Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXIX, вып. 3, 1961 г.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ТЕОРИИ ДРОБИЛОК[1]

Ю. И. Северов

В настоящей работе рассматривается движение системы, состоящей из трех твердых тел, вращающихся вокруг неподвижной точки и имеющих общую геометрическую ось собственных вращений. Выбранная система дает принципиальную обобщенную схему рабочей части дробилки института Механобр, которая осуществлена в различных вариантах.

Дифференциальные уравнения движения одного твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, выведены еще Л. Эйлером, а вопросы, связанные с движением подобного тела, изучались многими исследователями. Однако полного исследования движения твердого тела вокруг неподвижной точки в общем случае до настоящего времени не произведено. При исследовании движения системы тел трудности возрастают, и при постановке задачи приходится вводить ряд ограничений.

В статье рассматривается такое движение системы, когда одно из тел катится без скольжения по неподвижной конической опоре. После упрощающих предположений получены два первых приближения при отыскании решения дифференциальных уравнений движения рассматриваемой системы тел в предельном случае.

При несколько иной постановке задачи первое приближение получено И. И. Блехманом и А. К. Рундквистом [2].

Постановка задачи и выбор обобщенных координат. Рассмотрим систему трех тел, состоящую из весомого вала со сферическим шарниром в точке O (рис. 1, тело I) и свободно насаженных на него независимо друг от друга тела с дебалансным грузом (тело II) и конуса (тело III). Указанные тела могут вращаться вокруг неподвижной точки O. Система движется под действием сил тяжестей тел и вращающего момента, создаваемого электродвигателем. Вал и конус считаются динамически симметричными телами вращения. Тело II динамически несимметрично, но имеет две взаимно-перпендикулярные плоскости материальной симметрии, одна из которых проходит через ось вращения тел.

Исследуем при некоторых ограничениях движение системы, когда подвижный конус (см. рис. 1, тело III) катится без скольжения по неподвижной опоре — неподвижному конусу (рис. 2).

[1] Первая часть работы опубликована в 1958 г. [1].

Проведем, исходя из точки O, четыре системы осей декартовых координат: неподвижную ξ, η, ζ с горизонтальной плоскостью $\xi\eta$ и осью ζ, направленной вертикально вверх, и подвижные x_1y_1z, x_2y_2z, x_3y_3z (рис. 3), в которых ось z направлена вдоль оси собственных вращений тел *I*, *II*, *III*. Оси x_iy_iz соответственно связаны с i-тым телом ($i = 1, 2, 3$), причем ось y_2 лежит в одной из плоскостей симметрии тела *II*.

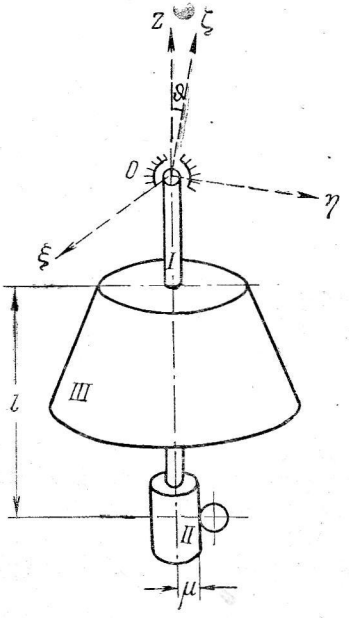


Рис. 1

Отметим линию пересечения плоскостей $\xi\eta$ и x_iy_i и проведем так называемую ось узлов ON вдоль этой линии из точки O так, чтобы $O\zeta$, Oz, ON представляли правую систему, как это имеет место для всех остальных введенных систем координатных осей. Для определения положения системы тел в пространстве достаточны следующие параметры: угол φ, заключенный между осями ON и Ox_1 и характеризующий вращение тела *I* вокруг собственной оси Oz; угол ψ, заключенный между осями $O\xi$ и ON и характеризующий вращение системы вокруг оси $O\zeta$; угол ϑ, заключенный между осями $O\zeta$ и Oz и характеризующий вращение системы тел вокруг оси ON; угол β, заключенный между осями ON и Ox_2 и характеризующий вращение тела *II* вокруг оси Oz, и угол γ, заключенный между осями ON и Ox_3 и характеризующий вращение тела *III* вокруг оси Oz. Однако в силу ограничения, накладываемого на параметры связями, угол γ, как показано ранее [1], явно выражается через угол ψ. Кроме того, угол ϑ, согласно постановке задачи, следует считать постоянным. В качестве обобщенных координат выступают независимые параметры — углы φ, ψ и β.

