Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XL, 1959 г.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МОДУЛЯРНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИИ ТЕТА

А. М. Журавский

I. Функции $\vartheta_k(z, \tau)$, определяемые разложениями:

$$\vartheta_1(z, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{\frac{(2n+1)^2}{4}\pi i\tau} \sin(2n+1)z; \tag{1}$$

$$\vartheta_2(z, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(2n+1)^2}{4}\pi i\tau} \cos(2n+1)z; \tag{2}$$

$$(I_m\tau > 0);$$

$$\vartheta_3(z, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{n^2\pi i\tau} \cos 2nz; \tag{3}$$

$$\vartheta_4(z, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{n^2\pi i\tau} \cos 2nz, \tag{4}$$

могут быть представлены рядами:

$$\vartheta_1(z, \tau) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{-\frac{[2z-(2n+1)\pi]^2}{4\pi\tau} i}; \tag{5}$$

$$\vartheta_2(z, \tau) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{-\frac{(z-n\pi)^2}{\pi\tau} i}; \tag{6}$$

$$\vartheta_3(z, \tau) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-n\pi)^2}{\pi\tau} i}; \tag{7}$$

$$\vartheta_4(z, \tau) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{[2z-(2n+1)\pi]^2}{4\pi\tau} i}; \tag{8}$$

$$Re\sqrt{-i\tau} > 0.$$

Указанное преобразование рядов, выражающих функции тета, давно и хорошо известно. Оно было получено Якоби в 1828 г. [2], [3] и связано с его исследованиями по теории эллиптических функций. Если вместо z и τ ввести новые переменные, положив:

$$z = \frac{\pi x}{2};$$

$$-i\tau = \pi t,$$

то указанные разложения примут следующий вид:

$$\theta_1(x, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4} t} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{-\frac{(x-2n-1)^2}{4t}}; \tag{9}$$

$$\theta_2(x, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4} t} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{-\frac{(x-2n)^2}{4t}}; \tag{10}$$

$$\theta_3(x, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\pi^2 t} \cos n\pi x = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-2n)^2}{4t}}; \tag{11}$$

$$\theta_4(x, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{-n^2\pi^2 t} \cos n\pi x = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-2n-1)^2}{4t}}. \tag{12}$$

Функции $\theta_k(x, t)$ являются решениями дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \tag{13}$$

и обладают следующим свойством:

$$\int_0^1 \theta_k(x, t)\, dx = 1; \quad k = 3, 4; \tag{14}$$

$$\lim_{t \to 0} \int_0^1 \theta_k(x, t)\, dx = 1; \quad k = 1, 2. \tag{15}$$

Их можно рассматривать, как решения, отвечающие начальным условиям:

$$\theta_1(x, +0) = \theta_4(x, +0) = 0; \quad 0 \leqslant x < 1; \tag{16}$$

$$\theta_2(x, +0) = \theta_3(x, +0) = 0; \quad 0 < x \leqslant 1, \tag{17}$$

причем

$$\lim_{t \to 0} \int_0^1 \theta_k(x, t)\, dx = 1; \quad n = 1, 2, 3, 4, \tag{18}$$

и граничным условиям:

$$\theta_1(0, t) = \theta_2(0, t) = 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial \theta_k(x, t)}{\partial x} = 0; \quad k = 2, 3, 4; \tag{20}$$

$$x = 0$$

$$\frac{\partial \theta_k(x, t)}{\partial x} = 0; \quad k = 1, 3, 4; \tag{21}$$

$$x = 1.$$

Замечательное преобразование рядов, выражающих функции тета, допускает весьма широкое обобщение.

В настоящей статье дается расширение преобразования на любое решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \tag{22}$$

отвечающее начальному условию

$$u(x, +0) = f(x) \tag{23}$$

и граничным условиям:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = h_0 u(0, t); \quad h_0 \geqslant 0; \tag{24}$$

$$x = 0$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -h_1 u(1, t); \quad h_1 \geqslant 0 \tag{25}$$

$$x = 1.$$

Подобного вида разложения весьма удобны для определения значений u (x, t) при малых значениях t, когда разложение, полученное по способу Фурье требует вычисления большего числа членов ряда. Указанным преобразованием целесообразно пользоваться при расчетах температурного поля неограниченной пластины, при оценке термических действий в процессе термообработок плиты (в частности, при ее закалке и отжиге), а также при решении ряда других технических вопросов. Некоторые частные случаи рассматриваемого преобразования встречаются в технической литературе [1] главным образом в виде приближенных формул, но само преобразование не получило сколько-нибудь законченного развития. Главной задачей работы является изучение структуры ряда, являющегося преобразованием классического разложения Фурье. Исследование опирается на контурное интегрирование и использует прием Лансберга [4] для вывода преобразования рядов, представляющих функции тета.

