Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXIX, вып. 3, 1961 г.

СПЛЮЩИВАНИЕ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ НАГРУЗОК

Л. С. Бурштейн

Полый цилиндр под действием равных и противоположных сил, направленных по диаметру (рис. 1), сплющивается. Эта деформация обычно сопровождается искривлением образующих цилиндра. Чем длиннее цилиндр, тем больше искривление образующих. При сравнительно коротких цилиндрах искривление образующих незначительно и

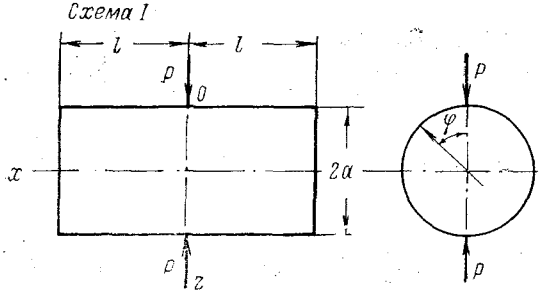


Рис. 1. Схема загружения круглой цилиндрической оболочки двумя сосредоточенными силами

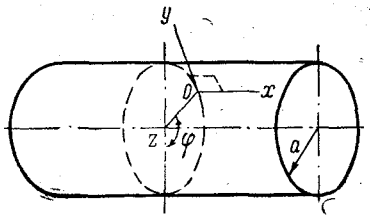


Рис. 2. Направления компонентов смещения

им можно пренебречь. Такого рода деформация, при которой образующие цилиндра сохраняют прямолинейную форму, была рассмотрена при помощи энергетического метода [1]. В настоящей работе эта задача рассматривается для сравнительно длинных цилиндров (труб, полых валов, барабанов), где искривление образующих значительно и пренебрежение этим фактором становится недопустимым.

Рассмотрим элемент цилиндра в точке O серединной поверхности (рис. 2). Обозначив компоненты смещения точки O в направлениях x, y, z соответственно через u, v, w, примем для них следующие выражения:

$$u = u_1 + u_2; \quad v = v_1 + v_2; \quad w = w_1 + w_2,$$

где

$$u_1 = 0;$$

$$v_1 = a \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi - a_n' \sin n\varphi;$$

$$w_1 = -a \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n \sin n\varphi + a_n' \cos n\varphi); \qquad (1)$$

a — радиус серединной поверхности оболочки;
φ — центральный угол;
a_n и a_n' — постоянные, вычисляемые для каждого частного случая загрузки.

Смещения (1) представляют тот случай, когда все поперечные сечения оболочки деформируются совершенно одинаково. На эти смещения надо наложить смещения, выражаемые посредством следующих рядов:

$$u_2 = -a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(b_n \sin n\varphi + b_n' \cos n\varphi);$$

$$v_2 = af(x)\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cos n\varphi - b_n' \sin n\varphi); \qquad (2)$$

$$w_2 = -af(x)\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \sin n\varphi + b_n' \cos n\varphi),$$

где

$$f(x) = e^{-\beta x}(\cos \beta x + \sin \beta x); \qquad (3)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{a^2h^2}}. \qquad (4)$$

Деформацию оболочки, нагруженной согласно схеме *I* (см. рис. 1), находим при помощи энергетического метода. Полная энергия деформации цилиндрической оболочки составляет

$$V = \frac{D}{2a^4}\int\int\left[\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)^2 + 2(1-\nu)a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + a^4\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\right] a\,d\varphi\,dx.$$

Первое слагаемое под интегралом соответствует энергии деформации, обусловленной изменением кривизны в окружном направлении, второе — деформации кручения и третье — изменению кривизны в направлении образующей. Подставляя значения v и w согласно (1) и (2), найдем

$$V = \frac{\pi D}{a}\sum_{n=2}^{\infty}\left\{n^2(n^2-1)^2\left[(a_n^2 + a_n'^2)\,l + (b_n^2 + b_n'^2)\int_0^l f^2(x)\,dx\right] + 2(1-\nu)a^2(n^2-1)^2(b_n^2 + b_n'^2)\int_0^l f'^2(x)\,dx + n^2a^4(b_n^2 + b_n'^2)\int_0^l f''^2(x)\,dx\right\}. \qquad (5)$$

