Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXIX, вып. 3, 1961 г.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАИБОЛЬШЕГО НАТЯЖЕНИЯ ШАХТНОГО КАНАТА ЗА ВЕСЬ ПЕРИОД ПОДЪЕМА

П. А. Журавлев, А. Ф. Захаревич

Приближенное определение натяжения подъемных шахтных канатов применяется с целью преодоления двух основных трудностей, возникающих при обосновании расчета канатов на прочность. Если с известным приближением можно оправдать применение закона Гука для натяжения каната [1], принимаемого в теории за идеально упругую нить постоянного сечения, то для учета внутренних сопротивлений в канате, так же как и в прямолинейном однородном стержне, вполне обоснованной формулы нет [2]. Источник второй трудности заключен в сложной форме одного из краевых условий той задачи математической физики о продольных колебаниях упругой нити переменной длины с грузом на нижнем конце, к которой приводится определение натяжения подъемных шахтных канатов. Речь идет о верхнем конце каната, который благодаря навиванию на барабан и предполагаемому отсутствию скольжения по барабану должен иметь заданную скорость, совпадающую со скоростью точек наружной поверхности вращающегося барабана [3].

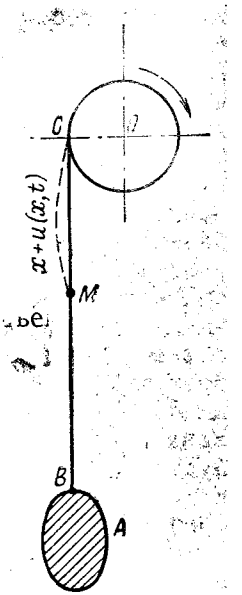


Схема подъема груза

Для преодоления указанных трудностей ограничимся моментами времени, близкими к начальному, пока влияние сил сопротивления остается малым, вследствие чего им можно пренебречь [4]. Для тех же моментов допустим, что процесс навивания каната на барабан может быть приближенно заменен процессом поднятия каната постоянной длины, верхнему концу которого C (см. рисунок) сообщается заданная вертикальная скорость. Можно показать, что дифференциальные уравнения движения груза и каната переменной длины при соответствующих начальных условиях и точном выполнении краевого условия на верхнем конце каната допускают, например, равноускоренный и равнозамедленный подъемы, а также равномерное движение без колебаний системы. Следовательно, указанное краевое условие не является непосредственно причиной появления колебаний. Такой причиной будет смена режима вращения барабана, сопровождающаяся разры-

вом тангенциального ускорения элементов каната, вступающих на барабан в момент смены режима вращения. При этом, так как канат принимается за упругую нить, сопротивляющуюся только растяжению, считаем, что изгиб каната в момент вступления на обод барабана не является причиной распространения возмущений по канату, а следовательно, и колебаний системы. Конечно, можно представить такой случай, когда этот изгиб играет какую-то роль, но теоретически учесть его трудно, ибо даже при простейшем условии отсутствия скольжения каната по поверхности барабана получается очень сложное решение задачи.

В настоящей работе при указанных допущениях определяется наибольшее натяжение каната за весь цикл трехпериодной трапецеидальной тахограммы подъема с периодом равноускоренного вращения барабана t_1, равномерного t_2, равнозамедленного t_3, $t_3 = t_1$. Попутно приводится числовая оценка погрешности, получающейся в результате замены движения каната переменной длины движением каната постоянной длины.

