*Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXIX, вып. 3, 1961 г.*

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА УПРУГОСТИ СОПРЯЖЕНИЯ КРУГЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТОРЦОВОЙ СТЕНКОЙ

*Л. С. Бурштейн*

При сопряжении цилиндрической оболочки с торцовой пластиной краевые условия отражают условия упругой заделки. Угол наклона изогнутой кривой в месте сопряжения пропорционален величине момента $M$, так что

$$\theta = kM, \tag{1}$$

где $k$ — коэффициент, зависящий от жесткости заделки, т. е. от степени стеснения на краях.

Если эта заделка весьма гибкая, коэффициент $k$ становится большим и условия на краях приближаются к тем, которые имеют место при простом опирании. Если заделка весьма жесткая, величина $k$ уменьшается и условия на краях приближаются к условиям абсолютно жесткой заделки.

Рассмотрим равновесие элемента, вырезанного из цилиндрической оболочки двумя смежными осевыми сечениями и двумя смежными сечениями, перпендикулярными оси цилиндра. Предполагается, как это принято в теории оболочек, что линейные элементы оболочки, нормальные к ее серединной поверхности, остаются прямолинейными и нормальными к деформированной серединной поверхности оболочки.

Уравнения равновесия для элемента цилиндрической оболочки имеют вид [4]:

$$\begin{gathered}
N_x' + \frac{\dot{M}_{x\varphi}}{a} + N_{x\varphi}(1+\varepsilon) + aX = 0;\\
\dot{N}_\varphi + N'_{x\varphi} + Q_\varphi + aY = 0;\\
Q_x' + \dot{Q}_\varphi - N_\varphi + aZ = 0;\\
M'_{x\varphi} + aQ_\varphi - \dot{N}_\varphi = 0;\\
\dot{M}_{x\varphi} + a\varepsilon\dot{N}_{x\varphi} - M_x' + aQ_x = 0,
\end{gathered} \tag{2}$$

где $N_x$, $N_\varphi$ — равнодействующие нормальных сил;
$N_{x\varphi}$ — равнодействующая касательных сил на единицу длины сечения;
$M_x$, $M_\varphi$ — изгибающие моменты;

$M_{x\varphi}$ — крутящий момент на единицу длины сечения (дифференцирование по $\varphi$ обозначено точкой, по $x$ — штрихом);
$a$ — радиус оболочки;
$X, Y, Z$ — компоненты нагрузки на оболочку;
$\varepsilon = \frac{h^2}{12a^2}$.

Если выразить компоненты нагрузки и деформаций в функции от $\sin\varphi$ и $\cos n\varphi$, положив

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x_0}\cos n\varphi, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_{\varphi_0}\cos n\varphi, \quad \gamma = \gamma_0\cos n\varphi,$$
$$M_x = M_{x_0}\cos n\varphi, \quad M_\varphi = M_{\varphi_0}\cos n\varphi \text{ и т. д.},$$

то получим следующие зависимости между компонентами смещений $u$, $v$, $w$, компонентами деформаций $\varepsilon_x$, $\varepsilon_\varphi$, $\gamma$ и равнодействующими сил и моментов

$$N_x = \frac{D}{\varepsilon a^2}\left(\frac{u'}{a} + \nu\varepsilon_\varphi\right); \quad M_x = -\frac{D}{a}\left[\theta' - \frac{u'}{a} - 2\nu\varepsilon_\varphi - \nu(n^2-1)\frac{w}{a}\right];$$

$$N_\varphi = \frac{D}{\varepsilon a^2}\left(\varepsilon_\varphi + \nu\frac{u'}{a}\right); \quad M_\varphi = \frac{D}{a}\left[(n^2-1)\frac{w}{a} + \varepsilon_\varphi - \nu\theta'\right];$$

$$N_{x\varphi} = \frac{(1-\nu)D}{2\varepsilon a^2}\left[\frac{\varepsilon_\varphi' - \theta}{n} - \frac{nu}{a}\right]; \tag{3}$$

$$M_{x\varphi} = -\frac{D(1-\nu)}{2a}\left[\frac{2n^2-3}{n}\theta + \frac{3}{n}\varepsilon_\varphi' - n\frac{u}{a}\right],$$

где $\theta = \frac{dw}{dx} = \frac{w'}{a}$;
$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость;
$h$ — толщина оболочки;
$\nu$ — коэффициент поперечной деформации[1].