Интегралы, содержащиеся в этом выражении, равны

$$\int_0^l f^2(x)\,dx = -\frac{1}{4\beta}[e^{-2\beta l}(2 + \sin 2\beta l + \cos 2\beta l) - 3];$$

$$\int_0^l f'^2(x)\,dx = -\frac{\beta}{2}\left[e^{-2\beta l}(2+\sin 2\beta l-\cos 2\beta l)-1\right];$$

$$\int_0^l f''^2(x)\,dx = \beta^3\left[e^{-2\beta l}(\sin 2\beta l+\cos 2\beta l-2)+1\right].$$

Для $\beta l \gg \pi$ можно написать

$$\int_0^l f^2(x)\,dx = \frac{3}{4\beta},\quad \int_0^l f'^2(x)\,dx = \frac{\beta}{2},\quad \int_0^l f''^2(x)\,dx = \beta^3.$$

Подставляя эти значения в выражение для потенциальной энергии, получим окончательно

$$V = \frac{\pi D}{a}\sum_{n=2}^{\infty}\left\{n^2(n^2-1)^2\left[(a_n^2+a_n'^2)\,l+\frac{3}{4\beta}(b_n^2+b_n'^2)\right]+\right.$$

$$\left.+\beta(1-\nu)\,a^2(n^2-1)^2(b_n^2+b_n'^2)+\beta^3a^4n^2(b_n^2+b_n'^2)\right\}. \qquad (6)$$

Вычисляя сплющивание оболочки, нагруженной силами P, согласно схеме рис. 1, заметим, что эти силы производят работу лишь в точках $x=0$, $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$. Так как члены с коэффициентами a_n и b_n в выражении для w_1 и w_2 [см. уравнения (1) и (2)] в этих точках обращаются в нуль, то в выражение для деформации войдут лишь члены с коэффициентами a_n' и b_n'. На основании принципа возможных перемещений можно написать следующие уравнения для вычисления коэффициентов a_n' и b_n':

$$\frac{\partial V}{\partial a_n'}\delta a_n' = -na\delta a_n'(1+\cos n\pi)P;$$

$$\frac{\partial V}{\partial b_n'}\delta b_n' = -naf(0)\,\delta b_n'(1+\cos n\pi)P.$$

Подставляя вместо V выражение (6), получим для случая, когда n — четное число,

$$\frac{\pi D}{a^2}(n^2-1)^2n^2 2a_n' l = -na2P;$$

$$\frac{\pi D}{a}\left[(n^2-1)^2n^2\frac{3}{2}\frac{b_n'}{\beta}+2(1-\nu)(n^2-1)^2n^2a^2\beta b_n'+\right.$$

$$\left.+2n^2a^4\beta^3b_n'\right] = -naf(0)2P.$$

Учитывая, что $f(0)=1$, находим

$$a_n' = -\frac{a^2P}{n(n^2-1)^2\pi Dl};$$

$$b_n' = -\frac{2na^2\beta P}{\pi D\{(n^2-1)^2[1{,}5n^2+2(1-\nu)a^2\beta^2]+2n^2a^4\beta^4\}}. \qquad (7)$$

Если n — нечетное число,

$$a_n' = b_n' = 0.$$

По формулам (1) и (2) находим

$$w = \left\{ \frac{Pa^3}{\pi Dl} \sum \frac{1}{(n^2-1)^2} + \frac{Pa^3\beta}{\pi D} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{n=2,\,4,\,6\ldots} \frac{f(x)}{\left(\frac{n^2-1}{n}\right)^2 [0{,}75n^2 + (1-\nu)\,a^2\beta^2] + a^4\beta^4} \right\} \cos n\varphi. \qquad (8)$$

