Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXIX, вып. 3, 1961 г.

К ЧИСЛОВОЙ ОЦЕНКЕ НАИБОЛЬШЕГО НАТЯЖЕНИЯ ШАХТНОГО ПОДЪЕМНОГО КАНАТА В ТОЧКЕ ПОДВЕСА ГРУЗА ПРИ РАВНОМЕРНОМ ВРАЩЕНИИ БАРАБАНА

П. А. Журавлев, А. Ф. Захаревич

Числовая оценка натяжения каната имеет большое практическое значение, но далека еще от своего полного завершения. В настоящей работе предпринята попытка оценить натяжение каната в точке подвеса груза в период равномерного вращения барабана при условии, что этому периоду предшествовал период равноускоренного вращения барабана, сопровождавшийся с самого начала подъема груза колебательным движением системы. Вследствие действия сил внутреннего сопротивления эти колебания будут затухающими, и к концу периода равноускоренного вращения барабана все точки вертикальной части каната и груз получат одинаковые ускорения, равные тангенциальному ускорению точек поверхности барабана. В начале равномерного вращения барабана ввиду изменения режима вращения колебания системы возобновляются и опять проявляются силы внутренних сопротивлений. Однако их можно не учитывать, если рассматривать движение системы в промежутке времени, близком к начальному.

Для определения натяжения каната используется расчетная формула [1], основанная на разбиении длительности t_2 равномерного вращения барабана на n промежутков времени $(\Delta t)_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Длина каната в каждом промежутке считается неизменной, но получающей малое приращение при переходе к соседнему промежутку. Поэтому перемещение любого сечения каната представляется в виде бесконечного ряда, каждый член которого является гармоническим колебанием. Если отбросить все обертоны и сохранить только основной тон, то его период можно приближенно вычислить по формуле Рэлея с учетом массы и веса не только груза, но и каната

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{k}\left(m + \frac{1}{3} m_1\right)}; \quad l = l_0 - vt,$$

где l — длина свесившейся части каната в начале рассматриваемого промежутка времени;

l_0 — значение l в начале равномерного вращения барабана;

v — скорость на ободе барабана в период его равномерного вращения;

m — масса груза;

$m_1 = \rho l$ — масса каната;

ρ — масса единицы длины каната;

k — коэффициент жесткости каната,

$$k = E_к F_к;$$

$E_к$ — модуль упругости каната (вычисляется по приближенной формуле А. Н. Динника [3];

$F_к$ — площадь сечения каната.

Для определения n промежутки времени $(\Delta t)_i$ полагаются равными полупериодам соответствующих гармонических колебаний [1]:

$$(\Delta t)_1 = \pi \sqrt{\frac{l_0}{k}\left(m + \frac{1}{3}\rho l_0\right)};$$

$$(\Delta t)_2 = \pi \sqrt{\frac{l_1}{k}\left(m + \frac{1}{3}\rho l_1\right)};$$

. . . . . .

$$(\Delta t)_n = \pi \sqrt{\frac{l_{n-1}}{k}\left(m + \frac{1}{3}\rho l_{n-1}\right)},$$

где

$$l_i = l_0 - v\left[(\Delta t)_1 + (\Delta t)_2 + \ldots + (\Delta t)_i\right].$$

Заметим, что $(\Delta t)_i$ малы вследствие большого значения коэффициента k. Тогда число n определится неравенством

$$(\Delta t)_1 + (\Delta t)_2 + \ldots + (\Delta t)_n \leqslant t_2 \leqslant (\Delta t)_1 + (\Delta t)_2 + \ldots + (\Delta t)_{n+1}.$$

При этом правиле разбиения длительности t_2 равномерного вращения барабана при подъеме груза на ряд малых промежутков времени $(\Delta t)_i$ в каждом из указанных промежутков будет возможно получить только одно экстремальное значение натяжения каната.

Представим натяжение каната в точке подвеса груза в виде суммы двух слагаемых — веса груза и силы инерции груза

$$T_к = T_{ст} + T_{дин} = mg + T_{дин}. \qquad (1)$$

Обозначим через α_1, α_2, ... абсолютные значения амплитуд изменения динамической нагрузки в соответствующих интервалах $(\Delta t)_1$, $(\Delta t)_2$, ...