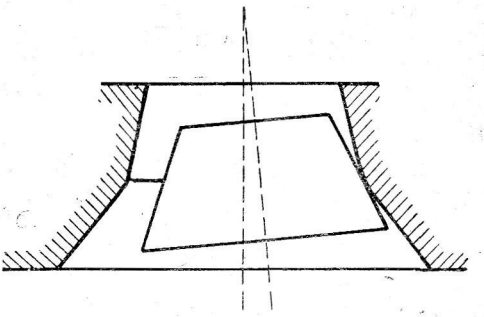


Рис. 2

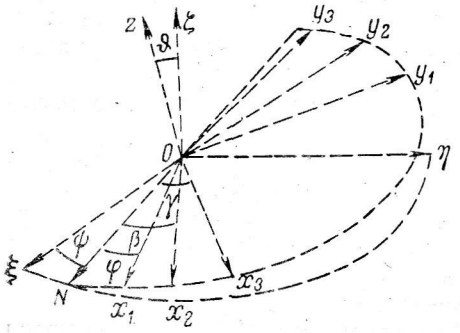


Рис. 3

Уравнения движения системы и путь их интегрирования. Из трех возможных вариантов динамической несимметричности тела *II* выберем общий, когда существует неравенство экваториальных моментов инерции и центр тяжести тела *II* не лежит на оси собственного вращения тел.

При составлении дифференциальных уравнений движения системы следует иметь в виду, что рассматриваемая система получает извне приток электрической энергии, питающей электродвигатель и зависящей от состояния внешней сети, а также от движения системы. Это обстоятельство чрезвычайно затрудняет решение вопроса. Поэтому предположим, что угловая скорость вращения мотора постоянна. Такое предположение достаточно хорошо оправдывается для некоторых типов электродвигателей. Пренебрегая еще весьма малыми моментами сопротивления изменению углов φ и ψ, т. е. моментами M_1 и M_2, для холостого хода машины с идеальной футеровкой получим уравнения движения системы, приведенные в [1].

Уравнения связей имеют вид

$$\vartheta = \text{const}; \quad \dot{\gamma} = -\frac{l_1}{l_2}\dot{\psi}, \tag{1}$$

где l_1 и l_2 — расстояния точки касания подвижного и неподвижного конусов соответственно от осей $O\zeta$ и Oz.

Наши соображения о постоянстве угловой скорости вращения мотора имеют в виду постоянство угловой скорости ротора по отношению к статору и поэтому существенно зависят от расположения мотора. Ротор и статор мотора могут быть связаны с различными телами движущейся системы. В рассматриваемой схеме дробилки статор связан с телом *I*, а ротор — с телом *II*. Упомянутая относительная угловая скорость вращения мотора

$$\omega = \dot{\beta} - \dot{\varphi} = \text{const}, \tag{2}$$

где $\dot{\beta}$ и $\dot{\varphi}$ — угловые скорости собственного вращения соответственно тела *II* и тела *I*.

В дальнейшем будем рассматривать установившийся режим.

Уравнения движения системы при холостом ходе дробилки [1] могут быть представлены в несколько измененной форме:

$$C_1\ddot{\varphi} + C_1\cos\vartheta\ddot{\psi} = -M;$$

$$C_1\cos\vartheta\ddot{\varphi} + \Big[(A_1 + A_3)\sin^2\vartheta + (C_1 + C_2)\cos^2\vartheta + C_3\Big(\cos\vartheta - \frac{l_1}{l_2}\Big)^2 +$$

$$+ A_2\sin^2\vartheta\sin^2\beta + B_2\sin^2\vartheta\cos^2\beta - 2G\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\beta\Big]\ddot{\psi} +$$

$$+ 2\left[(A_2 - B_2)\sin^2\vartheta\sin\beta\cos\beta + G\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\beta\right]\dot{\psi}\dot{\beta} +$$

$$+ (G_2\cos\vartheta - G\sin\vartheta\cos\beta)\ddot{\beta} + G\sin\vartheta\sin\beta\dot{\beta}^2 = 0;$$

$$(C_2\cos\vartheta - G\sin\vartheta\cos\beta)\ddot{\psi} + C_2\ddot{\beta} - \left[(A_2 - B_2)\sin\vartheta\cos\beta +\right.$$

$$\left. + G\cos\vartheta\right]\sin\vartheta\sin\beta\dot{\psi}^2 = M - \mu P_2\sin\vartheta\sin\beta, \tag{3}$$