Укорочение вертикального диаметра оболочки посередине (при $x = 0$) равно

$$\delta = (w)_{\varphi=0} + (w)_{\varphi=\pi} = 0{,}149\,\frac{Pa^3}{2Dl} +$$

$$+ \frac{2Pa^3\beta}{\pi D} \sum_{n=2,\,4,\,6\ldots} \frac{1}{\left(\frac{n^2-1}{n}\right)^2 [0{,}75n^2 + (1-\nu)\,a^2\beta^2] + a^4\beta^4}, \qquad (9)$$

или

$$\delta = 0{,}149\,\frac{Pa^3}{2Dl}(1 + 2\beta lk), \qquad (10)$$

где

$$k = 4{,}27 \sum \frac{1}{\left(\frac{n^2-1}{n}\right)^2 [0{,}75n^2 + (1-\nu)a^2\beta^2] + a^4\beta^4}.$$

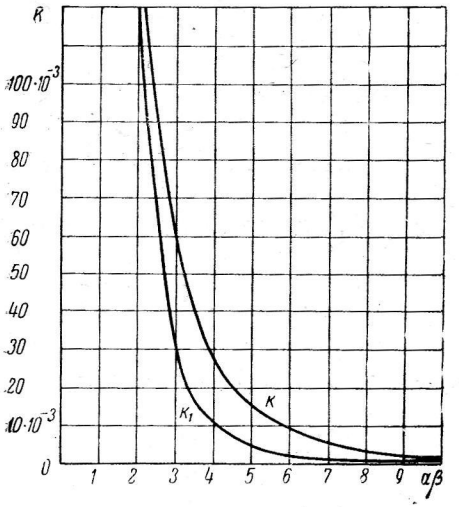


Рис. 3. Зависимость $k = f(\beta a)$

Зависимость $k = f(\beta a)$ представлена на рис. 3.

В формуле (10) член $2\beta lk$ представляет поправку на деформацию, обусловленную изменением кривизны в направлении образующей. При $k = 0$ получим формулу Релея для определения укорочения вертикального диаметра при условии нерастяжимости серединной поверхности оболочки

$$\delta = 0{,}149\,\frac{Pa^3}{2Dl}. \qquad (11)$$

Изложенная методика расчета может быть применена также для определения деформации среднего сечения оболочки для случая расположения сил согласно схеме рис. 4. Первый член выражения (9), представляющий деформацию оболочки в предположении, что все поперечные сечения деформируются одинаково и все образующие цилиндра при изгибе остаются прямыми, в данном случае не изменится. В этом смысле схемы, представленные на рис. 1 и 4, с точки зрения деформации сечения являются совершенно эквивалентными. Второй же член будет в два раза меньше, поскольку в этой схеме местная деформация проявляется не под действием двух сил P, а только одной.

Таким образом, укорочение вертикального диаметра оболочки посередине при нагружении, согласно схеме *II* (см. рис. 4), равно

$$\delta = \frac{2Pa^3}{\pi Dl} \sum_{n=2,\,4,\,6\,\ldots} \frac{1}{(n^2-1)^2} + \\ + \frac{Pa^3\beta}{\pi D} \sum_{n=2,\,4,\,6\,\ldots} \frac{1}{\left(\frac{n^2-1}{n}\right)^2 [0{,}75n^2 + (1-\nu)\,a^2\beta^2] + a^4\beta^4}, \qquad (12)$$

или

$$\delta = 0{,}149 \frac{Pa^3}{2Dl}(1 + \beta l k), \qquad (13)$$

где $k = f(\beta a)$ определяется согласно рис. 3.