Пусть перед началом подъема груз свободно висел на покоящемся канате. С началом равноускоренного вращения барабана начнутся колебательные движения системы. Однако силы внутренних сопротивлений в канате постепенно гасят эти колебания, и можно предположить, что при достаточно эффективном затухании колебаний к концу равноускоренного вращения все точки вертикальной части каната и груз имеют в любой момент времени одинаковые скорости и ускорения и, следовательно, внутренние силы сопротивления проявиться не могут. При этом ускорение вертикальной части каната и груза равно тангенциальному ускорению g_1 точек поверхности барабана. С изменением режима подъема, т. е. при переходе к равномерному вращению барабана, колебательный процесс возобновляется и силы внутренних сопротивлений снова проявляются, гася эти колебания. Аналогичные соображения относятся и к двум другим сменам режима вращения барабана, согласно принятой тахограмме подъема, — к переходу на равнозамедленное вращение и к остановке барабана. Однако, как уже отмечалось, если ограничиться моментами времени, близкими к начальному моменту каждого из четырех режимов, соответствующих четырем угловым точкам тахограммы подъема, то силы внутренних сопротивлений не окажут заметного влияния на колебание системы. Поэтому при определении первых экстремальных значений натяжения каната для указанных четырех режимов подъема груза эти силы не будут учитываться, хотя они предполагаются настолько большими, что при смене режима подъема максимумы натяжения каната будут сразу же убывать с течением времени.

Дифференциальные уравнения приближенного способа и их решение. При больших высотах подъема необходимо принимать во внимание массу и вес каната.

Для какой-либо точки M каната ее расстояние MC от верхнего конца C (см. рисунок) определяется суммой двух слагаемых $x + u(x, t)$, из которых первое слагаемое x выражает нормальную (при отсутствии сил) длину рассматриваемой части MC каната, а второе $u(x, t)$ — ее деформацию (удлинение), являющуюся функцией абсциссы x, отсчитанной от точки C вниз, и времени t. Функция $u(x, t)$ является в задаче искомой. Натяжение T каната на основании закона Гука выражается через эту функцию следующим образом:

$$T = k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \qquad (1)$$

где $k = E_к F_к$ — известная постоянная [1];

$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ — относительное удлинение каната в точке M.

По условию, верхний конец каната C движется вверх, согласно уравнению $s(t) = \alpha t + \beta t^2$. При этом в начале равноускоренного вращения барабана (первый режим подъема) $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{1}{2} g_1$; в начале равномерного вращения (второй режим) $\alpha = -v$, $\beta = 0$; в начале равнозамедленного вращения (третий режим) $\alpha = -v$, $\beta = \frac{1}{2} g_1$; после остановки барабана (четвертый режим) $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Дифференциальное уравнение движения каната постоянной длины имеет вид.

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = g + c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \qquad (2)$$

где $c = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$ — скорость распространения вдоль каната прерывности того или другого порядка (ρ — масса единицы длины каната), она же равна скорости распространения звука в канате.

Первое краевое условие

$$u(x, t)|_{x=0} = 0. \qquad (3)$$

Второе краевое условие получается из дифференциального уравнения движения подвешенного к концу каната груза и после преобразований примет вид

$$c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\Big|_{x=l} = -b \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\Big|_{x=l}, \qquad (4)$$

где $b = \frac{k}{m}$ (m — масса груза);

l — нормальная длина вертикальной части каната в начале каждого из четырех режимов подъема.

Начальные условия задачи:

$$u(x, t)|_{t=0} = f_1(x) \equiv \frac{\gamma}{k}\left[(m + \rho l)x - \frac{1}{2}\rho x^2\right],$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_2(x) \equiv 0, \qquad (5)$$

причем для первого режима $\gamma = g$, для второго $\gamma = g + g_1$, для третьего $\gamma = g$, для четвертого $\gamma = g - g_1$.

Задача рассматриваемого типа была впервые предметом исследований Пуассона при помощи метода, получившего впоследствии название метода Фурье. Он дает интеграл уравнения (2) в виде бесконечного ряда по фундаментальным функциям задачи. Тот же интеграл можно представить в замкнутой форме, основываясь на идее продолжающего уравнения Сен-Венана. Мы применяем метод Пуассона — Фурье и с этой целью ищем общий интеграл уравнения (2) в форме

$$u(x, t) = T_0 X_0 + \sum_n T_n X_n, \qquad (6)$$

где T_i — функции только одного переменного t;

X_i — функции только x.

