окружность, а через точку C провести прямую, составляющую с прямой CD угол α. Взаимное пересечение проведенных окружности и прямой определит точку K или K_1, а следовательно, и искомый отрезок CK или CK_1, так как задача для данного направления прямой CK имеет два решения [1].

[1] Вообще задача имеет четыре решения, так как угол α можно откладывать по разные стороны прямой CD.

На рис. 17, *а* в реципрочных проекциях все перечисленные построения последовательно выполняем следующим образом: через точки A', C' и Z проводим окружность с центром O_1; проводим через точку C' окружность с центром O_2, лежащим на прямой ZO_0, а через точку B' окружность с центром O_3, расположенным на прямой ZO_1 (см. задачу 6, рис. 15), и определяем точку D' в пересечении этих окружностей; соединяем точки C' и Z прямой, в точке Z проводим касательную $Z\infty$ к окружности с центром O_2, а через точку D', параллельную этой касательной, — прямую, которая пересекает прямую ZC' в точке O''.

На этой прямой откладываем отрезок $O''E''=D'O''$, через точки Z и E'' проводим прямую до пересечения в точке E' с окружностью,

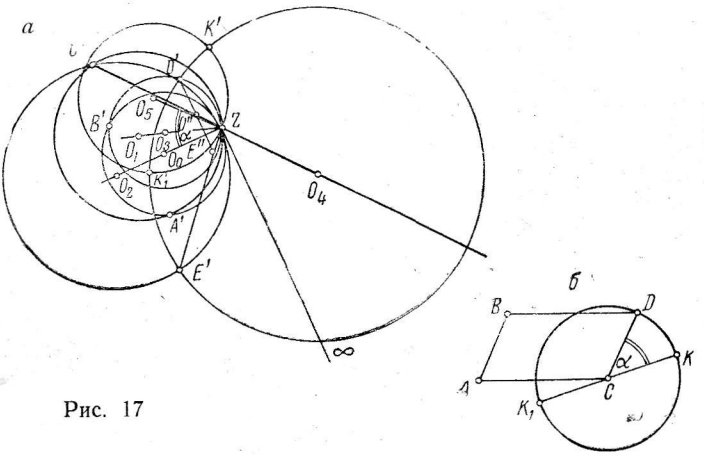


Рис. 17

центр которой O_2, и через точки D' и E' проводим окружность с центром O_4 на прямой $C'Z$. Эта окружность и является реципрочной проекцией окружности с центром в точке C. Приведенные построения были ранее детально обоснованы на рис. 12.

Прямую, проходящую через точку C под углом α к прямой CD, строим так же, как в задаче 5 (рис. 13). Эта прямая представлена окружностью с центром O_5. Пересечение этой окружности с окружностью, центр которой в точке O_4, определяем точки K' и K_1', а следовательно, и отрезки $C'K'$ и $C'K_1'$, которые являются реципрочными проекциями искомых отрезков.

Приведенные примеры позволяют в достаточной степени ознакомиться с построениями, которые необходимы для решения задач в реципрочных проекциях. Практический интерес представляет рассмотрение задач, решение которых связано с преобразованием заданных элементов в их реципрочные проекции и обратно (см. ниже задачи 8 и 9).

Задача 8. Даны прямые AB и CD, точка пересечения которых находится вне пределов чертежа. Через эту точку и данную точку E провести прямую (рис. 18).

Проводим окружность инволюции с центром Z, пересекающую данные прямые в точках *1*, *2*, *3* и *4*, и преобразовываем эти прямые в их реципрочные проекции, т. е. в окружности с центром O_1 и O_2. Точка F' пересечения построенных окружностей есть реципрочная проекция точки пересечения данных прямых. Определяем известным путем реципрочную проекцию E' данной точки E и через точки E', Z и F' проводим окружность с центром O_0, которая является реципрочной искомой прямой.

Построенную окружность преобразовываем в искомую прямую, которая проходит через точки *5* и *6* пересечения этой окружности с окружностью инволюции.