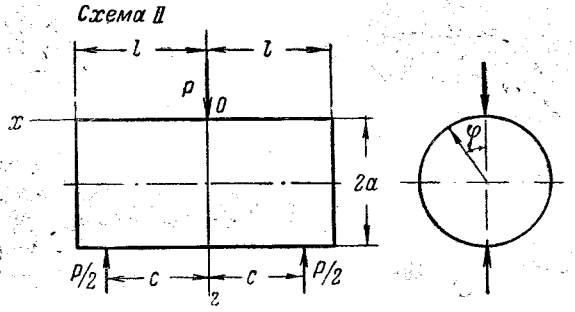


Рис. 4. Схема загружения круглой цилиндрической оболочки как просто опертой балки

Удлинение горизонтального диаметра оболочки посередине (при $x = 0$) для схемы *I* (см. рис. 1) равно

$$\delta_1 = -\left[(w)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} + (w)_{\varphi=\frac{3\pi}{2}}\right] = \frac{2Pa^3}{\pi Dl} \sum_{n=2,\,4,\,6\,\ldots} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{(n^2-1)^2} + \\ + \frac{2Pa^3\beta}{\pi D} \sum_{n=2,\,4,\,6\,\ldots} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{\left(\frac{n^2-1}{n}\right)^2 [0{,}75n^2 - (1-\nu)\,a^2\beta^2] + a^4\beta^4}, \qquad (14)$$

или

$$\delta_1 = 137 \frac{Pa^3}{2Dl}(1 + 2\beta l k_1), \qquad (15)$$

где

$$k = 4{,}27 \sum \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{\left(\frac{n^2-1}{n}\right)^2 [0{,}75n^2 + (1-\nu)\,a^2\beta^2] + a^4\beta^4}.$$

Зависимость $k_1 = f(\beta a)$ представлена на рис. 3.

Для нагрузки, согласно схеме *II*, удлинение горизонтального диаметра находится по формуле

$$\delta_1 = 0{,}137 \frac{Pa^3}{2Dl}(1 + \beta l k_1). \qquad (16)$$

Экспериментальное исследование деформации в круглой цилиндрической оболочке

1. Цилиндрическая оболочка, нагруженная посередине двумя равными и противоположными силами, направленными по диаметру (см. рис. 1). Исследование деформаций было произведено для 20 оболочек. Из них 10 были чисто обработаны по внутреннему и наружному диаметрам, остальные 10 представляли собой толстостенные прокатные трубы, обточенные по наружной поверхности. Внутренняя поверхность этих труб не растачивалась.

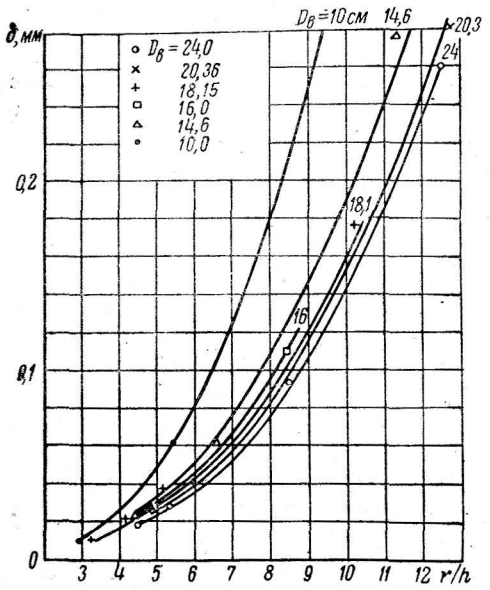


Рис. 5. Испытание круглых цилиндрических оболочек. Сопоставление экспериментальных и теоретических данных

При помощи пассиметров, установленных в среднем сечении, измерялось укорочение вертикального и удлинение горизонтального диаметров при различных нагрузках. Наибольшая нагрузка составляла 10,8 *т*. По мере уменьшения толщины стенок труб предельная нагрузка соответственно снижалась с тем, чтобы максимальное напряжение не превосходило допускаемого. Минимальное значение нагрузки в этих испытаниях составляло 1,5 *т*. Длина всех испытанных оболочек была одинаковой и составляла 100 *см*.

