Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXIX, вып. 3, 1961 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПРИ МНОГОСЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ

П. А. Журавлев

Представим несколько движущихся неизменяемых сред S_1, S_2, ..., S_n и материальную точку M, перемещающуюся относительно этих сред (рис. 1). Будем считать заданными движение точки M относительно среды S_1, среды S_1 относительно среды S_2, ..., среды S_{n-1} относительно среды S_n. Требуется определить движение точки M относительно среды S_n $(n \geqslant 3)$.

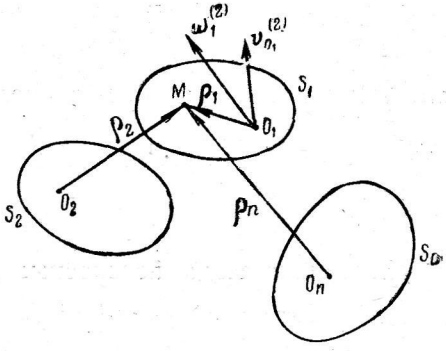


Рис. 1

Так ставит задачу Г. К. Суслов и дает формулу для определения скорости точки при любых движениях сред и ускорения только при поступательных переносных движениях [1]. Формулу для ускорения точки при любых движениях сред получил К. И. Антимонов [2] путем дифференцирования выражения для скорости. Вывод его оказался довольно громоздким. Затем к аналогичному результату пришел Р. П. Войня [4]*, применив известную теорему Кориолиса и тем упростив вывод. Нумерация движущихся сред, принятая Р. П. Войней, обратна нумерации Г. К. Суслова, К. И. Антимонова и принятой нами.

В настоящей работе на основе теоремы Кориолиса выводится иная формула для искомого ускорения. Эта формула учитывает движение последней среды S_n относительно следующей S_{n+1}, принимаемой теперь за условно неподвижную, только путем добавления двух новых членов без изменения всех ранее вычисленных слагаемых. Окончательные результаты, полученные по ранее выведенным формулам [2, 4] и предлагаемой в настоящей работе, после некоторых преобразований вполне согласуются друг с другом.

Обозначим: $\boldsymbol{v}^{(k)}$ и $\boldsymbol{w}^{(k)}$ — скорость и ускорение точки M относительно среды S_k; $\boldsymbol{v}_l^{(k)}$ и $\boldsymbol{w}_l^{(k)}$ — переносные скорость и ускорение точки

* Заметим, что автору работы [4] и референту этой работы (РЖМ № 6, 1959, 5970) осталась неизвестной работа [2], хотя название ее, правда, без изложения содержания, имеется в РЖМ № 9, 1956, 5782.

M вместе со средой S_i относительно среды S_k; $\omega_i^{(k)}$ и $\varepsilon_i^{(k)}$ — угловые скорость и ускорение вращения среды S_i относительно среды S_k; ρ_k — полярный радиус-вектор точки M, проведенный из произвольно выбранного, но зафиксированного полюса среды S_k; $v_{O_i}^{(k)}$ и $w_{O_i}^{(k)}$ — скорость и ускорение полюса среды S_i относительно среды S_k.

Применив теорему о сложении скоростей, получим формулу для скорости точки M относительно среды S_n [1]

$$v^{(n)} = v^{(1)} + v_1^{(2)} + v_2^{(3)} + \ldots + v_{n-1}^{(n)}$$

или, так как $v_i^{(i+1)} = v_{O_i}^{(i+1)} + \omega_i^{(i+1)} \times \rho_i$,

$$v^{(n)} = v^{(1)} + \underbrace{v_{O_1}^{(2)} + \omega_1^{(2)} \times \rho_1} + \ldots + \underbrace{v_{O_{n-1}}^{(n)} + \omega_{n-1}^{(n)} \times \rho_{n-1}}. \qquad (1)$$

Для определения ускорения материальной точки M относительно среды S_n воспользуемся известной теоремой Кориолиса для определения ускорения материальной точки, участвующей в двух движениях. Последовательное применение этой теоремы дает

$$w^{(2)} = w^{(1)} + w_1^{(2)} + 2\omega_1^{(2)} \times v^{(1)};$$
$$w^{(3)} = w^{(2)} + w_2^{(3)} + 2\omega_2^{(3)} \times v^{(2)};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$w^{(n)} = w^{(n-1)} + w_{n-1}^{(n)} + 2\omega_{n-1}^{(n)} \times v^{(n-1)}.$$