После определения n, α_1, α_2 искомое максимальное натяжение каната, при условии пренебрежения внутренними сопротивлениями в нем, определится по формуле [1]

$$T_к \approx mg + \alpha_1 + n(\alpha_2 - \alpha_1); \qquad (2)$$

$$n \approx \frac{t_2}{(\Delta t)_{iср}}, \qquad (3)$$

где $(\Delta t)_{iср}$ — среднее интегральное значение функции $\frac{1}{2}\tau$,

$$(\Delta t)_{iср} = \frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} \pi \sqrt{\frac{1}{k}(l_0 - vt)\left[m + \frac{1}{3}\rho(l_0 - vt)\right]}\,dt. \qquad (4)$$

Целесообразно оценить степень этого приближения и дать точное определение числа n при помощи следующего геометрического метода.

Для любого t полупериод Δt выражается формулой

$$\Delta t = \pi \sqrt{\frac{1}{k}(l_0 - vt)\left(m + \frac{1}{3}\rho(l_0 - vt)\right)},$$

которая может быть преобразована

$$\frac{(t-c)^2}{a^2} - \frac{(\Delta t)^2}{b^2} = 1,$$

где

$$a = \frac{3m}{2\rho v}; \quad b = \frac{\pi m \sqrt{3}}{2\sqrt{k\rho}};$$

$$c = \frac{l_0}{v} + \frac{3m}{2\rho v}.$$

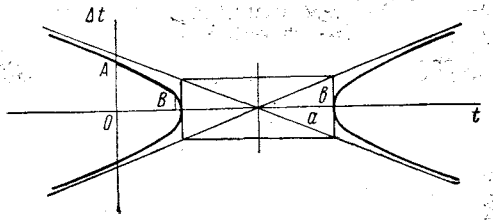


Рис. 1. График полупериодов

Это и есть уравнение гиперболы, отнесенное к осям симметрии со смещенным центром (рис. 1).

В рассматриваемой задаче имеет значение только часть AB левой ветви этой гиперболы.

Для определения числа n отложим по оси абсцисс начальную ординату $(\Delta t)_1$, получим на оси ординат значение $(\Delta t)_2$, которое откладываем за отрезком $(\Delta t)_1$ по оси абсцисс и получаем $(\Delta t)_3$ и т. д., пока не будет исчерпан промежуток времени t_2 (рис. 2).

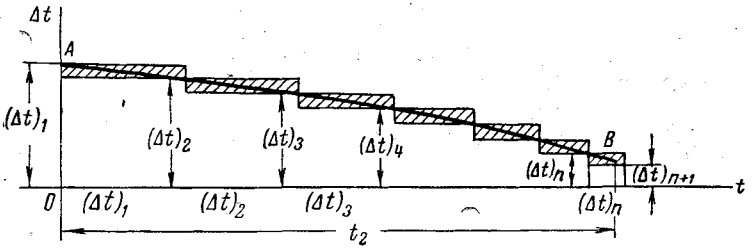


Рис. 2. Графическое определение числа полупериодов

Обозначим через S площадь, ограниченную участком гиперболы, осью абсцисс и двумя крайними ординатами (рис. 2). Тогда формула (4) перепишется так:

$$(\Delta t)_{i\text{ср}} = \frac{S}{t_2}. \tag{5}$$

На основании рис. 2 очевидно неравенство

$$(\Delta t)_1(\Delta t)_2 + (\Delta t)_2(\Delta t)_3 + \ldots + (\Delta t)_n(\Delta t)_{n+1} < S < (\Delta t)_1^2 + (\Delta t)_2^2 + \ldots + (\Delta t)_n^2. \tag{6}$$

Если положить

$$t_2 \approx (\Delta t)_1 + (\Delta t)_2 + \ldots + (\Delta t)_n = n(\Delta t)_{i\text{ср}},$$

то для $(\Delta t)_{i\text{ср}}$ получим оценку

$$\frac{S}{t_2} < (\Delta t)_{i\text{ср}} < \frac{S}{t_2} \frac{1}{1 - \frac{(\Delta t)_1 - (\Delta t)_{n+1}}{t_2}}. \tag{7}$$

Следовательно, в силу малого отличия знаменателя правой части от единицы, $(\Delta t)_{i\text{ср}}$ незначительно отличается от приведенного выше среднего интегрального значения (4).