Испытания оболочек (см. рис. 1) имели целью опытную проверку формулы (10). Данные табл. 1 относятся только к укорочению вертикального диаметра. Данные по удлинению горизонтального диаметра и их сопоставление с теоретическими дают аналогичную картину и ничего принципиально нового не вносят. Из табл. 1 видно, что опытные и теоретические результаты вполне удовлетворительно согласуются. Некоторое расхождение для оболочек 18/23, 18,1/22 и 14,6/16 объясняется тем, что они относятся к числу труб с необработанной внутренней поверхностью, у которых внутренний диаметр может быть измерен только приблизительно.

Для большинства испытанных оболочек результаты испытаний (за исключением некоторых данных по оболочкам со сравнительно большим значением $\frac{r}{h}$) показаны на рис. 5. Здесь изображено 6 кривых, представляющих зависимость $\delta = f\left(\frac{r}{h}\right)$ соответственно для 6 оболочек. В каждой из этих оболочек внутренний диаметр оставался постоянным. Изменение значения $\frac{r}{h}$ происходило за счет обточки оболочки по наружному диаметру. Теоретические кривые рис. 5 построены по формуле (10). Точки на кривых показывают опытные результаты. Таким образом, совпадение опытных и теоретических данных в рассматриваемом диапазоне отношений $\frac{r}{h}$ удовлетворительное. Из рис. 5 также видно, что с уменьшением внутреннего диаметра крутизна кривой резко возрастает.

Для определения деформации среднего сечения при нагрузке согласно схеме *I* применяется также общеизвестная формула (11) Релея, по которой укорочение вертикального диаметра

$$\delta = 0{,}149\frac{Pa^3}{2Dl}.$$

Таблица 1

Результаты испытаний оболочек по схеме

Размер оболочки $D_в/D_н$, *см*	βa	k	Приращение нагрузки ΔP, *кг*	Укорочение вертикального диаметра δ, *мм*	
				теоретическое	экспериментальное
24/30	2,74	0,076	1000	0,018	0,0183
24/29	2,97	0,0614	1000	0,0276	0,0291
24/27	3,76	0,0321	1000	0,0925	0,0945
24/26	4,57	0,0188	1000	0,259	0,26
24/25	6,36	0,0073	500	0,785	0,842
20,3/24	3,0	0,062	1000	0,0323	0,035
20,3/22	4,62	0,019	500	0,148	0,141
20,3/21	7,27	0,004	110	0,354	0,374
18,1/24	2,36	0,095	1000	0,0091	0,0101
18,1/23	2,665	0,080	1000	0,0182	0,0211
18,1/20	4,13	0,024	500	0,0857	0,0947
16/20	2,74	0,076	1000	0,0233	0,0237
16/18	3,74	0,0322	1000	0,1165	0,110
16/17	5,23	0,013	500	0,317	0,332
14,6/18	2,83	0,069	1000	0,0294	0,0237
14,6/17	3,31	0,047	1000	0,0677	0,063
14,6/16	4,28	0,023	1000	0,0243	0,028
14,6/15,4	5,65	0,010	110	0,107	0,099
10/14	2,23	0,10	1000	0,00985	0,0093
10/12	2,79	0,071	1000	0,0596	0,061

Эта формула, как уже отмечалось, выведена в предположении, что изменение кривизны срединной поверхности в направлении образующей равно нулю, т. е. при изгибе все образующие остаются прямыми. Действительно, такое предположение допустимо только для сравнительно коротких оболочек. При длинных оболочках имеет место значительное искривление образующих и формула (11) дает неудовлетворительные результаты. Для иллюстрации в табл. 2 сопоставлены опытные данные с теоретическими по формулам (10) и (11).