Если подставить $w^{(2)}$ в $w^{(3)}$, $w^{(3)}$ в $w^{(4)}$ и т. д., то получится формула для ускорения движения материальной точки M в среде S_n

$$w^{(n)} = w^{(1)} + \underbrace{w_1^{(2)} + \omega_1^{(2)} \times v^{(1)}} + \underbrace{w_2^{(3)} + 2\omega_2^{(3)} \times v^{(2)}} + \ldots +$$
$$+ \underbrace{w_{n-1}^{(n)} + 2\omega_{n-1}^{(n)} \times v^{(n-1)}}. \qquad (2)$$

Входящие сюда переносные ускорения

$$w_k^{(k+1)} = w_{O_k}^{(k+1)} + \varepsilon_k^{(k+1)} \times \rho_k + \omega_k^{(k+1)} \times (\omega_k^{(k+1)} \times \rho_k),$$

а относительные скорости определяются при помощи зависимостей (1).

Если обозначить $2\omega_i^{i+1} \times v^{(i)} = w_{ci}^{(i+1)}$, то формула (2) примет вид

$$w^{(n)} = \underbrace{w^{(1)} + w_1^{(2)} + w_{c1}^{(2)}} + \underbrace{w_2^{(3)} + w_{c2}^{(3)}} + \ldots + \underbrace{w_{n-1}^{(n)} + w_{c,\,n-1}^{(n)}}.$$

Если определено ускорение точки M относительно какой-либо k-той среды, то учет движения k-ой среды относительно следующей $(k+1)$-й сопровождается добавлением к уже найденному ускорению материальной точки двух новых ускорений — переносного и ускорения Кориолиса вместе с точкой k-ой среды относительно $(k+1)$-й.

Формула для $w^{(n)}$ [2] после исправления отличается от выражения (2) и в наших обозначениях имеет вид

$$w = w^{(1)} + w_1^{(2)} + w_2^{(3)} + \ldots + w_{n-1}^{(n)} + w_O +$$
$$+ 2\omega_1^{(n)} \times v^{(1)} + 2\omega_2^{(n)} \times v_1^{(2)} + \ldots + 2\omega_{n-1}^{(n)} \times v_{n-2}^{(n-1)} \qquad (3)$$

и показывает, что учет каждого нового переносного движения сопровождается изменением всех членов второй группы слагаемых.

Для приведения формулы (3) к виду (2) угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_1^{(n)}$, $\boldsymbol{\omega}_2^{(n)}$, ...надо выразить через $\boldsymbol{\omega}_1^{(2)}$, $\boldsymbol{\omega}_2^{(3)}$, ..., $\boldsymbol{\omega}_{n-1}^{(n)}$ и вместо переносных скоростей ввести в рассмотрение относительные скорости точки M. Присутствие слагаемого $\boldsymbol{\omega}_0$ в формуле (3) связано с оговоркой о возможности поступательного движения последней среды.

Если при определении переносного ускорения материальной точки M вместе с k-ой средой относительно $(k+1)$-й за полюс O_k взять любую точку мгновенной винтовой оси данного переносного движения, то скорость и ускорение полюса могут быть представлены в виде

$$\boldsymbol{v}_{O_k}^{(k+1)} = A_k \boldsymbol{\omega}_k^{(k+1)};$$

$$\boldsymbol{w}_{O_k}^{(k+1)} = \dot{A}_k \boldsymbol{\omega}_k^{(k+1)} + A_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^{(k+1)}.$$

Следовательно, ускорения всех точек рассматриваемой мгновенной винтовой оси одинаковы и расположены в плоскости, проходящей через $\boldsymbol{\omega}_k^{(k+1)}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_k^{(k+1)}$.