ЛГИ

Определим амплитуды α_1 и α_2 динамических натяжений каната. Для этого надо знать зависимость $T_к$ от t хотя бы в начале равномерного вращения барабана, когда силы внутренних сопротивлений могут не учитываться. Соответствующий алгоритм определения зависимости $T_к$ от t был указан Н. П. Нероновым [2] и применен для вывода расчетных формул Д. К. Куликовым и В. Ф. Проскуриным. Так как эти формулы громоздки, применим их только в следующем числовом примере (исходные данные для примера см. на стр. 13).

Выбранный канат диаметром 34 *мм* состоит из 114 проволок толщиной 2,2 *мм* с сопротивлением разрыву 140 000 *кг/см*^{2}, сумма разрывающих усилий всех проволок $Q = 60\,600$ *кг*. Поэтому запас прочности (статический коэффициент безопасности)

$$k_{ст} = \frac{Q}{p + q(h + h_1)} = \frac{60\,600}{6360 + 3{,}9(472 + 15)} = 7{,}4.$$

Таблица значений $T_к$ для девяти моментов времени получена в результате применения очень сложных аналитических выражений для восьми интервалов времени, различных на каждом из интервалов, при условии сохранения непрерывности в местах их сопряжения. Сложность этих выражений исключает возможность их использования для нахождения интересующих нас экстремумов. Поэтому выразим натя-

Натяжения $T_к$ в точке подвеса груза (для приведенного числового примера)

t, *сек*	t_0 0,0978	t_1 0,292	t_2 0,486	t_3 0,678	t_4 0,869	t_5 1,059	t_6 1,249	t_7 1,437	t_8 1,624
T, *кг*	T_0 7008	T_1 6492	T_2 5904	T_3 5748	T_4 6153	T_5 6771	T_6 7044	T_7 6813	T_8 6196

Примечание. Вычисления по расчетным формулам работы [2] произведены Д. К. Куликовым, В. Ф. Проскуриным, А. Ф. Захаревичем и П. А. Журавлевым.

жение в виде полинома 8-й степени, приближенно представляющего искомую функцию. Так как известные численно ординаты графика неравностоящие, то для построения интересующего нас полинома была применена формула Ньютона для неравных промежутков, выраженная через так называемые разделенные разности [3]. Этот полином имеет следующее выражение:

$$T_к = 7008{,}3 - 2654{,}9\beta_0 - 985{,}25\beta_0\beta_1 + 11632\beta_0\beta_1\beta_2 - $$
$$- 10854\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3 - 4181{,}4\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 + 10726\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5 +$$
$$+ 53{,}782\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\beta_6 - 15736\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\beta_6\beta_7,$$

где

$$\beta_i = t - t_i.$$

По полученной формуле вычислены дополнительные значения $T_к$, по возможности близкие к экстремальным точкам, а затем найдены следующие моменты времени и значения $T_к$ в экстремальных точках:

при $t' = 0{,}636$ *сек* $\quad T_к' = 5732$ *кг*,

при $t'' = 1{,}24$ *сек* $\quad T_к'' = 7046$ *кг*.

График зависимости $T_к$ от t (рис. 3) начинается горизонтальным участком, который соответствует промежутку времени от $t = 0$ до $t_0 =$

$= 0{,}09781$ *сек*. За этот промежуток времени волна возмущения, вызванная сменой равноускоренного вращения барабана на равномерное, дойдет от точки набегания каната на барабан до точки подвеса груза.

Так как указанный промежуток времени мал по сравнению со всем периодом равномерного вращения барабана t_2, им можно пренебречь при определении числа n полупериодов, входящих в формулу (2). По этой же причине не учитывается и изменение начальной длины каната, которая принимается равной l_0.