где $A_1 = B_1$; C_1; $A_3 = B_3$; C_3 — моменты инерции тел *I* и *III* относительно главных осей, проведенных через неподвижную точку;

A_2, B_2, C_2 — моменты инерции тела *II* относительно осей Ox_2, Oy_2, Oz;

G — центробежный момент тела *II* относительно осей Oy_2 и Oz;

μ — расстояние центра тяжести тела *II* от общей оси собственных вращений тел;

M — вращающий момент двигателя;

P_2 — вес второго тела.

Если учесть условие (2), то система уравнений (3) принимает форму

$$C_1\ddot{\beta} + C_1\cos\vartheta\ddot{\psi} = -M;$$

$$\left[(A_1 + A_3)\sin^2\vartheta + (C_1 + C_2)\cos^2\vartheta + C_3\left(\cos\vartheta - \frac{l_1}{l_2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + A_2\sin^2\vartheta\sin^2\beta + B_2\sin^2\vartheta\cos^2\beta - 2G\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\beta\right]\ddot{\psi} +$$

$$+ 2\left[(A_2 - B_2)\sin^2\vartheta\sin\beta\cos\beta + G\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\beta\right]\dot{\psi}\dot{\beta} + \qquad (4)$$

$$+ \left[(C_1 + C_2)\cos\vartheta - G\sin\vartheta\cos\beta\right]\ddot{\beta} + G\sin\vartheta\sin\beta\dot{\beta}^2 = 0;$$

$$(C_2\cos\vartheta - G\sin\vartheta\cos\beta)\ddot{\psi} + C_2\ddot{\beta} - \left[(A_2 - B_2)\sin\vartheta\cos\beta + \right.$$

$$\left. + G\cos\vartheta\right]\sin\vartheta\sin\beta\dot{\psi}^2 = M - \mu P_2\sin\vartheta\sin\beta.$$

Можно показать, что угловая скорость прецессионного движения для холостого хода дробилки существенно зависит от начальных условий рассматриваемого движения, а именно от характера пускового периода.

Ввиду сложности полученных уравнений движения рассмотрим предельный случай, когда обращается в нуль угол ϑ при сохранении в системе постоянного расстояния l_1 точки касания конусов от неподвижной оси прецессионного движения ($\vartheta \to 0$ при $l_1 = \text{const}$) *.

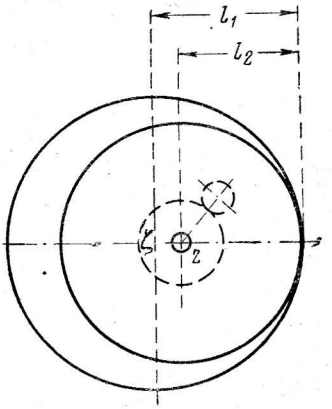


Рис. 4

Тогда уравнения холостого хода, как это можно показать непосредственно или получить путем указанного перехода к пределу в уравнениях (4), будут иметь вид

$$C_1\ddot{\beta} + C_1\ddot{\psi} = -M;$$

$$[a + 2m_2\mu\nu\cos\beta]\ddot{\psi} - 2m_2\mu\nu\sin\beta\dot{\psi}\dot{\beta} +$$

$$+ (C_1 + C_2 + m_2\mu\nu\cos\beta)\ddot{\beta} - m_2\mu\nu\sin\beta\dot{\beta}^2 = 0; \qquad (5)$$

$$(C_2 + m_2\mu\nu\cos\beta)\ddot{\psi} +$$

$$+ m_2\mu\nu\sin\beta\dot{\psi}^2 + C_2\ddot{\beta} = M,$$

где

$$a = m\nu^2 + C_1 + C_2 + \frac{\nu^2}{l_2^2}C_3 = \text{const};$$

$$\nu = l_1 - l_2;$$

m — масса рассматриваемой системы;
m_2 — масса тела *II*.