Таблица 2

Сопоставление экспериментальных данных с теоретическими по формулам (10) и (11)

Размер оболочки $D_в/D_н$, *см*	Укорочение вертикального диаметра δ, *мм*			Погрешность, %	
	по формуле (11)	по формуле (10)	экспериментальное	по формуле (11)	по формуле (10)
24/30	0,0071	0,018	0,0183	158	0,17
24/29	0,0116	0,0276	0,0291	150	5,4
24/27	0,0475	0,0925	0,0945	99	2,16
24/26	0,154	0,259	0,26	69	0,39
24/25	0,568	0,758	0,842	41	7,25

Результаты по первым четырем оболочкам относятся к нагрузке 1000 *кг*, а по пятой — 500 *кг*. Как видно из табл. 2, формула (11) дает заниженные по сравнению с действительными результаты, погрешность составляет от 41 до 158%. По формуле (10) для этих же оболочек погрешность составляет 0,17—7,25%.

Для тонкого кольца формула Релея имеет вид

$$\delta = 0{,}149\,\frac{P\rho^3}{EI_z}, \qquad (17)$$

где ρ — средний радиус кольца;

I_z — момент инерции сечения кольца.

Проведенные опыты над кольцами прямоугольного сечения шириной 20 *см* и различной толщины при нагрузке 1000 *кг*, равномерно распределенной вдоль верхней и нижней образующих, показали удовле-

Таблица 3

Результаты опытов над кольцами прямоугольного сечения

Размер оболочки, $D_в/D_н$, *см*	Укорочение вертикального диаметра δ, *мм*		Погрешность, %
	по формуле (11)	экспериментальное	
18,5/24	0,0245	0,025	2,05
18,5/23	0,0413	0,043	4,12
18,5/22	0,0845	0,089	5,33
18,5/20	0,0399	0,40	0,25
20/23	0,158	0,155	1,9

творительное совпадение результатов с теоретическими (табл. 3) согласно формуле Релея (17).

Среднее экспериментальное значение деформации сечения по вертикальному диаметру вдоль длинной оболочки близко к теоретическому согласно формуле (11). Из табл. 4 видно, что расхождение между средним экспериментальным значением деформации и вычисленным по формуле Релея (11) сравнительно невелико и не превышает 6,05%.

Таблица 4

Определение среднего значения деформации сечения по вертикальному диаметру δ вдоль оболочки (по схеме *I*)

Размер оболочки, $D_в/D_н$, *см*	Деформация сечения, *мм*			Расхождение, %
	максимальная	средняя	по формуле (11)	
24/30	0,183	0,0753	0,071	6,05
24/29	0,291	0,123	0,116	6,0
24/27	0,472	0,233	0,238	2,1
24/26	1,30	0,742	0,77	3,63
24/25	2,52	1,713	1,71	0,175

Рассмотренные выше данные показывают, что формула Релея применительно к кольцам [в виде формулы (17)] дает вполне удовлетворительные результаты. При длинных оболочках и нагрузке, согласно схеме *I*, эта формула может быть использована лишь для оценки среднего значения деформации вдоль всей оболочки. Для определения ма-

ксимальной деформации в среднем сечении следует применять формулу (10).

2. Цилиндрическая оболочка, свободно опертая по концам и нагруженная силой посередине (схема *II*). Исследование деформации оболочки при нагружении, согласно схеме *II*, производилось на тех же трубах и по той же методике, что и по схеме *I*. В отличие от схемы *I*, где имеет место концентрация деформаций в среднем сечении, в данном случае деформация сечений распределяется более равномерно вдоль всей оболочки. Величина деформации среднего сечения, естественно, значительно меньше, чем по схеме *I*, однако достаточно значительна и ее приходится принимать во внимание.