Задача 9. Даны прямые *AB* и *CD*, точка пересечения которых находится вне пределов чертежа. Через эту точку и две данные точки *E* и *K* провести окружность (рис. 19).

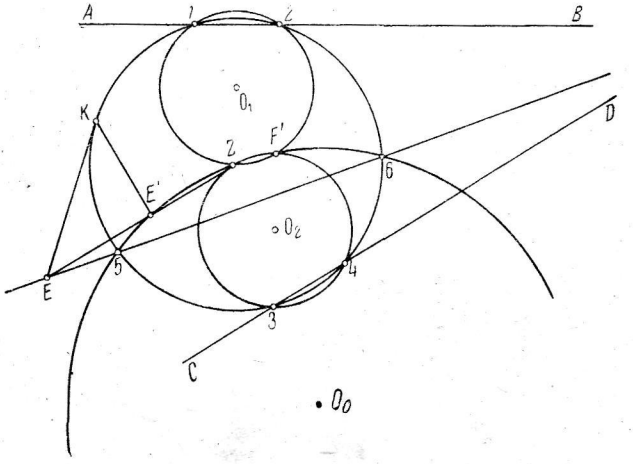


Рис. 18

Как и в предыдущей задаче, проводим окружность инволюции с центром *Z* и определяем реципрочные проекции данных прямых *AB* и *CD* — окружности с центрами O_1 и O_2, точка пересечения *F'* которых есть реципрочная проекция находящейся за пределами чертежа точки пересечения данных прямых.

Определим известным путем реципрочные проекции *E'* и *K'* точек *E* и *K* и через точки *F'*, *E'* и *K'* проведем окружность с центром O_0, которая является реципрочной проекцией искомой окружности и пересекает окружность инволюции в точках *5* и *6*. Окружность с центром O_0 преобразовываем в искомую, для чего определяем поляру *pq* точки *Z* относительно этой окружности[1] (точка *T* — точка пересечения перпендикуляра, проведенного в точке *Z* к прямой O_0Z, с окружностью, центр которой O_0), а затем полюс *O* прямой *PQ*, которая совпадает с прямой *pq* (см. рис. 11) относительно окружности инволюции.

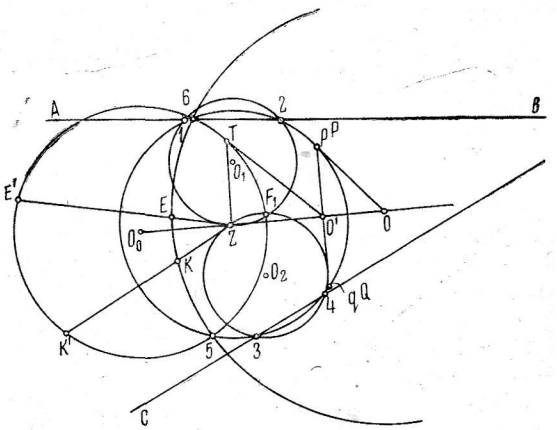


Рис. 19

Точка *O* является центром искомой окружности, которая проходит через точки *E*, *K*, *5*, *6* и находящуюся за пределами чертежа точку пересечения прямых *AB* и *CD*.

[1] На рис. 3 показано построение поляры точки *B*, лежащей внутри окружности.

Решение задач 8 и 9 показывает, что реципрочные проекции могут быть успешно использованы и в тех случаях, когда элементы построения выходят за пределы чертежа. Эта особенность реципрочных проекций имеет существенный интерес для инженерной графики [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Е. С. Новая геометрия как основа черчения. СПб., 1907.
2. Федоров Е. С. Новая начертательная геометрия. Изв. Академии наук, серия VI, 1917.
3. Четверухин Н. Ф. Введение в высшую геометрию. Учпедгиз, 1935.
4. Четверухин Н. Ф. Проективная геометрия. Учпедгиз, 1953.