II. Решение дифференциального уравнения (22) при начальном условии (23) и граничных условиях (24) и (25) представляется рядом

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\mu_n^2 t}\omega_n(x), \tag{26}$$

где

$$\omega_n(x)=\mu_n\cos\mu_n x+h_0\sin\mu_n x. \tag{27}$$

Коэффициент A_n определяется равенством

$$A_n=\int_0^1 f(x)\,\omega_n(x)\,dx:\int_0^1 \omega_n^2(x)\,dx. \tag{28}$$

Положительные характеристические числа μ_n расположены в порядке их возрастания. Они являются корнями уравнения

$$(h_0+h_1)\,\mu\cos\mu+(h_0h_1-\mu^2)\sin\mu=0. \tag{29}$$

Все вещественные корни $\pm\mu_n$ уравнения (29) простые и уравнение (29) не имеет комплексных корней. В этом можно убедиться, рассуждая следующим образом. Вещественные, отличные от нуля, корни являются абсциссами точек пересечения гиперболы (рис. 1)

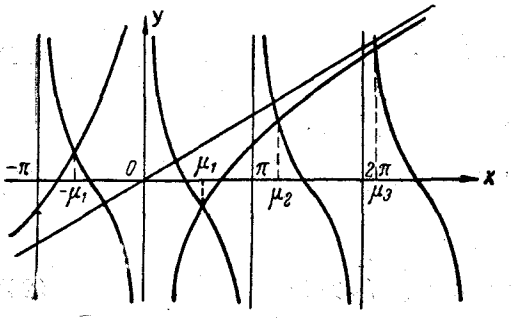


Рис. 1

$$y=\frac{x^2-h_0h_1}{(h_0+h_1)\,x} \tag{30}$$

и котангенсоиды

$$y=\operatorname{ctg} x, \tag{31}$$

если h_0 и h_1 не равны нулю. Асимптотами гиперболы служат ось OY и прямая

$$y=\frac{x}{h_0+h_1}. \tag{32}$$

Легко видеть, что в каждом промежутке

$$(n-1)\,\pi\leqslant x\leqslant n\pi$$

заключается точка пересечения кривых и, таким образом,

$$(n-1)\,\pi<\mu_n<n\pi.$$

При больших значениях

$$\mu_n\approx(n-1)\,\pi.$$

Если одна из величин h_0, h_1 обращается в нуль, то гипербола вырождается в пару пересекающихся прямых, одной из которых является ось OY, в другой — прямая, определяемая уравнением (32). Если при равенстве нулю одной из величин h_0, h_1 другая обращается в бесконеч-

ность, то одна прямая совпадает с OX, а другая с OY. При этом $\mu_n = \frac{2n-1}{2}\pi$. Случай $h_0 = h_1 = 0$ тривиален. Переписав функцию

$$\Phi(\mu) = (h_0 + h_1)\,\mu\cos\mu + (h_0 h_1 - \mu^2)\sin\mu \tag{33}$$

в виде

$$\Phi(\mu) = \mu\sin\mu\left[(h_0 + h_1)\operatorname{ctg}\mu + \frac{h_0 h_1}{\mu} - \mu\right],$$

нетрудно убедиться, что

$$\Phi'(\mu_n) = -\mu_n \sin\mu_n\left[\frac{h_0 + h_1}{\sin^2\mu_n} + \frac{h_0 h_1}{\mu_n^2} + 1\right] \neq 0. \tag{34}$$

Отсутствие чисто мнимых корней уравнения (29) очевидно.

На элементарном доказательстве отсутствия комплексных корней не будем останавливаться.