Так как $w$ и $\theta$ связаны простым уравнением $\theta = \frac{w'}{a}$, то в качестве неизвестных остаются только $\frac{u}{a}$, $\varepsilon_\varphi$ и $\theta$. Необходимые три уравнения получим, если из уравнений равновесия исключим $Q_x$ и $Q_\varphi$, а остальные заменим согласно (3). После некоторых преобразований получим для $n=1$ и $X=Y=Z=0$ три дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\frac{u'}{a}(1+\varepsilon) - \varepsilon\theta' + \varepsilon_\varphi\nu(1+2\varepsilon) = 0,$$

$$\frac{u'}{a}[\nu(1-\varepsilon) + (1+\varepsilon)] + \theta'[(1+\varepsilon) - \nu(1+3\varepsilon)] -$$
$$- \varepsilon_\varphi''(1-\nu)(1+3\varepsilon) + 2\varepsilon_\varphi(1+\varepsilon) = 0,$$

$$2\frac{u''}{a} - \frac{u}{a}(1-\nu) - \theta(1-\nu) + \varepsilon_\varphi'[(1-2\varepsilon) + \nu(1+2\varepsilon)] = 0. \tag{4}$$

[1] В уравнениях (3) индекс 0 опущен.

Обозначая

$$k=\frac{1-\nu^2}{\varepsilon};\quad \nu_1=\frac{1}{k};\quad \nu_2=\frac{\nu\sqrt{k-4}}{k};$$

$$\mu_1=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{k}-1};\quad \mu_2=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{k}+1};$$

$$\rho_1=\frac{\mu_2}{k}[\sqrt{k}-(2+\nu)];\quad \rho_2=\frac{\mu_1}{k}[\sqrt{k}+(2+\nu)];$$

$$\xi=\frac{x}{a},$$

можно представить решение уравнений (4) следующим образом:

$$\theta=-C_1\sin\mu_1\xi\,\mathrm{sh}\,\mu_2\xi-C_2\sin\mu_1\xi\,\mathrm{ch}\,\mu_2\xi-C_3\cos\mu_1\xi\,\mathrm{sh}\,\mu_2\xi-C_4\cos\mu_1\xi\,\mathrm{ch}\,\mu_2\xi;$$

$$\frac{u}{a}=-(\nu_1C_1-\nu_2C_4)\sin\mu_1\xi\,\mathrm{sh}\,\mu_2\xi-(\nu_1C_2-\nu_2C_3)\sin\mu_1\xi\,\mathrm{ch}\,\mu_2\xi-$$

$$-(\nu_1C_3+\nu_2C_4)\cos\mu_1\xi\,\mathrm{sh}\,\mu_2\xi-(\nu_1C_4+\nu_2C_1)\cos\mu_1\xi\,\mathrm{ch}\,\mu_2\xi;$$

$$\varepsilon_\varphi=-(\rho_1C_2+\rho_2C_3)\sin\mu_1\xi\,\mathrm{sh}\,\mu_2\xi-(\rho_1C_1+\rho_2C_4)\sin\mu_1\xi\,\mathrm{ch}\,\mu_2\xi+$$

$$+(\rho_2C_1-\rho_1C_4)\cos\mu_1\xi\,\mathrm{sh}\,\mu_2\xi+(\rho_2C_2-\rho_1C_3)\cos\mu_1\xi\,\mathrm{ch}\,\mu_2\xi. \qquad (5)$$

Применяя уравнения (5) для определения коэффициента упругости сопряжения круглой цилиндрической оболочки с торцовой пластиной (рис. 1), можно определить постоянные интегрирования из условий:

при $\xi=0$, $\theta=0$ и $\theta''=0$;

при $\xi=\frac{l}{a}$, $\frac{w}{a}=0$ и $\theta=\theta_{\text{пл}}$.

Из первых двух условий получаем

$$C_1=C_4=0.$$

Третье условие дает следующую зависимость между постоянными:

$$\left(\frac{w}{a}\right)_{\xi=\frac{l}{a}}=-\frac{\mu_2C_2+\mu_1C_3}{\mu_1^2+\mu_2^2}\sin\frac{\mu_1 l}{a}\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_2 l}{a}+$$

$$+\frac{\mu_1C_2-\mu_2C_3}{\mu_1^2+\mu_2^2}\cos\frac{\mu_1 l}{a}\,\mathrm{ch}\,\frac{\mu_2 l}{a}=0.$$