Сравнение первых полупериодов, найденных при помощи графиков зависимости $T_к$ от t для точки C набегания каната на барабан [4] и для точки B подвеса груза показывает, что для первой точки он равен 0,624 *сек*, для второй 0,604 *сек*. Кроме того, сравнение этих графиков показывает, что первый минимум натяжения каната в точке подвеса груза наступает несколько позже, чем в точке набегания каната на барабан, а первый максимум несколько раньше.

Возвращаясь к формуле (1) для $T_к$ и зная для найденных нами экстремальных точек $T_{ст}$ и $T_к$, определим

$$\alpha_1 = 6360 - 5732 = 628 \ кг;$$

$$\alpha_2 = 7046 - 6360 = 686 \ кг.$$

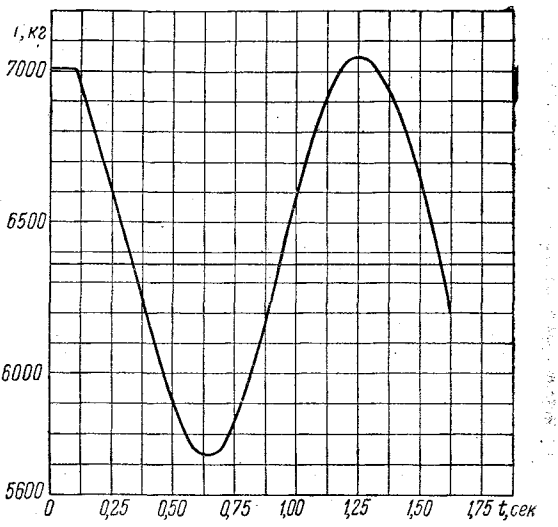


Рис. 3. Зависимость натяжения от времени

Для определения числа n полупериодов гармонических колебаний при равномерном вращении барабана вычислим сначала длительность t_2 последнего.

Обозначая соответствующую величину подъема груза s_2, имеем

$$t_2 = \frac{s_2}{v} = \frac{h - s_1 - s_3}{v} = 27{,}3 \ сек.$$

Далее, по формуле (4)

$$(\Delta t)_{icp} = 0{,}477 \ сек.$$

После этого формула (3) дает

$$n = \frac{t_2}{(\Delta t)_{icp}} \approx 58.$$

Остается внести результаты вычислений в расчетную формулу (2) и тогда получим

$$T_к = 6360 + 3992 = 10\,352 \ кг.$$

Заметим, что аналогичное наибольшее натяжение каната в точке C навивания его на барабан при тех же исходных числовых данных равно [4]

$$T_к = 12\,636 \ кг.$$

Полученный результат сильно преувеличен ввиду пренебрежения внутренними сопротивлениями в канате. Если внутренние сопротивления проявляются настолько эффективно, что $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n$, то наибольшее натяжение каната будет иметь место в конце второго полупериода. Это натяжение с некоторым преувеличением можно принять равным

$$T_к = mg + \alpha_1 = 6360 + 628 = 6988 \ кг.$$

Однако в рассмотренном числовом примере, как видно из таблицы, наибольшее натяжение каната $T_к = 7008$ *кг* и имеет место в самом начале периода равномерного вращения барабана.

В этом случае

$$k_{дин} = \frac{60\,600}{7008} = 8{,}6.$$

При менее эффективных внутренних сопротивлениях для определения максимального натяжения каната следует воспользоваться другими расчетными формулами [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Неронов Н. П. О максимальных натяжениях в подъемном шахтном канате при нормальном режиме подъема. Изв. вузов. «Горный журнал», 1959, № 11.
2. Динник А. Н. О работе по теории упругости. Прикладная математика и механика, т. I, № 2, 1933, стр. 335.
3. Уиттекер Э. и Робинсон Г. Математическая обработка результатов наблюдений. ОНТИ, 1935, стр. 65—67.
4. Журавлев П. А., Захаревич А. Ф. К вопросу о числовой оценке максимальных натяжений в подъемном шахтном канате при нормальном режиме подъема. Изв. вузов. «Горный журнал», 1959, № 11.