В литературе [5] приведены детали изложения; укажем только, что первое слагаемое, являющееся частным решением уравнения (2) и предназначенное для удовлетворения обоих краевых условий (3) и (4), имеет вид

$$T_0X_0 = \frac{2\beta - g}{2c^2}\left[x^2 - \frac{2}{\rho}(m + \rho l)\,x\right]. \tag{7}$$

Остальные члены ряда (6), которые должны удовлетворять тем же краевым условиям и соответствующему однородному уравнению, равны

$$T_nX_n = (A_n \sin nt + B_n \cos nt)\sin\frac{nx}{c}, \tag{8}$$

причем условие (4) дает уравнение для определения значений индекса n, по которому производится суммирование в ряде (6)

$$\nu \operatorname{tg} \nu = \zeta; \quad \nu = \frac{nl}{c}; \quad \zeta = \frac{\rho l}{m}. \tag{9}$$

Полученное трансцендентное уравнение имеет бесчисленное множество положительных корней ν_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$). Приведем приближенные значения первых двух корней

$$\nu_1 \approx \sqrt{\zeta - \frac{1}{3}\zeta^2}, \quad \nu_2 \approx \pi + \frac{\zeta}{\pi} - \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{\zeta}{\pi}\right)^3. \tag{10}$$

Каждому значению корня ν_i соответствует определенное значение характеристического числа $n_i = \frac{\nu_i c}{l}$.

Для определения коэффициентов A_n и B_n надо воспользоваться начальными условиями (5) задачи. Опуская выкладки, в окончательном результате получаем

$$A_n = 0; \quad B_n = \delta\,\frac{4g_1}{2\nu + \sin 2\nu}\left[m \sin \nu + \frac{\rho l}{\nu}(1 - \cos \nu)\right]\frac{c}{kn}, \tag{11}$$

где $\delta = -1$ для первого и четвертого режимов подъема и $\delta = +1$ для второго и третьего режимов.

Сохраним в разложении (6) для $u(x, t)$ только первые три члена бесконечного ряда и, принимая во внимание формулы (7), (8), (11), перепишем его следующим образом:

$$u(x, t) = \frac{2\beta - g}{2c^2}\left[x^2 - \frac{2}{\rho}(m + \rho l)\,x\right] + B_{n_1}\cos n_1 t \sin\frac{n_1 x}{c} + B_{n_2}\cos n_2 t \sin\frac{n_2 x}{c}.$$

Теперь формула (1) для натяжения каната в интервале $0 \leqslant x \leqslant l$ примет вид

$$T = k\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = (g - 2\beta)\,[m + \rho(l - x)] + \alpha_{n_1}\cos n_1 t \cos\frac{n_1 x}{c} + \alpha_{n_2}\cos n_2 t \cos\frac{n_2 x}{c},$$

где

$$\alpha_{n_1} = \delta\,\frac{4g_1}{2\nu_1 + \sin 2\nu_1}\left[m \sin \nu_1 + \frac{\rho l}{\nu_1}(1 - \cos \nu_1)\right];$$

$$\alpha_{n_2} = \delta\,\frac{4g_1}{2\nu_2 + \sin 2\nu_2}\left[m \sin \nu_2 + \frac{\rho l}{\nu_2}(1 - \cos \nu_2)\right]. \tag{12}$$

При $x = 0$ получим значение натяжения каната в наиболее опасном его сечении — точке C набегания каната на барабан

$$T|_{x=0} = (g - 2\beta)(m + \rho l) + \alpha_{n_1} \cos n_1 t + \alpha_{n_2} \cos n_2 t. \qquad (13)$$

При $x = l$ натяжение каната в точке B подвеса груза

$$T|_{x=l} = (g - 2\beta) m + \alpha_{n_1} \cos \nu_1 \cos n_1 t + \alpha_{n_2} \cos \nu_2 \cos n_2 t. \qquad (14)$$

В формулах (13) и (14) для первого режима $\beta = -\frac{1}{2} g_1$, для второго и четвертого $\beta = 0$ и для третьего $\beta = \frac{1}{2} g_1$.