Одновременно с функцией $\omega_n(x)$ рассмотрим функцию

$$\omega_n^*(x) = \mu_n\cos\mu_n(1-x) + h_1\sin\mu_n(1-x). \tag{35}$$

Она, как следует из уравнения (29), только постоянным множителем отличается от функции $\omega_n(x)$. Это позволяет представить коэффициет A_n, определяемый равенством (28), в виде

$$A_n = \int_0^1 f(x)\,\omega_n^*(x)\,dx : \int_0^1 \omega_n(x)\,\omega_n^*(x)\,dx. \tag{36}$$

Непосредственное интегрирование дает

$$\int_0^1 \omega_n(x)\,\omega_n^*(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[(\mu_n^2 - h_0 h_1)\cos\mu_n + (h_0 + h_1)\,\mu_n\sin\mu_n + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_n^2 + h_0 h_1}{\mu_n}\sin\mu_n\right].$$

В силу уравнения (29) правая часть равенства может быть преобразована и интеграл представлен в виде

$$\int_0^1 \omega_n(x)\,\omega_n^*(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(h_0 + h_1)\,\mu_n}{\sin\mu_n} + \frac{h_0 h_1\sin\mu_n}{\mu_n} + \mu_n\sin\mu_n\right]. \tag{37}$$

Сопоставление равенств (34) и (37) показывает, что

$$\int_0^1 \omega_n(x)\,\omega_n^*(x)\,dx = -\frac{1}{2}\Phi'(\mu_n) \tag{38}$$

и коэффициент A_n имеет вид

$$A_n = -\frac{2}{\Phi'(\mu_n)}\int_0^1 f(x)\,\omega_n^*(x)\,dx. \tag{39}$$

III. Функция $u(x, t)$, выраженная разложением (26), может быть представлена рядом

$$u(x, t) = -2\sum_{n=1}^{\infty} e^{\mu_n^2 t} \int_0^1 f(x') \frac{\omega_n^*(x')\,\omega_n(x)}{\Phi'(\mu_n)}\,dx'. \tag{40}$$

Учитывая, что

$$|\omega_n^*(x')| < \mu_n + h_1;$$

$$|\omega_n(x)| < \mu_n + h_0$$

и

$$|\Phi'(\mu_n)| > \frac{1}{2}\mu_n^2$$

при n достаточно большом, можно утверждать ограниченность подинтегральной функции

$$f(x')\frac{\omega_n^*(x')\,\omega_n(x)}{\Phi'(\mu_n)}$$

при ограниченности функции $f(x')$.

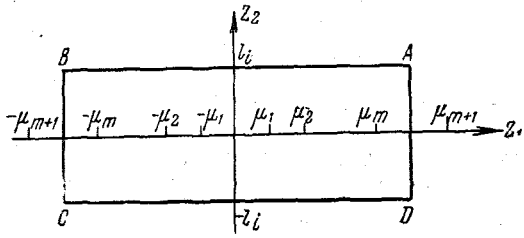


Рис. 2

Сказанное дает право представить функцию $u(x, t)$ интегралом

$$u(x, t) = \int_0^1 f(x')\,\theta(x', x, t)\,dx', \tag{41}$$

где

$$\theta(x', x, t) = -2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 t} \frac{\omega_n^*(x')\,\omega_n(x)}{\Phi'(\mu_n)}. \tag{42}$$

Функция $\theta(x', x, t)$ содержит в себе, как частные случаи, функции $\theta_k(x, t)$.

Сумму первых m членов ряда, стоящего в правой части равенства (42), можно рассматривать как сумму вычетов функции

$$F(z) = e^{-tz^2} \frac{\omega(z, x)\,\omega_*(z, x')}{\Phi(z)}, \tag{43}$$

где

$$\omega(z, x) = z\cos xz + h_0 \sin xz; \tag{44}$$

$$\omega_*(z, x) = z\cos(1-x)z + h_1 \sin(1-x)z, \tag{45}$$

относительно полюсов, лежащих внутри прямоугольника $ABCD$ (рис. 2) со сторонами, параллельными координатным осям, и центром в начале О.

Эта сумма может быть выражена интегралом, взятым по контуру $ABCDA$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{ABCDA} F(z)\,dz = 2\sum_{n=1}^{m} e^{-\mu_n^2 t} \frac{\omega_n^*(x')\,\omega_n(x)}{\Phi'(\mu_n)}. \tag{46}$$

Если принять абсциссы сторон AD и BC равными $\pm\frac{2m-1}{2}\pi$, то нетрудно проверить, что на сторонах AD и B^2C величина $|F(z)|$ может быть сделана сколь угодно малой при m достаточно большом во всех случаях, за исключением того, когда одна из величин h_0, h_1 обращается в нуль, а другая — в бесконечность. В этом последнем случае абсциссы сторон AD и BC берем в точках $\pm m\pi$. Число m целое. При беспредельном увеличении m интегралы по сторонам DA и BC обращаются в нуль и из равенства (46) следует