Исключая из предыдущих уравнений M, получаем систему двух уравнений, в которых не известны углы ψ и β:

$$[(C_1 + C_2) + m_2\mu\nu\cos\beta]\ddot{\psi} + m_2\mu\nu\sin\beta\dot{\psi}^2 + (C_1 + C_2)\ddot{\beta} = 0;$$

$$(a + 2m_2\mu\nu\cos\beta)\ddot{\psi} - 2m_2\mu\nu\sin\beta\dot{\psi}\dot{\beta} + \left[(C_1 + C_2) + \right. \qquad (6)$$

$$\left. + m_2\mu\nu\cos\beta\right]\ddot{\beta} - m_2\mu\nu\sin\beta\dot{\beta}^2 = 0.$$

---

* При этом ось Oz собственных вращений тел *I*, *II*, *III* становится параллельной оси $O\zeta$ дробилки (рис. 4).

Решение системы (6) будем искать по методу Пикара, ограничиваясь несколькими первыми приближениями. При этом найдем углы ψ и β и угловые скорости $\dot{\psi}$ и $\dot{\beta}$ прецессионного движения системы и собственного вращения тела *II*. После этого определим движение тела *I*, используя условие (2)

$$\dot{\varphi} = \dot{\beta} - \omega; \quad \varphi = \beta - \omega t + \varphi^{(0)} - \beta^{(0)}, \tag{7}$$

где

$$\varphi^{(0)} = \varphi|_{t=0};$$

$$\beta^{(0)} = \beta|_{t=0}.$$

Построение решения системы дифференциальных уравнений (6) по методу Пикара. Считая массу тел *I* и *III* и момент инерции C_3 достаточно большими, чтобы не обращался в нуль определитель,

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_1 + C_2 + m_2\mu\nu\cos\beta; & C_1 + C_2 \\ a + 2m_2\mu\nu\cos\beta; & C_1 + C_2 + m_2\mu\nu\cos\beta \end{vmatrix} =$$

$$= \nu\left[-\nu(C_1 + C_2)\left(m + \frac{1}{l_2^2}C_3\right) + 2(C_1 + C_2)m_2\mu\cos\beta + \right.$$

$$\left. + m_2^2\mu^2\nu\cos^2\beta\right], \tag{8}$$

напишем вместо системы дифференциальных уравнений (6) соответствующую ей нормальную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \dot{\psi}; \\ \frac{d\dot{\psi}}{dt} &= f_1(\dot{\psi}, \beta, \dot{\beta}); \\ \frac{d\beta}{dt} &= \dot{\beta}; \\ \frac{d\dot{\beta}}{dt} &= f_2(\dot{\psi}, \beta, \dot{\beta}), \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$f_1 = -\frac{\nu}{\Delta}\left[(C_1 + C_2)(\dot{\psi} + \dot{\beta})^2 + m_2\mu\nu\cos\beta\dot{\psi}^2\right] m_2\mu\sin\beta;$$

$$f_2 = \frac{\nu}{\Delta}\left\{(C_1 + C_2)(\dot{\psi} + \dot{\beta})^2 + m_2\mu\nu\cos\beta\,(2\dot{\psi} + \dot{\beta})\dot{\beta} + \right.$$

$$\left. + \nu\dot{\psi}^2\left[\left(m + \frac{1}{l_2^2}C_3\right)\nu + 2m_2\mu\cos\beta\right]\right\} m_2\mu\sin\beta. \tag{10}$$

Система уравнений (9) эквивалентна системе (6). Решив систему уравнений (9), будем иметь и решение системы (6).

Решим задачу Коши со следующими начальными условиями:

$$t_0 = 0; \quad \psi = 0; \quad \beta = 0; \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}^{(0)}; \quad \dot{\beta} = \dot{\beta}^{(0)}.$$

Нулевое приближение решения системы дифференциальных уравнений (9) при этих начальных условиях можно представить в следующем виде:

$$\psi_0 = 0; \quad \beta_0 = 0; \quad \dot{\psi}_0 = \dot{\psi}^{(0)}; \quad \dot{\beta}_0 = \dot{\beta}^{(0)}. \tag{11}$$

Для первого приближения

$$\psi_1 = \psi_0 + \int_0^t \dot{\psi}_0 dt;$$

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_0 + \int_0^t f_1(\dot{\psi}_0,\ \beta_0,\ \dot{\beta}_0)\, dt; \tag{12}$$

$$\beta_1 = \beta_0 + \int_0^t \dot{\beta}_0 dt;$$

$$\dot{\beta}_1 = \dot{\beta}_0 + \int_0^t f_0(\dot{\psi}_0,\ \beta_0,\ \dot{\beta}_0)\, dt.$$

