Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXIX, вып. 3, 1961 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ШАХТНОМ ПОДЪЕМНОМ КАНАТЕ ДЛЯ ТОЧКИ ПОДВЕСА ГРУЗА [1]

Н. П. Неронов

Ограничимся нахождением равнодействующей T внутренних сил в нижнем сечении каната, придавая формуле для определения нормального растягивающего напряжения σ в упомянутом сечении значение только приближенной характеристики соответствующего напряженного состояния [1].

Сохраняем обозначения и постановку задачи согласно [2]:

m — масса груза A (рис. 1);
ρ — масса единицы длины каната;
l_0 — нормальная длина вертикальной части BC каната в начальный момент времени;
g — ускорение свободного падения;
v — постоянная скорость точек на поверхности барабана в период равномерного вращения;
c — скорость распространения прерывности по канату,

$$c = \sqrt{\frac{k}{\rho}}.$$

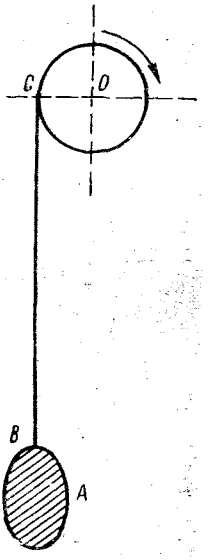


Рис. 1

Схема подъема груза показана на рис. 1. Рассмотрим случай равномерного вращения барабана и предположим, что этому периоду вращения предшествовал период равноускоренного вращения с постоянным ускорением g_1 всех точек каната, равным тангенциальному ускорению точек на поверхности барабана.

Рассмотрим ряд интервалов $\left(c > v, \quad r = \frac{c-v}{c+v} < 1\right)$:

$$(-l_0,\ l_0);\quad (l_0,\ l_0 + 2l_0 r);\quad (l_0 + 2l_0 r,\ l_0 + 2l_0 r + 2l_0 r^2);\ldots$$

$$\ldots\left\{l_0\left[\frac{2(1-r^i)}{1-r} - 1\right],\quad l_0\left[\frac{2(1-r^{i+1})}{1-r} - 1\right]\right\},\ldots;$$

[1] Определение напряжений в шахтном подъемном канате для наиболее опасного сечения каната в точке его набегания на направляющий шкив будет опубликовано в очередном томе Записок ЛГИ.

Искомая функция T представится в i-м интервале формулой

$$T_i = 2k\Phi_i''(ct), \tag{1}$$

выражающей закон Гука для каната ($i=0, 1, 2, 3, \ldots$). Здесь

$$\Phi_i''(z) = K_i + \sum_{j=0}^{i-1} K_i^j exp\left\{\frac{\lambda}{rj}\left[2l_0\frac{1-r^{j+1}}{1-r} - l_0(1+r^j) - z\right]\right\}. \tag{2}$$

Формула для коэффициента $K_i (i \geqslant 0$

$$K_i = \frac{m}{2k}\left[g + g_1(-r^{-1})^i\right]. \tag{3}$$

Коэффициенты с верхним нулевым индексом определяются на основе непрерывности функции $\Phi''(z)$ при помощи следующего рекуррентного соотношения ($2 \leqslant j \leqslant i$):

$$(K_j^{(0)} - K_{j-1}^{0)})\, exp\left[-\lambda\left(2l_0\frac{1-r^j}{1-r} - l_0\right)\right] =$$

$$= (-1)^{j-1}\frac{mg_1(1+r)}{2krj}\frac{(1+r)(1+r^2)\ldots(1+r^{j-1})}{(1-r)(1-r^2)\ldots(1-r^{j-1})}. \tag{4}$$

Остальные коэффициенты вычисляются с помощью равенства ($1 \leqslant j \leqslant i-1$)

$$K_i^{(j)} = \frac{(1+r^{j-1})(1+r^{j-2})\ldots(1+r^2)}{(1-r^j)(1-r^{j-1})\ldots(1-r^2)(1-r)} K_{i-j}^{(0)}. \tag{5}$$

Обозначим через $E_к$ модуль упругости для каната и через F общую площадь поперечных сечений всех его проволок. Тогда коэффициент k, входящий в формулу (1), будет равен

$$k = E_к F_к; \quad F_к = \frac{F}{\cos\varphi\cos\psi}. \tag{6}$$

Модуль упругости $E_к$ для канатов двойной свивки может быть вычислен по приближенной формуле А. Н. Динника [3]

$$E_к = E\cos^4\varphi\cos^4\psi, \tag{7}$$

где E — модуль Юнга для материала проволоки (стали);

φ — угол наклона пряди к оси каната;

ψ — угол наклона проволок к оси пряди;

$$E = 2{,}1 \cdot 10^6\ кг/см^2. \tag{8}$$

Опытная формула (8), в общем согласуясь со статическими экспериментами, дает несколько преувеличенное значение для $E_к$, доходящее в некоторых случаях до 10%. Статический модуль упругости для каната меньше динамического модуля упругости [5]. Разница между этими модулями менялась от 5 до 18%, при этом значение динамического модуля оставалось практически постоянным, а статического возрастало с увеличением нагрузки и приближалось к значению динамического.