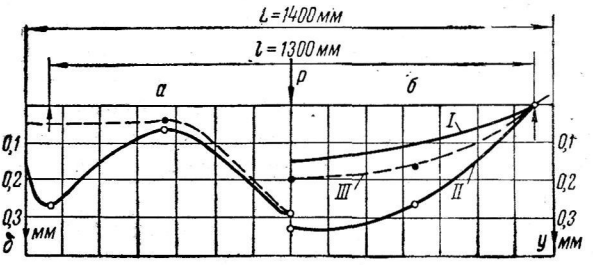


Рис. 6. Распределение деформаций вдоль оболочки

Деформация среднего сечения при нагрузке оболочки, согласно схеме *II*, производится по формуле (13). Как видно из табл. 5, эта формула дает удовлетворительные результаты.

Таблица 5

Исследование деформации оболочки при нагрузке по схеме *II*

Размер оболочки, $D_в/D_н$, *см*	Нагрузка, *кг*	Укорочение вертикального диаметра δ, *мм*		Погрешность, %
		по формуле (13)	экспериментальное	
24/30	10 800	0,116	0,108	6,9
24/25	1 500	1,96	1,84	6,12
20,3/22	5 275	1,06	0,988	6,8
18,1/24,3	10 800	0,051	0,05	1,97
18,1/22	10 800	0,186	0,18	3,23
16/20	10 800	0,126	0,119	5,55
14,6/18	10 800	1,156	0,142	9,0
10/14	10 800	0,049	0,049	—
10/12	5 275	0,124	0,128	3,23

3. Прогиб цилиндрической оболочки. Исследование цилиндрической оболочки, нагруженной посередине силой и свободно опертой по концам, как балка, показывает, что прогиб такой оболочки значительно больше вычисленного по обычной формуле сопротивления материалов. Причиной больших прогибов оболочки является местная деформация опорных сечений под действием опорных реакций.

Для иллюстрации приведем результаты испытания на изгиб трубы длиной 1400 *мм*, $D_в/D_н = 15/16$ *см*, с расстоянием между опорами $l = 1300$ *мм*. На рис. 6, *а* сплошной линией показано сплющивание трубы (уменьшение вертикального диаметра) вдоль оси. Кружочками на этой кривой показаны опытные точки. На рис. 6, *б* кривая *II* изображает изогнутую ось той же трубы, теоретическая кривая *I* построена согласно обычной формуле

$$y = \frac{Pl^3}{48EI}\left(\frac{3x}{l} - \frac{4x^3}{l^3}\right),$$

где y — прогиб в сечении на расстоянии x от левой опоры.

Из кривых видно, что на расстоянии $x = l$ опытный прогиб превышает теоретический на 150%, а посередине на 120%.

Совершенно иная картина наблюдается при установке в концевых сечениях трубы распорок, препятствующих деформации опорных сечений в вертикальном направлении. В этом случае распределение деформаций показано на рис. 6, *а* пунктиром: деформация опорного сечения резко изменилась, а среднего практически осталась той же. Это объясняется тем, что среднее сечение сравнительно далеко отстоит от опорного сечения и местная деформация, обусловленная нагрузкой P, практически не зависит от условий на опорах.

В связи с изменением условий на опорах изменилось также положение изогнутой оси. Новое положение оси, соответствующее установленным распоркам, показано на рис. 6, *б* пунктирной кривой *III*, резко приближающейся к теоретической.

Выводы

1. Выведена формула для определения деформации сечения полого цилиндра под действием двух равных и противоположных сил, направленных по диаметру. Эта формула учитывает влияние искривления образующей на деформацию сечения.

2. Приведена формула для определения деформации среднего сечения полого цилиндра, свободно опертого по концам и нагруженного силой посередине.

3. Опытные данные, полученные при испытании полых цилиндров по рассмотренным схемам, удовлетворительно согласуются с теоретическими.

4. Прогиб цилиндрической оболочки, нагруженной посередине силой и свободно опертой по концам, как балка, значительно больше вычисленного по обычной формуле сопротивления материалов. Причиной больших прогибов оболочки является местная деформация опорных сечений под действием реакций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh. Proc. Math. Soc. London 1881, v. 13.
2. Rayleigh. Proc. Roy. Soc. London 1889, v, 45.