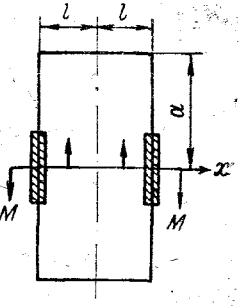



Рис. 1. Сопряжение цилиндрической оболочки с торцовой пластиной

Отсюда

$$C_2=C_3\frac{\mu_2+\mu_1\,\mathrm{tg}\,\frac{\mu_1 l}{a}\,\mathrm{th}\,\frac{\mu_2 l}{a}}{\mu_1-\mu_2\,\mathrm{tg}\,\frac{\mu_1 l}{a}\,\mathrm{th}\,\frac{\mu_2 l}{a}}.$$

Из четвертого условия

$$\theta=-C_2\sin\mu_1\xi\,\mathrm{ch}\,\mu_2\xi-C_3\cos\mu_1\xi\,\mathrm{sh}\,\mu_2\xi,$$

откуда

$$C_2=-\frac{A\theta}{A\sin\frac{\mu_1 l}{a}\,\mathrm{ch}\,\frac{\mu_2 l}{a}+\cos\frac{\mu_1 l}{a}\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_2 l}{a}};$$

$$C_3=-\frac{\theta}{A\sin\frac{\mu_1 l}{a}\,\mathrm{ch}\,\frac{\mu_2 l}{a}+\cos\frac{\mu_1 l}{a}\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_2 l}{a}},$$

где

$$A=\frac{\mu_2+\mu_1 \operatorname{tg}\frac{\mu_1 l}{a}\operatorname{th}\frac{\mu_2 l}{a}}{\mu_1-\mu_2 \operatorname{tg}\frac{\mu_1 l}{a}\operatorname{th}\frac{\mu_2 l}{a}}.$$

Для определения коэффициента упругости $k$ воспользуемся зависимостью

$$(\theta)_{\xi=\frac{l}{a}}=-k\,(M_x)_{\xi=\frac{l}{a}}. \tag{6}$$

Согласно (3), для $n=1$ имеем

$$M_x=\frac{D}{a}\left(\theta'-\frac{u'}{a}-2\nu\varepsilon_\varphi\right),$$

где

$$\theta'=-(\mu_2C_2-\mu_1C_3)\sin\mu_1\xi\,\operatorname{sh}\mu_2\xi-(\mu_1C_2+\mu_2C_3)\cos\mu_1\xi\,\operatorname{ch}\mu_2\xi;$$

$$\frac{u'}{a}=(\psi_1C_2+\psi_2C_3)\sin\mu_1\xi\,\operatorname{sh}\mu_2\xi+(\psi_1C_3-\psi_2C_2)\cos\mu_1\xi\,\operatorname{ch}\mu_2\xi;$$

$$\psi_1=\nu_2\mu_1-\nu_1\mu_2;\quad \psi_2=\nu_2\mu_2+\nu_1\mu_1;$$

$$\varepsilon_\varphi=-(\rho C_2+\rho_2C_3)\sin\mu_1\xi\,\operatorname{sh}\mu_2\xi+(\rho_2C_2-C_3\rho_1)\cos\mu_1\xi\,\operatorname{ch}\mu_2\xi.$$

Подставляя эти значения в выражение для $M_x$, найдем

$$M_x=-\frac{D}{a}\{-[C_2(\mu_2+\psi_1-0{,}6\rho_1)+C_3(-\mu_1+\mu_2-0{,}6\rho_2)]\sin\mu_1\xi\,\operatorname{sh}\mu_2\xi-$$

$$-[C_2(\mu_1+0{,}6\rho_2-\psi_2)+C_3(\mu_2+\psi_1-0{,}6\rho_1)]\cos\mu_1\xi\,\operatorname{ch}\mu_2\xi. \tag{7}$$

Переходя к уравнению (6), получаем

$$\theta=-C_2\sin\frac{\mu_1 l}{a}\operatorname{ch}\frac{\mu_2 l}{a}-C_3\cos\frac{\mu_1 l}{a}\operatorname{sh}\frac{\mu_2 l}{a}=\frac{kD}{a}\left\{-\right.$$

$$\left.-[C_2c-C_3d]\sin\frac{\mu_1 l}{a}\operatorname{sh}\frac{\mu_2 l}{a}-[C_2d+C_3c]\cos\frac{\mu_1 l}{a}\operatorname{ch}\frac{\mu_2 l}{a}\right\},$$

где

$$c=\mu_2+\psi_1-0{,}6\rho_1;\quad d=\mu_1-\psi_2+0{,}6\rho_2.$$

Заменяя постоянные интегрирования их значениями и сокращая на $\theta$, получим окончательно

$$k=\frac{A\sin\frac{\mu_1 l}{a}\operatorname{ch}\frac{\mu_2 l}{a}+\cos\frac{\mu_1 l}{a}\operatorname{sh}\frac{\mu_2 l}{a}}{(Ac-d)\sin\frac{\mu_1 l}{a}+(Ad+c)\cos\frac{\mu_1 l}{a}\operatorname{ch}\frac{\mu_2 l}{a}}\cdot\frac{a}{D}. \tag{8}$$

**Приближенное вычисление коэффициента упругости заделки.** Коэффициент упругости заделки торцовой стенки $k$ можно приближенно вычислить, пользуясь методом так называемой балки-полоски, рассматриваемой как балка на упругом основании.