Первые слагаемые этих формул выражают натяжения каната при отсутствии колебаний системы. В первом и третьем режимах подъема они определяются весом и частью сил инерции каната и груза, а во втором и четвертом — только собственным весом системы. Второе и третье слагаемые представляют дополнительную (для первого и третьего режимов) или всю (для второго и четвертого режимов) динамическую нагрузку, получающуюся за счет колебаний системы. Каждая из составляющих изменяется по гармоническому закону с частотами n_1, n_2 и амплитудами α_{n_1}, α_{n_2} для точки C и $\alpha_{n_1} \cos \nu_1$, $\alpha_{n_2} \cos \nu_2$ для точки B каната. Как показывают вычисления, амплитуда первой гармоники во много раз больше, а частота значительно меньше амплитуды и частоты второй гармоники.

При сложении последних получается функция с рядом экстремальных значений, не изменяющаяся по гармоническому закону. Однако общий вид кривой $T(t)$ определяется главным образом первой гармоникой. Интересны наименьший минимум или наибольший максимум функции $T(t)$, которые имеют место в первые моменты времени, начиная с $t > 0$, каждого из четырех режимов подъема. Указанные моменты времени можно определить из уравнений:

для точки C

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{x=0} = 0 \text{ или } \frac{n_1 \alpha_{n_1}}{n_2 \alpha_{n_2}} \sin n_1 t + \sin n_2 t = 0; \qquad (15)$$

для точки B

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{x=l} = 0 \text{ или } \frac{n_1 \alpha_{n_1} \cos \nu_1}{n_2 \alpha_{n_2} \cos \nu_2} \sin n_1 t + \sin n_2 t = 0. \qquad (16)$$

Так как $-1 \leqslant \sin n_2 t \leqslant +1$, то корни уравнений (15) и (16) заключаются в пределах, определяемых уравнениями:

для точки C

$$\frac{n_1 \alpha_{n_1}}{n_2 \alpha_{n_2}} \sin n_1 t = \pm 1;$$

для точки B

$$\frac{n_1 \alpha_{n_2} \cos \nu_1}{n_2 \alpha_{n_2} \cos \nu_2} \sin n_1 t = \pm 1.$$

Для сужения этих пределов можно положить $\sin n_1 t = 0$ и дальше определять значения корней, пользуясь обычными приемами приближенного решения уравнений.

Пример. Рассмотрим численный пример, исходные данные для которого см. на стр. 13. При этих данных длина каната l в начале первого режима подъема 487 *м*, в начале второго режима 415 *м*, в начале третьего 87 *м*, в момент остановки барабана 15 *м*.

Определим приближенным способом натяжения каната в точках B и C для начальных моментов каждого из четырех режимов подъема.

Результаты вычислений по формулам (9), (10), (12), (13), (14) с учетом условий (15), (16) сведены в табл. 1 и 2. Сравнение чисел столбцов 3 и 4 показывает, что в рассматриваемом примере удержание третьего члена в ряду (6) и в формулах (13), (14) приводит к незначительным алгебраическим прибавкам при вычислении натяжения каната.