Вычислим функцию T_i для различных интервалов изменения времени t. Обозначим через T_i' и T_i'' соответственно начальное и конечное

значения функции T_i для i-го интервала. Из соображений непрерывности имеем

$$T_i' = T_{i-1}''; \quad T_i'' = T_{i+1}'. \tag{9}$$

Нулевой интервал ($i=0$). Введем обозначение

$$z = ct. \tag{10}$$

При изменении времени t в пределах нулевого интервала

$$0 \leqslant z = ct \leqslant l_0 \tag{11}$$

натяжение T_0 каната в точке подвеса остается постоянным:

$$T_0 = m(g + g_1). \tag{12}$$

Первый интервал ($i=1$). Границы первого интервала

$$l_0 \leqslant r = ct \leqslant l_0 + 2l_0 r. \tag{13}$$

Натяжение каната

$$T_1 = m\left(g - \frac{g_1}{r}\right) + mg_1 \frac{1+r}{r} e^{\lambda(l_0 - z)}, \tag{14}$$

где

$$\lambda = \frac{\rho}{m}. \tag{15}$$

Полагая в равенстве (14) $z = l_0$ и $z = l_0 + 2l_0 r$, имеем

$$T_1' = T_0, \quad T_1'' = m\left(g - \frac{g_1}{r}\right) + mg_1 \frac{1+r}{r} e^{-\varkappa r}, \tag{16}$$

где

$$\varkappa = 2\lambda l_0. \tag{17}$$

Второй интервал ($i=2$). Границы второго интервала

$$l_0 + 2l_0 r \leqslant z = ct \leqslant l_0 + 2l_0 r + 2l_0 r^2. \tag{18}$$

Натяжение каната

$$T_2 = m\left(g + \frac{g_1}{r^2}\right) - mg_1 \frac{1+r}{r^2} \frac{1+r}{1-r} e^{\lambda l_0 (1+2r) - \lambda z} +$$

$$+ mg_1 \frac{1+r}{r} e^{\lambda(l_0 - z)} + 2mg_1 \frac{1}{1-r} \frac{1+r}{r} e^{2\lambda l_0 + \frac{\lambda}{r}(l_0 - z)} \tag{19}$$

Полагая здесь $r = l_0 + 2l_0 r$ и $z = l_0 + 2l_0 r + 2l_0 r^2$, соответственно имеем $T_2' = T_1''$:

$$T_2'' = m\left(g + \frac{g_1}{r^2}\right) + mg_1 \frac{1+r}{r} \frac{1}{1-r}\left[-\frac{1+r}{r} e^{-\varkappa r^2} + 2e^{-\varkappa r}\right] +$$

$$+ mg_1 \frac{1+r}{r} e^{-\varkappa r(1+r)}. \tag{20}$$

Однако практически r очень близко к единице и малая разность $1-r$ входит в формулы как делитель. Поэтому вводим обозначение

$$\varepsilon = 1 - r \tag{21}$$

и в выражении (21) для T_2'' разложим соответствующие функции в ряд Маклорена по целым положительным степеням малого параметра ε.

Удерживая в окончательном результате только слагаемые первого порядка малости, будем иметь

$$T_2'' = m\left(g + \frac{g_1}{r^2}\right) + \frac{mg_1(1+r)}{r} e^{-\varkappa r(1+r)} -$$

$$- mg_1 \frac{1+r}{r^2} e^{-\varkappa} [1 + 2\varkappa + \varepsilon\varkappa(3\varkappa - 2)]. \qquad (22)$$

Третий интервал ($i=3$). Границы третьего интервала

$$l_0 + 2l_0 r + 2l_0 r^2 \leqslant z = ct \leqslant l_0 + 2l_0 r + 2l_0 r^2 + 2l_0 r^3. \qquad (23)$$

Натяжение каната

$$T_3 = m\left(g - \frac{g_1}{r^3}\right) + mg_1 \frac{1+r}{r^3} \frac{(1+r)(1+r^2)}{(1-r)(1-r^2)} e^{\lambda l_0(1+2r+2r^2)-\lambda z} -$$

$$- mg_1 \frac{1+r}{r^2} \frac{1+r}{1-r} e^{\lambda l_0(1+2r)-\lambda z} + mg_1 \frac{1+r}{r} e^{\lambda l_0 - \lambda z} -$$

$$- 2mg_1 \frac{1}{1-r} \frac{1+r}{r^2} \frac{1+r}{1-r} e^{2\lambda l_0(1+r)+\frac{\lambda}{r}(l_0-z)} + 2mg_1 \frac{1}{1-r} \frac{1+r}{r} e^{2\lambda l_0 + \frac{\lambda}{r}(l_0-z)} +$$

$$+ 2mg_1 \frac{1+r}{(1-r)(1-r^2)} \frac{1+r}{r} e^{2\lambda l_0 + \frac{\lambda}{r^2}[l_0(1+2r)-z]}. \qquad (24)$$

Произведя подстановку $z = l_0 + 2l_0 r + 2l_0 r^2$ и

$$z = l_0 + 2l_0 r + 2l_0 r^2 + 2l_0 r^3,$$

получим:

$$T_3' = T_2'';$$

$$T_3'' = m\left(g - \frac{g_1}{r^3}\right) + mg_1 \frac{1+r}{r} \frac{1}{(1-r)^2} \left[\frac{1+r^2}{r^2} e^{-2\lambda l_0 r^3} -\right.$$

$$\left. - 2\frac{1+r}{r} e^{-2\lambda l_0 r^2} + 2e^{-2\lambda l_0 r}\right] + mg_1 \frac{1+r}{r} \frac{1}{1-r} \times$$

$$\times \left[-\frac{1+r}{r} e^{-2\lambda l_0 r^2(1+r)} + 2e^{-2\lambda l_0 r(1+r)}\right] + mg_1 \frac{1+r}{r} e^{-2\lambda l_0 r(1+r+r^2)}. \qquad (25)$$

Вводим на основании равенства (22) малый параметр ε и, применяя ряд Маклорена, преобразуем выражение (26) для T_3'':

$$T_3'' = m\left(g - \frac{g_1}{r^3}\right) + mg_1 \frac{1+r}{r} e^{-\varkappa r(1+r+r^2)} +$$

$$+ mg_1 \frac{1+r}{r^3} \varepsilon \{e^{-\varkappa} [1 + 2\varkappa^2 + (3\varkappa - 9\varkappa^2 + 4\varkappa^3)\varepsilon] +$$

$$+ e^{-2\varkappa} [-(1+4\varkappa) + (+1 + 9\varkappa - 16\varkappa^2\varepsilon]\}, \qquad (26)$$

где, как и раньше, удержаны только слагаемые первого порядка малости относительно ε.