Дифференциальное уравнение упругой линии этой балки имеет вид [1]

$$D\frac{d^4w}{dx^4}+\frac{Eh}{a^2}w=q, \tag{9}$$

где $w$ — прогиб;

$q$ — нагрузка на балку-полоску.

Разделив уравнение (9) на $D$, получим

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 4\mu^4 w = \frac{q}{D}, \tag{10}$$

где

$$4\mu^4 = \frac{12(1-\nu^2)}{a^2h^2}; \quad \mu = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{a^2h^2}}.$$

Принимая $\xi = \mu x$ и учитывая, что

$$D\mu^4 = \frac{Eh}{4a^2} = \frac{c}{4},$$

уравнение (10) напишем в виде

$$\frac{d^4w}{d\xi^4} + 4w = \frac{4q}{c}. \tag{11}$$

В нашем случае $q = 0$ и уравнение (11) принимает вид

$$\frac{d^4w}{d\xi^4} + 4w = 0. \tag{12}$$

Общее решение для однородного дифференциального уравнения (12) имеет вид [2]

$$w = C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3 + C_4Y_4, \tag{13}$$

где $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$, $Y_4$ — функции Крылова, равные

$$Y_1 = \operatorname{ch}\xi\cos\xi; \quad Y_2 = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\xi\sin\xi + \operatorname{sh}\xi\cos\xi);$$
$$Y_3 = \frac{1}{2}\operatorname{sh}\xi\sin\xi; \quad Y_4 = \frac{1}{4}(\operatorname{ch}\xi\sin\xi - \operatorname{sh}\xi\cos\xi). \tag{14}$$

Дифференцируя функции (14), находим:

$$\frac{dY_1}{d\xi} = \operatorname{sh}\xi\cos\xi - \operatorname{ch}\xi\sin\xi = -4Y_4;$$

$$\frac{dY_2}{d\xi} = \operatorname{ch}\cos\xi = Y_1; \quad \frac{dY_3}{d\xi} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\xi\sin\xi + \operatorname{sh}\xi\cos\xi) = Y_2;$$

$$\frac{dY_4}{d\xi} = \frac{1}{4}(\operatorname{sh}\xi\sin\xi + \operatorname{sh}\xi\sin\xi) = Y_3.$$

Заметим, что выражения (14) дают

$$Y_1(0) = 1; \quad Y_2(0) = Y_3(0) = Y_4(0) = 0.$$

Для вычисления углов наклона касательной к оси $\varphi$, моментов $M$ и поперечных сил $Q$ имеем [3]

$$\varphi = \frac{dw}{dx} = \mu\frac{dw}{d\xi};$$

$$M = -D\frac{d^2w}{dx^2} = -D\mu^2\frac{d^2w}{d\xi^2};$$

$$Q = -D\frac{d^3w}{dx^3} = -D\mu^3\frac{d^3w}{d\xi^3},$$

где

$$\frac{dw}{d\xi} = -4C_1Y_4 + C_2Y_1 + C_3Y_2 + C_4Y_3;$$

$$\frac{d^2w}{d\xi^2} = -4C_1Y_3 - 4C_2Y_4 + C_3Y_1 + C_4Y_2;$$

$$\frac{d^3w}{d\xi^3} = -4C_1Y_2 - 4C_2Y_3 - 4C_3Y_4 + C_4Y_1.$$

Принимая середину балки за начало координат (см. рис. 1), имеем следующие граничные условия:

при $x=0$ $\frac{dw}{dx}=0$ и $\frac{d^3w}{dx^3}=0$;

при $x=l$, $w=0$.