Отсюда получаем первое приближение решения системы (9):

$$\psi_1 = \dot{\psi}^{(0)} t;\quad \dot{\psi}_1 = \dot{\psi}^{(0)};\quad \beta_1 = \dot{\beta}^{(0)} t;\quad \dot{\beta}_1 = \dot{\beta}^{(0)}. \tag{13}$$

Второе приближение

$$\psi_2 = \psi_0 + \int_0^t \dot{\psi}_1 dt;$$

$$\dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_0 + \int_0^t f_1(\dot{\psi}_1,\ \beta_1,\ \dot{\beta}_1)\, dt; \tag{14}$$

$$\beta_2 = \beta_0 + \int_0^t \dot{\beta}_1 dt;$$

$$\dot{\beta}_2 = \dot{\beta}_0 + \int_0^t f_2(\dot{\psi}_1,\ \beta_1,\ \dot{\beta}_1)\, dt$$

или

$$\psi_2 = \psi_0 + \int_0^t \dot{\psi}_1 dt;$$

$$\dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_0 + \int_0^t \frac{[(C_1 + C_2)(\dot{\psi}^{(0)} + \dot{\beta}^{(0)})^2 + m_2 \mu \nu \cos \dot{\beta}^{(0)} t \dot{\psi}^{(0)2}]\, m_2 \mu dt}{(C_1 + C_2)\left(m + \frac{1}{l_2^2} C_3\right) - 2(C_1 + C_2) m_2 \mu \cos \dot{\beta}^{(0)} t - m_2^2 \mu^2 \nu \cos^2 \dot{\beta}^{(0)} t};$$

$$\beta_2 = \beta_0 + \int_0^t \dot{\beta}_1 dt;$$

$$\beta_2 = \dot{\beta}_0 + \int_0^t \Big[-\nu (C_1 + C_2)\left(m + \frac{1}{l_2^2} C_3\right) +$$

$$+ 2(C_1 + C_2) m_2 \mu \cos \dot{\beta}^{(0)} t + m_2^2 \mu^2 \nu \cos^2 \dot{\beta}^{(0)} t \Big]^{-1} \Big\{ (C_1 + C_2)(\dot{\psi}^{(0)} + \dot{\beta}^{(0)})^2 + \tag{15}$$

$$+ m_2 \mu \nu \cos \dot{\beta}^{(0)} t (2\dot{\psi}^{(0)} + \dot{\beta}^{(0)}) \dot{\beta}^{(0)} + \nu \dot{\psi}^{(0)2} \Big[\left(m + \frac{1}{l_2^2} C_3\right) \nu +$$

$$+ 2 m_2 \mu \cos \dot{\beta}^{(0)} t \Big] \Big\} m_2 \mu \sin \dot{\beta}^{(0)} t dt.$$

Произведя интегрирование, получим второе приближение системы (9):

$$\psi_2 = \dot{\psi}^{(0)} t;$$

$$\dot{\psi}_2 = \dot{\psi}^{(0)} + \frac{C'\dot{\beta}^{(0)}(2\dot{\psi}^{(0)} + \dot{\beta}^{(0)}) + b\dot{\psi}^{(0)2}}{2b\dot{\beta}^{(0)}} \ln \frac{m_2\mu\nu\cos\dot{\beta}^{(0)}t + C' - b}{m_2\mu\nu + C' - b} +$$

$$+ \frac{C'\dot{\beta}^{(0)}(2\dot{\psi}^{(0)} + \dot{\beta}^{(0)}) - b\dot{\psi}^{(0)2}}{2b\dot{\beta}^{(0)}} \ln \frac{m_2\mu\nu + C' + b}{m_2\mu\nu\cos\dot{\beta}^{(0)}t + C' + b};$$

$$\beta_2 = \dot{\beta}^{(0)} t; \qquad (16)$$

$$\dot{\beta}_2 = \dot{\beta}^{(0)} + \frac{C'(1 + m'\nu^2)\dot{\psi}^{(0)2} - b[(2\dot{\psi}^{(0)} + \dot{\beta}^{(0)})\dot{\beta}^{(0)} + 2\dot{\psi}^{(0)2}}{2b\dot{\beta}^{(0)}} \times$$

$$\times \ln \frac{m_2\mu\nu\cos\dot{\beta}^{(0)}t + C' - b}{m_2\mu\nu + C' - b} + \frac{C'(1 + m'\nu^2)\dot{\psi}^{(0)2} + b[(2\dot{\psi}^{(0)} + \dot{\beta}^{(0)})\dot{\beta}^{(0)} + 2\dot{\psi}^{(0)2}]}{2b\dot{\beta}^{(0)}} \times$$

$$\times \ln \frac{m_2\mu\nu + C' + b}{m_2\mu\nu\cos\dot{\beta}^{(0)}t + C' + b},$$