Четвертый интервал ($i=4$). Границы четвертого интервала

$$l_0 + 2l_0 r + 2l_0 r^2 + 2l_0 r^3 \leqslant z = ct \leqslant l_0 + 2l_0 r + 2l_0 r^2 + 2l_0 r^3 + 2l_0 r^4. \qquad (27)$$

$$T_4 = m\left(g + \frac{g_1}{r^4}\right) - mg_1 \frac{1+r}{r^4} \frac{(1+r)(1+r^2)(1+r^3)}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)} e^{\lambda l_0 (1+2r+2r^3+2r^6)-\lambda z} +$$

$$+ mg_1 \frac{1+r}{r^3} \frac{(1+r)(1+r^2)}{(1-r)(1-r^2)} e^{\lambda l_0 (1+2r+2r^3)-\lambda z} - mg_1 \frac{1+r}{r^2} \frac{1+r}{1-r} \times$$

$$\times e^{\lambda l_0 (1+2r)-\lambda z} + mg_1 \frac{1+r}{r} e^{\lambda l_0 - \lambda z} +$$

$$+ 2mg_1 \frac{1}{1-r} \frac{1+r}{r^3} \frac{(1+r)(1+r^2)}{(1-r)(1-r^2)} e^{2\lambda l_0 (1+r+r^2)+\frac{\lambda}{r}(l_0-z)} -$$

$$- 2mg_1 \frac{1}{1-r} \frac{1+r}{r^2} \frac{1+r}{1-r} e^{2\lambda l_0 (1+r)+\frac{\lambda}{r}(l_0-z)} +$$

$$+ 2mg_1 \frac{1}{1-r} \frac{1+r}{r} e^{2\lambda l_0 + \frac{\lambda}{r}(l_0-z)} - 2mg_1 \times$$

$$\times \frac{1+r}{(1-r)(1-r^2)} \frac{1+r}{r^2} \frac{1+r}{1-r} e^{2\lambda l_0 (1+r)+\frac{\lambda}{r^2}[l_0(1+2r)-z]} +$$

$$+ 2mg_1 \frac{1+r}{(1-r)(1-r^2)} \frac{1+r}{r} e^{2\lambda l_0 + \frac{\lambda}{r^2}[l_0(1+2r)-z]} +$$

$$+ 2mg_1 \frac{(1+r)(1+r^2)}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)} \frac{1+r}{r} e^{2\lambda l_0 + \frac{\lambda}{r^3}[l_0(1+2r+2r^3)-z]}. \quad (28)$$

Внеся сюда значения $z = l_0\left[\frac{2(1-r^4)}{1-r} - 1\right]$ и $z = l_0\left[\frac{2(1-r^5)}{1-r} - 1\right]$, имеем

$$T_4' = T_3'';$$

$$T_4'' = m\left(g + \frac{g_1}{r^4}\right) + mg_1 \frac{1+r}{r} \frac{1}{(1-r)^3}\left[-\frac{(1+r^2)(1+r^3)}{r^3(1+r+r^2)} e^{-\varkappa r^4} + \right.$$

$$\left. + 2\frac{1+r^2}{r^2} e^{-\varkappa r^3} - 2\frac{1+r}{r} e^{-\varkappa r^2} + 2\frac{1+r^2}{1+r+r^2} e^{-\varkappa r}\right] +$$

$$+ mg_1 \frac{1+r}{r} \frac{1}{(1-r)^2}\left[\frac{1+r^2}{r^2} e^{-\varkappa r^3(1+r)} - \right.$$

$$\left. - 2\frac{1+r}{r} e^{-\varkappa r^3(1+r)} + 2e^{-\varkappa r(1+r)}\right] + mg_1 \frac{1+r}{r} \frac{1}{1-r} \times$$

$$\times\left[-\frac{1+r}{r} e^{-\varkappa r^2(1+r+r^2)} + 2e^{-\varkappa r(1+r+r^2)}\right] + mg_1 \frac{1+r}{r} e^{-\varkappa r(1+r+r^3+r^3)} \quad (29)$$

Аналогично придаем выражению (30) для T_4'' следующий вид:

$$T_4'' = m\left(g + \frac{g_1}{r^4}\right) + mg_1 \frac{1+r}{r} e^{-\varkappa r(1+r+r^2+r^3)} +$$

$$+ mg_1 \frac{1+r}{r^4(1+r+r^2)} e^{-\varkappa}\{-(3+6\varkappa-6\varkappa^2+4\varkappa^3) + \varepsilon(3+18\varkappa-60\varkappa^2 +$$

$$+ 52\varkappa^3 - 10\varkappa^4)\} + mg_1 \frac{1+r}{r^3} e^{-2\varkappa}\{(1+8\varkappa^2) + \varepsilon(7\varkappa - 44\varkappa^2 + 40\varkappa^3)\} +$$

$$+ mg_1 \frac{1+r}{r^2} e^{-3\varkappa}\{-(1+6\varkappa) + \varepsilon(9\varkappa - 45\varkappa^2)\}. \quad (30)$$

Пятый интервал ($i=5$). Границы пятого интервала

$$l_0\left[\frac{2(1-r^5)}{1-r}-1\right]\leqslant z=ct\leqslant l_0\left[\frac{2(1-r^6)}{1-r}-1\right]. \qquad (31)$$