Из первых двух условий вытекает

$$C_2 = C_4 = 0.$$

Третье условие дает

$$C_3 = -C_1\frac{Y_1(\mu l)^*}{Y_3(\mu l)}.$$

Изгибающий момент в сечении оболочки

$$M_x = -D\mu^2\frac{d^2w}{d\xi^2} = -D\mu^2[-4C_1Y_3(\xi) + C_3Y_1(\xi)].$$

При $x=l$

$$M_x = D\mu^2C_1\frac{Y_1^2 + 4Y_3^2}{Y_3}.$$

Угол поворота сечения оболочки

$$\theta = \mu[-4C_1Y_4(\xi) + C_3Y_2(\xi)];$$

$$(\theta)_{x=l} = -\frac{\mu C_1}{Y_3}(4Y_3Y_4 + Y_1Y_2),$$

откуда

$$k = -\frac{(\theta)_{x=l}}{(M)_{x=l}} = \frac{Y_1Y_2 + 4Y_3Y_4}{(Y_1^2 + 4Y_3^4)\mu D}. \qquad (15)$$

Заменяя в (15) функции Крылова тригонометрическими, получим

$$k = \frac{\mathrm{sh}2\mu l + \sin 2\mu l}{4(\mathrm{ch}^2\mu l - \sin^2\mu l)\mu D}. \qquad (16)$$

Как видно из рис. 2, вначале $k$ резко возрастает, достигая наибольшего значения 0,677 при $\mu l = 1$, затем убывает до 0,5 при $\mu l > \pi$, после чего практически не изменяется.

Для оценки степени точности приближенного метода определения коэффициента упругости $k$ на рис. 3 сопоставлены результаты вычисления по точному и приближенному методам для оболочки с $a = 12{,}5$ *см*. Как видно из рисунка, кривые расходятся незначительно.

---

* В дальнейшем скобки $\mu l$ опускаются.

**Опытные данные.** Опытное определение коэффициента упругости в лабораторных условиях производилось [1] для шести круглых цилиндрических оболочек с торцовыми стенками согласно схеме рис. 1. Результаты испытаний приведены в таблице. Теоретические значения вычислялись по формуле (15), совпадение их с экспериментальными удовлетворительное.

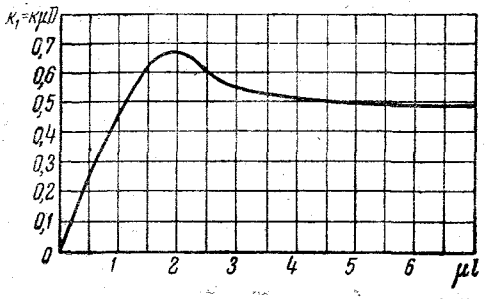



Рис. 2. Зависимость коэффициента упругости от длины оболочки

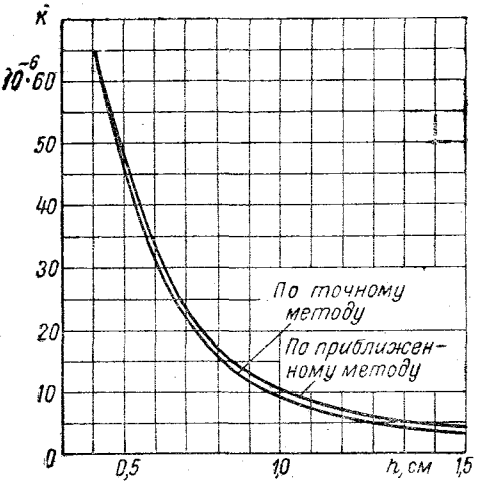



Рис. 3. Зависимость коэффициента упругости от толщины оболочки

Таким образом, предложенная методика определения коэффициентов упругости теоретическим путем является достаточно надежной.

| $a$, см | $h$, см | $\mu D$ | $\mu l$ | $k \cdot 10^{-6}$, кг$^{-1}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | теоретическое | экспериментальное |
| 12,8 | 1,438 | 0,172 | 0,822 | 3,77 | 3,26 |
| 11,04 | 1,455 | 0,185 | 0,857 | 3,59 | 4,08 |
| 12,77 | 1,485 | 0,186 | 0,812 | 3,52 | 3,92 |
| 14,28 | 1,425 | 0,159 | 0,785 | 4,02 | 3,98 |
| 11,15 | 1,567 | 0,24 | 0,857 | 2,77 | 2,71 |
| 14,28 | 1,485 | 0,176 | 0,768 | 3,63 | 3,26 |

## ЛИТЕРАТУРА


1. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехтеоретиздат, 1947.
2. Филоненко-Бородич М. М. Сопротивление материалов, ч. II. Гостехтеоретиздат, 1948.
3. Тимошенко С. Н. Пластины и оболочки. Гостехтеоретиздат, 1948.
4. Miesel K. Ingr — Arch., 1929, B. 1.


[1] Опыты производились в лаборатории Кировского завода.