где

$$C' = C_1 + C_2; \quad m' = m + \frac{1}{l_2^2} C_3; \quad b = \sqrt{C'm'\nu^2 + C'^2}.$$

Третье приближение

$$\psi_3 = \psi_0 + \int_0^t \dot{\psi}_2 dt;$$

$$\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}_0 + \int_0^t f_1(\dot{\psi}_2, \beta_2, \dot{\beta}_2)\, dt; \qquad (17)$$

$$\beta_3 = \beta_0 + \int_0^t \dot{\beta}_2 dt;$$

$$\dot{\beta}_3 = \dot{\beta}_0 + \int_0^t f_2(\dot{\psi}_2, \beta_2, \dot{\beta}_2)\, dt.$$

Как видно из уравнений (16) и (17), прецессионное движение начнется даже в случае его отсутствия в начальный момент.

Полученные приближения дают основание ожидать, что система уравнений (16) для угловых скоростей прецессии и собственного вращения тела *II* имеет периодическое решение с периодом

$$\tau = \frac{2\pi}{\dot{\beta}^{(0)}}. \qquad (18)$$

Уравнения движения системы тел при рабочем ходе дробилки. Составляя уравнения движения системы тел при рабочем ходе дробилки, надо учесть полезное сопротивление. Так, пренебрегая вредными сопротивлениями и допуская по-прежнему постоянной угловую скорость мотора, для предельного случая ($\vartheta \to 0$ при $l_1 = \text{const}$) получим уравнения движения системы тел при рабочем ходе дробилки:

$$C_1\ddot{\beta} + C_1\ddot{\psi} = -M;$$

$$[a + 2m_{2\mu\nu}\cos\beta]\,\ddot{\psi} - 2m_{2\mu\nu}\sin\beta\dot{\psi}\dot{\beta} +$$

$$+ (C_1 + C_2 + m_{2\mu\nu}\cos\beta)\,\ddot{\beta} - m_{2\mu\nu}\sin\beta\dot{\beta}^2 = -M_c\frac{l_1 - l_2}{l_2}; \qquad (19)$$

$$(C_2 + m_{2\mu\nu}\cos\beta)\,\ddot{\psi} + m_{2\mu\nu}\sin\beta\dot{\psi}^2 + C_2\ddot{\beta} = M,$$

где M_c — момент полезного сопротивления движению конуса.

Следует заметить, что уравнения рабочего хода можно применить и для холостого хода, когда футеровка не считается идеальной. В правых частях уравнений при этом вместо момента полезного сопротивления будет участвовать момент качения.

Таким образом, получены дифференциальные уравнения движения системы для предельного случая: $\vartheta = 0$. Однако в действительности угол ϑ не равен нулю, хотя и весьма мал (1—2°). Поэтому интеграл дифференциальных уравнений движения системы (4) для холостого режима дробилки, а также аналогичных уравнений для рабочего режима целесообразно искать в форме рядов, расположенных по целым положительным степеням параметра ϑ. Рассмотренный выше случай, когда $\vartheta = 0$, соответствует так называемому нулевому приближению.

Случай движения с учетом сопротивления при несколько иной постановке задачи разобран И. И. Блехманом и А. К. Рундквистом [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Северов Ю. И. О некоторых вопросах динамики твердого тела и их приложение к теории дробилок. Записки ЛГИ, т. XXXVI, вып. 3, 1958.
2. Рундквист А. К. Механика инерционной дробилки Механобра. Сб. «Механика и расчет машин вибрационного типа». Изд-во АН СССР, 1957.
3. Крылов А. Н. и Крутков Ю. А. Общая теория гироскопов и некоторых технических их приложений. Изд-во АН СССР, 1932.
4. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГИТТЛ, 1955.