Натяжение каната

$$T_5=m\left(g-\frac{g_1}{r^5}\right)+mg_1\frac{(1+r)}{r^5}\frac{(1+r)(1+r^2)(1+r^3)(1+r^4)}{r^5(1-r)(1-r^2)(1-r^3)(1-r^4)}\times$$

$$\times e^{\lambda l_0(1+2r+2r^2+2r^3+2r^4)-\lambda z}-mg_1\frac{1+r}{r^4}\frac{(1+r)(1+r^2)(1+r^3)}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)}\times$$

$$\times e^{\lambda l_0(1+2r+2r^2+2r^3)-\lambda z}+mg_1\frac{1+r}{r^3}\frac{(1+r)(1+r^2)}{(1-r)(1-r^2)}e^{\lambda l_0(1+2r+2r^2)-\lambda z}-$$

$$-mg_1\frac{1+r}{r^2}\frac{1+r}{1-r}e^{\lambda l_0(1+2r)-\lambda z}+mg_1\frac{1+r}{r}e^{\lambda l_0-\lambda z}-$$

$$-2mg_1\frac{1}{1-r}\frac{1+r}{r^4}\frac{(1+r)(1+r^2)(1+r^3)}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)}e^{2\lambda l_0(1+r+r^2+r^3)+\frac{\lambda}{r}(l_0-z)}+$$

$$+2mg_1\frac{1}{1-r}\frac{1+r}{r^3}\frac{(1+r)(1+r^2)}{(1-r)(1-r^2)}e^{2\lambda l_0(1+r+r^2)+\frac{\lambda}{r}(l_0-z)}-$$

$$-2mg_1\frac{1}{1-r}\frac{1+r}{r^2}\frac{1+r}{1-r}e^{2\lambda l_0(1+r)+\frac{\lambda}{r}(l_0-z)}+2mg_1\frac{1}{1-r}\frac{1+r}{r}e^{2\lambda l_0+\frac{\lambda}{r}(l_0-z)}+$$

$$+2mg_1\frac{1+r}{(1-r)(1-r^2)}\frac{1+r}{r^3}\frac{(1+r)(1+r^2)}{(1-r)(1-r^2)}e^{2\lambda l_0(1+r+r^2)+\frac{\lambda}{r^2}[l_0(1+2r)-z]}-$$

$$-2mg_1\frac{1+r}{(1-r)(1-r^2)}\frac{1+r}{r^2}\frac{1+r}{1-r}e^{2\lambda l_0(1+r)+\frac{\lambda}{r^2}[l_0(1+2r)-z]}+$$

$$+2mg_1\frac{(1+r)}{(1-r)(1-r^2)}\frac{1+r}{r}e^{2\lambda l_0+\frac{\lambda}{r^2}[l_0(1+2r)-z]}-$$

$$-2mg_1\frac{(1+r)(1+r^2)}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)}\frac{1+r}{r^2}\frac{1+r}{1-r}e^{2\lambda l_0(1+r)+\frac{\lambda}{r^3}[l_0(1+2r+2r^2)-z]}+$$

$$+2mg_1\frac{(1+r)(1+r^2)}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)}\frac{1+r}{r}e^{2\lambda l_0+\frac{\lambda}{r^3}[l_0(1+2r+2r^2)-z]}+$$

$$+2mg_1\frac{(1+r)(1+r^2)(1+r^3)}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)(1-r^4)}\frac{1+r}{r}e^{2\lambda l_0+\frac{\lambda}{r^4}[l_0(1+2r+2r^2+2r^3)-z]}. \qquad (32)$$

Подставив

$$r=l_0\left[\frac{2(1-r^5)}{1-r}-1\right] \text{ и } r=l_0\left[\frac{2(1-r^6)}{1-r}-1\right],$$

получим

$$T_5''=m\left(g-\frac{g_1}{r^5}\right)+mg_1\frac{(1+r)(1+r^2)}{r(1-r)^4}\left[\frac{(1+r^3)(1+r^4)}{r^4(1+r+r^2)(1+r+r^2+r^3)}e^{-\varkappa r^6}-\right.$$

$$-2\frac{1+r^3}{r^3(1+r+r^2)}e^{-\varkappa r^4}+2\frac{1}{r^2}e^{-\varkappa r^3}-2\frac{1+r}{r(1+r+r^2)}e^{-\varkappa r^2}+$$

$$\left.+2\frac{1+r^3}{(1+r+r^2)(1+r+r^2+r^3)}e^{-\varkappa r}\right]+mg_1\frac{1+r}{r(1-r)^3}\left[-\frac{(1+r^2)(1+r^3)}{r^3(1+r+r^2)}\times\right.$$

$$\left.\times e^{-\varkappa r^4(1+r)}+2\frac{1+r^2}{r^2}e^{-\varkappa r^3(1+r)}-2\frac{1+r}{r}e^{-\varkappa r^2(1+r)}+2\frac{1+r^2}{1+r+r^2}e^{-\varkappa r(1+r)}\right]+$$

$$+ mg_1 \frac{1+r}{r(1-r)^2}\left[\frac{1+r^2}{r^2}e^{-\varkappa r^3(1+r+r^2)} - 2\frac{1+r}{r}e^{-\varkappa r^2(1+r+r^2)} + \right.$$

$$\left. + 2e^{-\varkappa r(1+r+r^2)}\right] + mg_1\frac{1+r}{r(1-r)}\left[-\frac{1+r}{r}e^{-\varkappa r^2(1+r+r^2+r^3)} + \right.$$

$$\left. + 2e^{-\varkappa r(1+r+r^2+r^3)}\right] + mg_1\frac{1+r}{r}e^{-\varkappa r(1+r+r^2+r^3+r^4)}. \qquad (33)$$