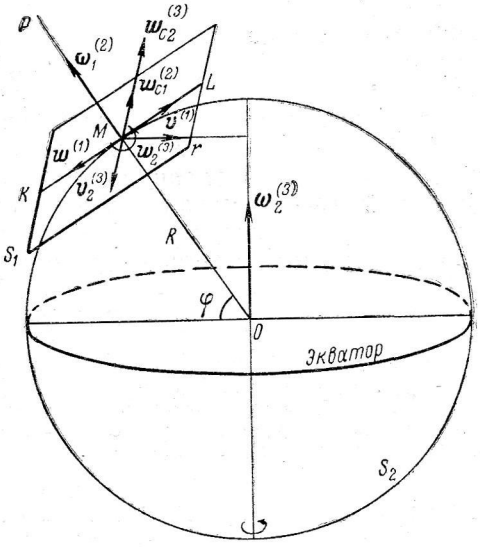


Рис. 2

Пример (рис. 2). Пусть материальная точка M движется по прямой KL плоскости S_1, перпендикулярной прямой OP и вращающейся вокруг этой прямой с известной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1{}^2$ относительно Земли (тела S_2). Земля вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2{}^3$ вокруг своей оси, считаемой условно неподвижной. Точнее, примем за условно неподвижную среду S_3 плоскость, проведенную через ось Земли и условно неподвижный центр Солнца.

Определим скорость $\boldsymbol{v}^{(3)}$ и ускорение $\boldsymbol{w}^{(3)}$ точки M относительно плоскости S_3 в момент прохождения точки через ось OP с известными скоростью $\boldsymbol{v}^{(1)}$ и ускорением $\boldsymbol{w}^{(1)}$ по прямой KL, находящейся в этот момент в плоскости меридиана данного места.

Очевидно, модули искомых величин

$$v^{(3)} = \sqrt{(v^{(1)})^2 + (v_2^{(3)})^2};$$

$$w^{(3)} = \sqrt{(w^{(1)} - w_2^{(3)}\sin\varphi)^2 + (w_2^{(3)}\cos\varphi)^2 + (w_{c1}^{(2)} + w_{c2}^{(3)})^2};$$

$$v_2^{(3)} = \omega_2^{(3)} R\cos\varphi; \quad w_2^{(3)} = (\omega_2^{(3)})^2 R\cos\varphi;$$

$$w_{c1}^{(2)} = 2\omega_1^{(2)} v^{(1)}; \quad w_{c2}^{(3)} = 2\omega_2^{(3)} v^{(1)}\sin\varphi.$$

Вектор скорости $\boldsymbol{v}^{(3)}$ расположен в плоскости S_1. О направлении вектора ускорения $\boldsymbol{w}^{(3)}$ можно составить представление по рис. 2, где векторы $\boldsymbol{w}^{(1)}$, $\boldsymbol{w}_{c1}^{(2)}$, $\boldsymbol{w}_{c2}^{(3)}$ находятся в плоскости S_1, а вектор $\boldsymbol{w}_2^{(3)}$ — в плоскости меридиана и направлен перпендикулярно оси вращения Земли.

Заключение. Теорема об ускорении в многосложном движении материальной точки может найти применение в чисто технических вопросах

и естествознании, в частности — астрономии. Астрономия, постепенно расширяя область изучения Вселенной, учитывает все возрастающее число движений, в которых участвует земной шар. Чисто вращательное движение Земли вокруг своей оси усложняется нутационным и прецессионным движениями оси. Центр масс земного шара совершает годовое движение около Солнца. Солнечная система, входя в состав Галактики, движется в этой последней и т. д.

Поэтому ускорение тел, связанных с земным шаром или движущихся вблизи него, теоретически может вычисляться по формуле (2) с соответствующим числом векторных слагаемых, после чего и может применяться основная формула Ньютона $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{w}$. При этом уточнение вычисления ускорения $\boldsymbol{w}$ должно сопровождаться соответствующим более точным вычислением силы $\boldsymbol{F}$.

Существует и другой способ решения рассматриваемой задачи, связанный с переходом от одних координат к другим. Так, В. Я. Цингер предложил решить задачу об относительном движении брошенной материальной точки сначала как задачу об абсолютном движении этой точки под действием только силы притяжения Земли, а потом полученное абсолютное движение преобразовать в относительное [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Суслов Г. К. Теоретическая механика, изд. III. Гостехиздат, 1946.
2. Антимонов К. И. Вывод формулы для ускорения точки в многосложном движении и ее применение к движению шпинделя кольцепрядильного веретена. Труды Ленинградского текстильного ин-та, № 6, 1955.
3. Цингер В. Я. Об относительном движении брошенной точки. Математический сб. Т. I. М., 1866, стр. 163—172.
4. Voinea Radu P. Studii si cercetari mec. apl. Acad. RPR, 1957, t. 8, № 4.