Таблица 1

Результаты вычислений для точки C

Режим подъема	t, сек	$(g-2\beta)(m+\rho l)$	$\alpha_{n_1}\cos n_1 t$	$\alpha_{n_2}\cos n_2 t$	T, кг
	1	2	3	4	5
Первый	0	9101,5	—780,67	—36,09	8284,7
$l=487$ м	0,74725	9101,5	+759,28	+21,3	9882,1
$\zeta=0{,}29863$	1,3575	9101,5	—771,91	—30,85	8298,7
Второй	0	7978,8	+760,74	+31,12	8770,7
$l=415$ м	0,6555	7978,8	—757,47	—28,55	7192,8
$\zeta=0{,}25448$	1,3112	7978,8	+747,56	+21,43	8747,8
Третий	0	6016,6	+671,46	+6,89	6695,0
$l=87$ м	0,2712	6016,6	—667,11	—4,09	5345,4
$\zeta=0{,}053349$	0,5682	6016,6	+670,25	+6,24	6693,1
Четвертый	0	6418,7	—652,31	—1,21	5765,2
$l=15$ м	0,11636	6418,7	+652,28	+1,19	7072,2
$\zeta=0{,}0091981$	0,23272	6418,7	—652,17	—1,14	5765,4

Таблица 2

Результаты вычислений для точки B

Режим подъема	t, сек	$m(g-2\beta)$	$\alpha_{n_1}\cos\nu_1\cos n_1 t$	$\alpha_{n_2}\cos\nu_2\cos n_2 t$	T, кг
	1	2	3	4	5
Первый	0	7008,6	—678,04	+35,94	6366,5
$l=487$ м	0,6777	7008,6	+675,88	+34,88	7719,4
$\zeta=0{,}29863$	1,4297	7008,6	—667,53	—30,42	6310,6
Второй	0	6360	+673,86	—31,02	7002,8
$l=415$ м	0,5948	6360	—659,51	—23,04	5677,4
$\zeta=0{,}25448$	1,2514	6360	+669,88	+29,02	7058,9
Третий	0	5711,9	+653,94	—6,89	6359
$l=87$ м	0,28415	5711,9	—653,63	—6,73	5051,5
$\zeta=0{,}053349$	0,55490	5711,9	+651,39	+5,47	6368,8
Четвертый	0	6360	—649,32	+1,21	5711,9
$l=15$ м	0,11411	6360	+648,49	+0,69	7009,2
$\zeta=0{,}0091981$	0,23042	6360	—648,76	—0,89	5710,4

Сравним данные, полученные приближенным способом, с данными, полученными точным способом, который был применен к началу равно-

мерного вращения барабана (второй режим подъема груза). При точном способе учитывают процесс навивания каната на барабан, но тоже пренебрегают влиянием внутренних сил сопротивлений в канате для промежутка времени, соседнего с начальным моментом.

По приближенному способу значения t, соответствующие первым трем экстремальным значениям натяжения каната для второго режима, равны $t_0 = 0$, $t_{\text{I}} = 0{,}6555$ *сек*, $t_{\text{II}} = 1{,}311$ *сек*. Им соответствуют числовые значения амплитуд изменения динамической нагрузки: $\alpha_0 = 792$ *кг*, $\alpha_{\text{I}} = -786$ *кг*, $\alpha_{\text{II}} = 769$ *кг*.

По точному способу соответственно имеем: $t_0 = 0$, $t_{\text{I}}' = 0{,}6325$ *сек*, $t_{\text{II}}' = 1{,}2562$ *сек*, $\alpha_0' = 813$ *кг*, $\alpha_{\text{I}}' = -717$ *кг*, $\alpha_{\text{II}}' = 807$ *кг*.

Экстремальные величины натяжений каната в точке C, вычисленные приближенным способом для второго режима, принимают значения:

$$T_0 = mg + \rho gl + \alpha_0 = 6360 + 1619 + 792 = 8771 \text{ кг};$$

$$T_{\text{I}} = mg + \rho gl + \alpha_{\text{I}} = 7979 - 786 = 7193 \text{ кг};$$

$$T_{\text{II}} = mg + \rho gl + \alpha_{\text{II}} = 7979 + 796 = 8748 \text{ кг}.$$

Вычисленные точным способом

$$T_0' = 8792 \text{ кг}, \quad T_{\text{I}}' = 7232 \text{ кг}, \quad T_{\text{II}}' = 8727 \text{ кг}.$$

Разность натяжений, вычисленных приближенным и точным способами, следующая: $T_0' - T_0 = 21$ *кг*; $T_{\text{I}}' - T_{\text{I}} = 39$ *кг*; $T_{\text{II}}' - T_{\text{II}} = -21$ *кг*. Погрешность составляет меньше 1% от точных значений натяжений каната.