После соответствующих разложений по степеням ε

$$T_5'' = m\left(g - \frac{g_1}{r^5}\right) + mg_1\frac{1+r}{r}e^{-\varkappa(1+r+r^2+r^3+r^4)r} +$$

$$+ mg_1\frac{(1+r)(1+r^2)}{r_5(1+r+r^2)(1+r+r^2+r^3)}e^{-\varkappa}\{(6+24\varkappa^2-16\varkappa^3+4\varkappa^4) +$$

$$+ \varepsilon(-9+30\varkappa-216\varkappa^2+264\varkappa^3-106\varkappa^4+12\varkappa^5)\} +$$

$$+ mg_1\frac{1+r}{r^4(1+r+r^2)}e^{-2\varkappa}\{(-3-12\varkappa+24\varkappa^2-32\varkappa^3) + \varepsilon(3+39\varkappa -$$

$$- 276\varkappa^2+488\varkappa^3-192\varkappa^4)\} + mg_1\frac{(1+r)}{r^3}e^{-3\varkappa}\{(1+18\varkappa^2) + \varepsilon(12\varkappa -$$

$$- 117\varkappa^2+162\varkappa^3)\} + mg_1\frac{(1+r)}{r^2}e^{-4\varkappa}\{-(1+8\varkappa) + \varepsilon(14\varkappa-96\varkappa^2)\}. \qquad (34)$$

Шестой интервал ($i=6$). Границы шестого интервала

$$l_0\left[\frac{2(1-r^6)}{1-r} - 1\right] \leqslant z = ct \leqslant l_0\left[\frac{2(1-r^7)}{1-r} - 1\right]. \qquad (35)$$

Натяжение каната

$$T_6 = m\left(g + \frac{g_1}{r^6}\right) - mg_1\frac{1+r}{r^6}\frac{(1+r)(1+r^2)(1+r^3)(1+r^4)(1+r^5)}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)(1-r^4)(1-r^5)}\times$$

$$\times e^{\lambda l_0(1+2r+2r^2+2r^3+2r^4+2r^5)-\lambda z} +$$

$$+ mg_1\frac{1+r}{r^5}\frac{(1+r)(1+r^2)(1+r^3)(1+r^4)}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)(1-r^4)}e^{\lambda l_0(1+2r+2r^2+2r^3+2r^4)-\lambda z} -$$

$$- mg_1\frac{1+r}{r^4}\frac{(1+r)(1+r^2)(1+r^3)}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)}e^{\lambda l_0(1+2r+2r^2+2r^3)-\lambda z} +$$

$$+ mg_1\frac{1+r}{r^3}\frac{(1+r)(1+r^2)}{(1-r)(1-r^2)}e^{\lambda l_0(1+2r+2r^2)-\lambda z} -$$

$$- mg_1\frac{1+r}{r^2}\frac{1+r}{1-r}e^{\lambda l_0(1+2r)-\lambda z} + mg_1\frac{1+r}{r}e^{\lambda(l_0-z)} +$$

$$+ 2mg_1\frac{1}{1-r}\frac{1+r}{r^5}\frac{(1+r)(1+r^2)(1+r^3)(1+r^4)}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)(1-r^4)}\times$$

$$\times e^{2\lambda l_0(1+r+r^2+r^3+r^4)+\frac{\lambda}{r}(l_0-z)} - 2mg_1\frac{1}{1-r}\frac{1+r}{r^4}\frac{(1+r)(1+r^2)(1+r^3)}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)}\times$$

$$\times e^{2\lambda l_0(1+r+r^2+r^3)+\frac{\lambda}{r}(l_0-z)} + 2mg_1\frac{1}{1-r}\frac{1+r}{r^3}\frac{(1+r)(1+r^2)}{(1-r)(1-r^2)}\times$$

$$\times e^{2\lambda l_0(1+r+r^2)+\frac{\lambda}{r}(l_0-z)} - 2mg_1\frac{1}{1-r}\frac{1+r}{r^2}\frac{1+r}{1-r}e^{2\lambda l_0(1+r)+\frac{\lambda}{r}(l_0-z)} +$$

$$+2mg_1\frac{1}{1-r}\,\frac{1+r}{r}\,e^{2\lambda l_0+\frac{\lambda}{r}(l_0-z)}-2mg_1\frac{1+r}{(1-r)(1-r^2)}\,\frac{1+r}{r^4}\times$$

$$\times\frac{(1+r)(1+r^2)(1+r^3)}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)}\,e^{2\lambda l_0(1+r+r^2+r^3)+\frac{\lambda}{r^3}[l_0(1+2r)-z]}+2mg_1\frac{1+r}{(1-r)(1-r^2)}\times$$

$$\times\frac{1+r}{r^3}\,\frac{(1+r)(1+r^2)}{(1-r)(1-r^2)}\,e^{2\lambda l_0'(1+r+r^2)+\frac{\lambda}{r^3}[l_0(1+2r)-z]}-2mg_1\frac{1+r}{(1-r)(1-r^2)}\times$$

$$\times\frac{1+r}{r^2}\,\frac{1+r}{1-r}\,e^{2\lambda l_0(1+r)+\frac{\lambda}{r^3}[l_0(1+2r)-z]}+2mg_1\frac{1+r}{(1-r)(1-r^2)}\,\frac{1+r}{r}\times$$

$$\times e^{2\lambda l_0+\frac{\lambda}{r^2}[l_0(1+2r)-z]}+2mg_1\frac{(1+r)(1+r^2)}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)}\,\frac{1+r}{r^3}\,\frac{(1+r)(1+r^2)}{(1-r)(1-r^2)}\times$$

$$\times e^{2\lambda l_0(1+r+r^2)+\frac{\lambda}{r^3}[l_0(1+2r+2r^2)-z]}-2mg_1\frac{(1+r)(1+r^2)}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)}\,\frac{1+r}{r^2}\,\frac{1+r}{1-r}\times$$

$$\times e^{2\lambda l_0(1+r)+\frac{\lambda}{r^3}[l_0(1+2r+2r^2)-z]}+2mg_1\frac{(1+r)(1+r^2)}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)}\,\frac{1+r}{r}\times$$

$$\times e^{2\lambda l_0+\frac{\lambda}{r^3}[l_0(1+2r+2r^2)-z]}-2mg_1\frac{(1+r)(1+r^2)(1+r^3)}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)(1-r^4)}\,\frac{1+r}{r^2}\,\frac{1+r}{1-r}\times$$