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{+\infty+li}^{-\infty+li} F(z)\,dz+\int_{-\infty-li}^{\infty-li} F(z)\,dz\right]=$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 t}\,\frac{\omega_n^*(x')\,\omega_n(x)}{\Phi'(\mu_n)}. \qquad (47)$$

Функция $F(z)$ есть функция нечетная, поэтому

$$\int_{-\infty-li}^{\infty-li} F(z)\,dz=-\int_{\infty+li}^{-\infty+li} F(-z)\,dz=\int_{\infty+li}^{-\infty+li} F(z)\,dz.$$

Из равенства (47) следует

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty+li}^{\infty+li} F(z)\,dz=-2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 t}\,\frac{\omega_n^*(x')\,\omega_n(x)}{\Phi'(\mu_n)}. \qquad (48)$$

Равенство (48) дает выражение $\theta(x', x, t)$ в форме контурного интеграла

$$\theta(x', x, t)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty+li}^{\infty+li} F(z)\,dz. \qquad (49)$$

IV. Функции $\omega(z, x)$ и $\omega_*(z, x)$ могут быть представлены в виде:

$$\omega(z, x)=\frac{1}{2}(z-h_0 i)\,e^{xzi}+\frac{1}{2}(z+h_0 i)\,e^{-xzi}; \qquad (50)$$

$$\omega_*(z, x)=\frac{1}{2}(z-h_0 i)\,e^{(1-x)zi}+\frac{1}{2}(z+h_0 i)\,e^{-(1-x)zi}. \qquad (51)$$

Их произведение выражается равенством

$$\omega(z, x)\,\omega_*(z, x')=\frac{1}{4}\{(z-h_0 i)(z-h_1 i)\,e^{(1-x'+x)zi}+$$

$$+(z-h_0 i)(z+h_1 i)\,e^{-(1-x-x')zi}+(z+h_0 i)(z-h_1 i)\,e^{(1-x'-x)zi}+$$
$$+(z+h_0 i)(z+h_1 i)\,e^{-(1-x'+x)zi}\}. \qquad (52)$$

Функция $\Phi(z)$ представляется равенством

$$\Phi(z)=\frac{i}{2}\left[(z-h_0 i)(z-h_1 i)\,e^{zi}-(z+h_0 i)(z+h_1 i)\,e^{-zi}.\right] \qquad (53)$$

При

$$Imz = z_2 > 0.$$

Функция $\Phi^{-1}(z)$ разлагается в бесконечный ряд

$$\frac{1}{\Phi(z)} = 2i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-h_0 i)^k (z-h_1 i)^k}{(z+h_0 i)^{k+1} (z+h_1 i)^{k+1}} e^{(2k+1)zi}. \tag{54}$$

Рассмотрим функцию

$$H_{k,e}(z) = \frac{(z-h_0 i)^k (z-h_1 i)^l}{(z+h_0 i)^k (z+h_1 i)^l}. \tag{55}$$

Из равенств (52) и (54) следует

$$\frac{\omega(z,x)\,\omega_*(z,x')}{\Phi(z)} = \frac{i}{2}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} H_{k,k}(z)\, e^{(x'-x+2k)zi} + \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} H_{k+1,k}(z)\, e^{(x+x'+2k)zi} + \sum_{k=0}^{\infty} H_{k,k+1}(z)\, e^{(-x'-x+2k+2)zi} +$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} H_{k+1,k+1}(z)\, e^{(-x'+x+2k+2)zi}\right\}. \tag{56}$$

Функция $\theta(x', x, t)$ представляется разложением

$$\theta(x', x, t) = \frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty+li}^{\infty+li} H_{k,k}(z)\, e^{-z^2 t+(x'-x+2k)zi} dz + \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty+li}^{\infty+li} H_{k+1,k}(z)\, e^{-z^2 t+(x+x'+2k)zi} dz +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty+li}^{\infty+li} H_{k,k+1}(z)\, e^{-z^2 t+(-x'-x+2k+2)zi} dz +$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty+li}^{\infty+li} H_{k+1,k+1}(z)\, e^{-z^2 t+(-x'+x+2k+2)zi} dz\right\}. \tag{57}$$