Найдем еще разность моментов времени, соответствующих экстремальным значениям натяжений каната: $t_{\text{I}} - t_{\text{I}}' = 0{,}023$ *сек*, $t_{\text{II}} - t_{\text{II}}' = 0{,}055$ *сек*.

Разность $t_{\text{II}} - t_{\text{I}} = \Delta t$ можно назвать полупериодом мгновенного гармонического колебания или гармонического колебания в данный момент (вблизи начального момента), так же как и разность $t_{\text{II}}' - t_{\text{I}}' = (\Delta t)'$. Таким образом, можно оценить погрешность при вычислении полупериодов: $\Delta t = 1{,}311 - 0{,}6555 = 0{,}656$ *сек*, $(\Delta t)' = 1{,}2562 - 0{,}6325 = 0{,}624$ *сек*. Погрешность составляет 5%.

Выводы

Использованный в настоящей работе приближенный метод определения натяжений в канате дает вполне удовлетворительные результаты и выгодно отличается от более точного метода простотой вычислений. Он может быть применен также и для других случаев смены режима вращения барабана. При приближенном методе во многих случаях, даже для сравнительно больших высот подъема, можно ограничиться только первой гармоникой в формулах (13), (14) для натяжения каната.

В пределах $0 < \zeta \leqslant 1{,}2$ имеем $|\alpha_{n_2}| \leqslant 0{,}107\,|\alpha_{n_1}|$.

Сопоставление числовых результатов табл. 1 и 2 показывает, что в случае больших внутренних сопротивлений в канате наибольшим натяжением при трапецеидальной тахограмме подъема будет натяжение каната в точке набегания каната на барабан для начала подъема груза, $T_{\max} = 9882$ *кг*. Это натяжение превышает статическую нагрузку в той же точке на 1624 *кг*, т. е. на 19,6% и больше максимального натяжения в точке подвеса груза на 28%. Динамический коэффициент

безопасности в рассмотренном примере $k_{дин} = \frac{60\,600}{9882} = 6{,}1$, т. е. на 17,6% меньше статического коэффициента.

На основании изложенного можно рекомендовать следующую расчетную формулу для определения наибольшего натяжения каната при подъеме груза, который перед подъемом свободно висел на покоящемся канате:

$$T_{max} = (g + g_1)(m + \rho l) + |\alpha_{n_1}|$$

и в окончательном виде

$$T_{max} = mg\left[1 + \zeta + \frac{g_1}{g}(2 + 1{,}67\zeta)\right].$$

Рекомендуемая формула является обобщением формулы Г. Н. Савина [4], полученной для $g_1 = 0{,}1g \approx 1$ *м/сек*^{2}. Г. Н. Савин исходил из тех же приближенных уравнений, но полученных другим путем — путем пренебрежения в точных уравнениях задачи членами, содержащими множителем $\frac{1}{c^2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Динник А. Н. О работе по теории упругости. Прикладная математика и механика, т. I, № 2, 1933, стр. 335.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ НКТП, 1935, стр. 128—129.
3. Неронов Н. П. Об упругих деформациях в подъемном канате. Прикладная математика и механика. Новая серия, т. I, № 1, стр. 91—116, 1937.
4. Савин Г. Н. Динамические усилия в подъемном канате при снятии груза с неподвижного основания. ДАН УССР, 1954, № 2.
5. Неронов Н. П. Определение напряжений в подъемных канатах для больших высот подъема и спуска. Записки ЛГИ, т. XX, стр. 88, 94—97, 1948.