$$\times e^{2\lambda l_0(1+r)+\frac{\lambda}{r^4}[l_0(1+2r+2r^2+2r^3)-z]}+2mg_1\frac{(1+r)(1+r^2)(1+r^3)}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)(1-r^4)}\,\frac{1+r}{r}\times$$

$$\times e^{2\lambda l_0+\frac{\lambda}{r^4}[l_0(1+2r+2r^2+2r^3)-z]}+2mg_1\frac{(1+r)(1+r^2)(1+r^3)(1+r^4)}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)(1-r^4)(1-r^5)}\times$$

$$\times\frac{1+r}{r}\,e^{2\lambda l_0+\frac{\lambda}{r^5}[l_0(1+2r+2r^2+2r^3+2r^4)-z]}\qquad(36)$$

Полагаем в формуле (36) для T_6

$$z=l_0\left[\frac{2(1-r^6)}{1-r}-1\right]\quad\text{и}\quad z=l_0\left[\frac{2(1-r^7)}{1-r}-1\right].$$

Имеем соответственно

$$T_6'=T_5'',$$

$$T_6''=m\left(g+\frac{g_1}{r^6}\right)+mg_1\frac{(1+r)(1+r^2)}{r(1+r+r^2)(1-r)^5}\times$$

$$\times\left[-\frac{(1+r^3)(1+r^4)(1+r^5)}{r^5(1+r+r^2+r^3)(1+r+r^2+r^3+r^4)}\,e^{-\varkappa r^6}+\right.$$

$$+2\frac{(1+r^3)(1+r^4)}{r^4(1+r+r^2+r^3)}\,e^{-\varkappa r^5}-2\frac{1+r^3}{r^3}\,e^{-\varkappa r^4}+2\frac{1+r^2}{r^2}\,e^{-\varkappa r^3}-$$

$$\left.-2\frac{(1+r)(1+r^3)}{r(1+r+r^2+r^3)}\,e^{-\varkappa r^2}+2\frac{(1+r^3)(1+r^4)}{(1+r+r^2+r^3)(1+r+r^2+r^3+r^4)}\,e^{-\varkappa r}\right]+$$

$$+mg_1\frac{(1+r)(1+r^2)}{r(1-r)^4}\left[\frac{(1+r^3)(1+r^4)}{r^4(1+r+r^2+r^3)(1+r+r^2)}\,e^{-\varkappa r^5(1+r)}-\right.$$

$$-2\frac{1+r^3}{r^3(1+r+r^2)}\,e^{-\varkappa r^4(1+r)}+2\frac{1}{r^2}\,e^{-\varkappa r^3(1+r)}-2\frac{1+r}{r(1+r+r^2)}\,e^{-\varkappa r^2(1+r)}+$$

$$\left.+2\frac{1+r^3}{(1+r+r^2)(1+r+r^2+r^3)}\,e^{-\varkappa r(1+r)}\right]+mg_1\frac{1+r}{r(1-r)^3}\times$$

$$\times\left[-\frac{(1+r^2)(1+r^3)}{r^3(1+r+r^2)}e^{-\varkappa r^4(1+r+r^2)}+2\frac{1+r^2}{r^2}e^{-\varkappa r^3(1+r+r^2)}-\right.$$

$$\left.-2\frac{1+r}{r}e^{-\varkappa r^3(1+r+r^2)}+2\frac{1+r^2}{1+r+r^2}e^{-\varkappa r(1+r+r^3)}\right]+mg_1\frac{1+r}{r(1-r)^2}\times$$

$$\times\left[\frac{1+r^2}{r^2}e^{-\varkappa r^3(1+r+r^2+r^3)}-2\frac{1+r}{r}e^{-\varkappa r^2(1+r+r^3+r^3)}+2e^{-\varkappa r(1+r+r^3+r^3)}\right]+$$

$$+mg_1\frac{1+r}{r(1-r)}\left[-\frac{1+r}{r}e^{-\varkappa r^2(1+r+r^2+r^3+r^4)}+2e^{-\varkappa r(1+r+r^2+r^3+r^4)}\right]+$$

$$+mg_1\frac{1+r}{r}e^{-\varkappa r(1+r^2+r^3+r^4+r^5)}. \qquad (37)$$

и в окончательном виде

$$T_6''=m\left(g+\frac{g_1}{r^6}\right)+mg_1\frac{1+r}{r}e^{-\varkappa r(1+r+r^2+r^3+r^4+r^5)}+$$

$$+mg_1\frac{(1+r)(1+r^2)}{r^6(1+r+r^2)(1+r+r^2+r^3)(1+r+r^2+r^3+r^4)}e^{-z}\times$$

$$\times\{(-30-60\varkappa+120\varkappa^2-160\varkappa^3+60\varkappa^4-8\varkappa^5)+\varepsilon(105+390\varkappa-1770\varkappa^2+$$

$$+2960\varkappa^3-1710\varkappa^4+388\varkappa^5-28\varkappa^6)\}+$$

$$+mg_1\frac{(1+r)(1+r^2)}{r^5(1+r+r^2)(1+r+r^2+r^3)}e^{-2\varkappa}\{(6+96\varkappa^2-128\varkappa^3+64\varkappa^4)+$$

$$+\varepsilon(-9+66\varkappa-960\varkappa^2+2400\varkappa^3-1952\varkappa^4+448\varkappa^5)\}+$$

$$+mg_1\frac{1+r}{r^4(1+r+r^2)}e^{-3\varkappa}\{-(3+18\varkappa-54\varkappa^2+108\varkappa^3)+$$

$$+\varepsilon(3+63\varkappa-720\varkappa^2+1890\varkappa^3-1134\varkappa^4)\}+$$

$$+mg_1\frac{1+r}{r^3}e^{-4\varkappa}\{(1+32\varkappa^2)+2\varepsilon(9\varkappa-120\varkappa^2+224\varkappa^3)\}+$$

$$+mg_1\frac{1+r}{r^2}e^{-5\varkappa}\{-(1+10\varkappa)+\varepsilon(20\varkappa-175\varkappa^2). \qquad (38)$$

Седьмой интервал ($i=7$). Границы седьмого интервала

$$l_0\left[\frac{2(1-r^7)}{1-r}-1\right]\leqslant z=ct\leqslant l_0\left[\frac{2(1-r^8)}{1-r}-1\right]. \qquad (39)$$

Для начала рассматриваемого интервала

$$z=l_0\left[\frac{2(1-r^7)}{1-r}-1\right]$$

и натяжение в точке подвеса груза T_7' совпадает с натяжением T_6'' для конца предшествующего шестого интервала. Для конца седьмого интервала

$$z=l_0\left[\frac{2(1-r^8)}{1-r}-1\right].$$

Соответствующее натяжение каната T_7'' может быть преобразовано применением ряда Маклорена и сохранением в окончательном результате слагаемых только первого периода малости относительно

параметра $\varepsilon = 1 - r$, $r = \frac{c-v}{c+v}$, где все обозначения предыдущие. Будем иметь

$$T_7 = m\left(g - \frac{g_1}{r^7}\right) + mg_1 \frac{1+r}{r} e^{-\varkappa r(1+r+r^2+r^3+r^4+r^5+r^6)} +$$

$$+ mg_1 \frac{1+r}{r^7} \frac{(1+r^2)(1+r^3)}{(1+r+r^2)^2(1+r+r^2+r^3)(1+r+r^2+r^3+r^4)(1+r+r^2+r^3+r^4+r^5)} \times$$

$$\times e^{-\varkappa} [270 + 1620\varkappa^2 - 2160\varkappa^3 + 1260\varkappa^4 - 288\varkappa^5 + 24\varkappa^6 +$$

$$+ \varepsilon(-1485 + 1890\varkappa - 25920\varkappa^2 + 49680\varkappa^3 - 38430\varkappa^4 + 12924\varkappa^5 - 1896\varkappa^6 +$$

$$+ 96\varkappa^7)] + mg_1 \frac{1+r}{r^6} \frac{1}{(1+r+r^2)(1+r+r^2+r^3)(1+r+r^2+r^3+r^4)} \times$$

$$\times e^{-2\varkappa} [-60 - 240\varkappa + 960\varkappa^2 - 2560\varkappa^3 + 1920\varkappa^4 - 512\varkappa^5 +$$

$$+ \varepsilon(270 + 1860\varkappa - 16320\varkappa^2 + 54720\varkappa^3 - 63040\varkappa^4 + 28544\varkappa^5 - 4096\varkappa^6)] +$$

$$+ mg_1 \frac{1+r}{r^5(1+r+r^2)(1+r+r^2+r^3)} e^{-3\varkappa} [12 + 432\varkappa^2 - 864\varkappa^3 +$$

$$+ 648\varkappa^4 + \varepsilon(-30 + 216\varkappa - 5184\varkappa^2 + 19008\varkappa^3 - 23004\varkappa^4 + 7776\varkappa^5)] +$$

$$+ mg_1 \frac{1+r}{r^4(1+r+r^2)} e^{-4\varkappa} [-3 - 24\varkappa + 96\varkappa^2 - 256\varkappa^3 + \varepsilon(3 + 90\varkappa -$$

$$- 1392\varkappa^2 + 5056\varkappa^3 - 4096\varkappa^4)] + mg_1 \frac{1+r}{r^3} e^{-5\varkappa} [1 + 50\varkappa^2 +$$

$$+ \varepsilon(25\varkappa - 425\varkappa^2 + 1000\varkappa^3)] + mg_1 \frac{1+r}{r^2} e^{-6\varkappa} [-1 - 12\varkappa +$$

$$+ \varepsilon(27\varkappa - 288\varkappa^2)]. \qquad (40)$$

Восьмой интервал времени ($i=8$). Границы восьмого интервала

$$l_0\left[\frac{2(1-r^8)}{1-r} - 1\right] \leqslant z = ct \leqslant l_0\left[\frac{2(1-r^9)}{1-r} - 1\right]. \qquad (41)$$

Для начала интервала

$$z = l_0\left[\frac{2(1-r^8)}{1-r} - 1\right].$$

При этом натяжение каната в точке подвеса груза T_8 совпадает с натяжением T_7'' для конца седьмого интервала. Для конца восьмого интервала

$$z = l_0\left[\frac{2(1-r^9)}{1-r} - 1\right].$$

Преобразуем соответствующие натяжения каната T_8'' применением ряда Маклорена, сохраняя в окончательном результате слагаемые только первого порядка малости относительно ε. Получим

$$T_8 = m\left(g + \frac{g_1}{r^8}\right) + mg_1 \frac{1+r}{r} e^{-\varkappa r(1+r+r^2+r^3+r^4+r^5+r^6+r^7)} +$$

$$+ \frac{mg_1(1+r)}{r^8(1+r+r^2)(1+r+r^3+r^3)(1+r+r^2+r^3+r^4)} \times$$

$$\times \frac{(1+r^2)(1+r^3)}{(1+r+r^2+r^3+r^4+r^5)(1+r+r^2+r^3+r^4+r^5+r^6)} \times$$

$$\times e^{-x}[-630-1260x+3780x^2-7560x^3+5460x^4-1848x^5+$$
$$+280x^6-16x^7+\varepsilon(4725+14490x-81270x^2+197820x^3-187950x^4+$$
$$+84420x^5-18564x^6+1912x^7-72x^8)]+$$
$$+\frac{mg_1(1+r)(1+r^2)(1+r^3)}{r^7(1+r+r^2)^2(1+r+r^2+r^3)(1+r+r^2+r^3+r^4)(1+r+r^2+r^3+r^4+r^5)}\times$$
$$\times e^{-2x}[270+6480x^2-17280x^3+20160x^4-9216x^5+1536x^6+$$
$$+\varepsilon(-1485+4050x-110160x^2+429840x^3-672480x^4+$$
$$+456768x^5-135168x^6+13824x^7)]+$$
$$+\frac{mg_1(1+r)}{r^6(1+r+r^2)(1+r+r^2+r^3)(1+r+r^2+r^3+r^4)}\times$$
$$\times e^{-3x}[-60-360x+2160x^2-8640x^3+9720x^4-3888x^5+$$
$$+\varepsilon(270+2880x-39420x^2+200880x^3-351540x^4+$$
$$+241056x^5-52488x^6)]+\frac{mg_1(1+r)}{r^5(1+r+r^2)(1+r+r^2+r^3)}e^{-4x}\times$$
$$\times[12+768x^2-2048x^3+2048x^4+\varepsilon(-30+312x-9984x^2+$$
$$+49664x^3-80896x^4+36864x^5)]+\frac{mg_1(1+r)}{r^4(1+r+r^2)}e^{-5x}\times$$
$$\times[-3-30x+150x^2-500x^3+\varepsilon(3+120x-2400x^2+$$
$$+11000x^3-11250x^4)]+\frac{mg_1(1+r)}{r^3}e^{-6x}[1+72x^2+\varepsilon(33x-684x^2+$$
$$+1944x^3)]+\frac{mg_1(1+r)}{r^2}e^{-7x}[-1-14x+\varepsilon(35x-441x^2)]. \qquad (42)$$

Числовой пример. Примем следующие исходные данные [3]:

Вес поднимаемого груза	$p=mg=6360$ *кг*
Высота подъема	$h=472$ *м*
Высота расположения направляющего шкива над приемной площадкой .	$h_1=15$ *м*
Вес 1 *пог. м* каната	$q=\rho g=3{,}9$ *кг/м*
Общая площадь поперечных сечений всех проволок каната	$F=4{,}33$ *см*^{2}
Тангенциальное ускорение на ободе барабана	$g_1=1$ *м/сек*^{2}
Скорость на ободе барабана в период равномерного вращения	$v=12$ *м/сек*
Период равнопеременного вращения барабана	$t_1=t_3=\frac{v_1}{g}=12$ *сек*
Соответствующая этому периоду высота подъема груза	$s_1=s_3=\frac{1}{2}g_1t_1^2=72$ *м*

Отсюда

$$l_0=472+15-72=415\ м.$$

Сохраняя обычные обозначения углов φ и ψ для спиральных канатов двойной свивки, примем

$$\varphi=\psi=16°,\quad E=2{,}110^6\ кГ/см^2.$$

Тогда по формуле А. Н. Динника [4]

$$\varepsilon_к = \varepsilon \cos^4 \varphi \cos^4 \psi = \varepsilon \cos^8 \varphi.$$

Поэтому

$$F_к = \frac{F}{\cos^2 \varphi},$$

$$k = \varepsilon_к F_к = \varepsilon F \cos^6 \varphi = 7\,158\,000 \ кГ.$$

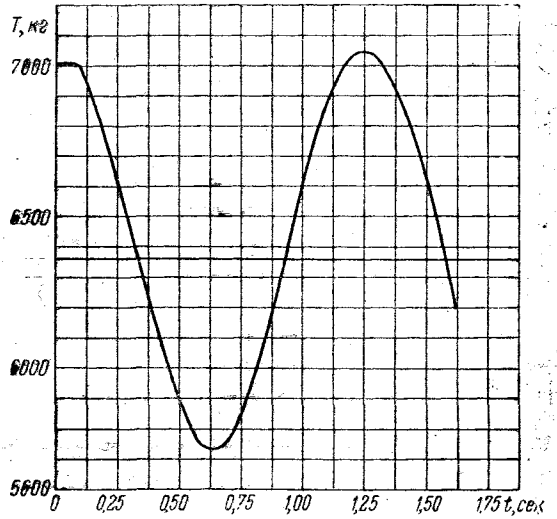


Рис. 2

Отсюда ($g = 9{,}81$ *м/сек*^{2})

$$c = \sqrt{\frac{k}{\rho}} = \sqrt{\frac{kg}{q}} = 4243 \ м/сек.$$

Наконец,

$$\lambda = \frac{\rho}{m} = \frac{q}{p} = 0{,}0006132 \ г/м;$$

$$\varkappa = 2\lambda l_0 = 0{,}5090;$$

$$r = \frac{c - v}{c + v} = 0{,}9944;$$

$$\varepsilon = 0{,}005640.$$

Применение выведенных для восьми интервалов времени формул дает следующие значения натяжения каната:

T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
7008	6492	5905	5748	6153	6771	7044	6813	6196

Соответствующий график изменения натяжения каната в функции времени представлен на рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Неронов Н. П. О расчете подъемных шахтных канатов. Записки ЛГИ, т. XXXII, вып.1, 1954, стр. 102—111.
2. Неронов Н. П. Определение напряжений в подъемном канате. ДАН СССР, т. LVII, № 8, 1947, стр. 765—768.
3. Герман А. П., Шклярский Ф. Н. Рудничные подъемные установки. Углетехиздат, 1947, стр. 77—87.
4. Динник А. Н. О работе по теории упругости кафедры теории упругости при Всеукраинской академии наук и кафедры сопротивления материалов Днепропетровского металлургического института. Прикладная математика и механика, т. I, № 2, 1933, стр. 335—337.
5. Пеньков А. М., Бондарчук А. С., Кроленц М. С. Экспериментальное определение динамических напряжений в шахтных подъемных канатах. Записки Ин-та горной механики УССР, № 7, 1949, стр. 53—77.