Учитывая неравенство

$$|H_{k,e}(z)| \leqslant 1$$

при $Imz = z_2 \geqslant 0$ и неравенство

$$|e^{-z^2 t+nzi}| < e^{-(z_1^2-l^2)t+|nl|}$$

при $l \geqslant Imz \geqslant 0$ и вещественном n, можно заключить, что при $Rez = z_1 \to \pm\infty$ функция

$$H_{k,e}(z)\, e^{-z^2 t+nzi} \to 0.$$

Это позволяет интегралы правой части равенства (57) заменить интегралами, взятыми по вещественной оси, и представить функцию $\theta(x', x, t)$ разложением

$$\theta(x', x, t) = \frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} H_{k,k}(z)\, e^{-z^2t+(x'-x+2k)zi}dz + \right.$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} H_{k+1,k}(z)\, e^{-z^2t+(x'+x+2k)zi}dz +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} H_{k,k+1}(z)\, e^{-z^2t+(-x'-x+2k+2)zi}dz +$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} H_{k+1,k+1}(z)\, e^{-z^2t+(-x'+x+2k+2)zi}dz\right\}. \qquad (58)$$

Нетрудно оценить величину интеграла

$$J_{k,e} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H_{k,e}(z)\, e^{-z^2t+n_{k,e}zi}, \qquad (59)$$

где $n_{k,e}$ обозначает коэффициент zi в показателе у той подинтегральной функции в правой части равенства (58), где первый множитель равен $H_{k,e}(z)$. Заменой переменных интеграл приводится к виду

$$J_{k,e} = \frac{1}{2\pi\sqrt{t}}e^{-\frac{n_{k,e}^2}{4t}}\int_{-\infty-\frac{n_{k,e}i}{2\sqrt{m}}}^{\infty-\frac{n_{k,e}i}{2\sqrt{m}}} e^{-\tau^2}H_{k,e}\left(\frac{\tau}{\sqrt{t}}+\frac{n_{k,e}}{2t}i\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{t}}e^{-\frac{n_{k,e}^2}{4t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2}H_{k,e}\left(\frac{\tau}{\sqrt{t}}+\frac{n_{k,e}}{2t}i\right)dt. \qquad (60)$$

Все величины $n_{k,e}$, за исключением n_{00}, положительны, ибо $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant x' \leqslant 1$. Вследствие этого

$$\left|H_{k,e}\left(\frac{\tau}{\sqrt{t}}+\frac{n_{k,e}}{2t}i\right)\right| \leqslant 1. \qquad (61)$$

Неравенство (61) справедливо и при $k = l = 0$, так как

$$H_{0,0}(z) = 1.$$

Из равенства (60) следует, что

$$|J_{k,e}| \leqslant \frac{1}{2\pi\sqrt{t}}e^{-\frac{n_{k,e}^2}{4t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2}d\tau = \frac{e^{-\frac{n_{k,e}^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}. \qquad (62)$$

Все величины $n_{k,e}$, как показывает равенство (58), могут быть представлены в виде

$$n_{k,e}=2k(1+\varepsilon_{k,e}), \tag{63}$$

где $\varepsilon_{k,e}$ мало при больших k и l, и тогда имеет место равенство

$$|J_{k,e}|\leqslant\frac{e^{-\frac{k^2}{t}\left(1+\varepsilon'_{k,e}\right)}}{2\sqrt{\pi t}}, \tag{64}$$

где $\varepsilon'_{k,e}\to 0$ при беспредельном возрастании k.

Неравенство (64) дает порядок убывания членов в рядах, представляющих функцию $\theta(x', x, t)$. Эти ряды сходятся очень быстро при малых t.

Отметим очевидное равенство

$$H_{k,e}(-z)=H_{-k,-e}(z). \tag{65}$$

В силу этого:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_{k,k}(z)\,e^{-z^2t+(-x'+x+2k)zi}\,dz=\int_{-\infty}^{+\infty}H_{-k,-k}(z)\,e^{-z^2t+(x'-x-2k)zi}\,dz; \tag{66}$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_{k,k+1}(z)\,e^{-z^2t+(-x'-x+2k+2)zi}\,dz=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}H_{-k,-k-1}(z)\,e^{-z^2t+(x'+x-2k-2)zi}dz. \tag{67}$$

Следовательно, равенство (58) может быть представлено в виде

$$\theta(x',\ x,\ t)=\frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}H_{k,k}(z)\,e^{-z^2t+(x'-x+2k)zi}dz+\right.$$
$$\left.+\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}H_{k+1,k}(z)\,e^{-z^2t+(x'+x+2k)zi}dz\right\}. \tag{68}$$

При z вещественном

$$\overline{H_{k,e}(z)}=H_{k,e}(-z). \tag{69}$$

В силу этого

$$\overline{J}_{k,e}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{H_{k,e}(z)}e^{-z^2t-n_{k,e}zi}\,dz=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H_{k,e}(-z)e^{-z^2t-n_{k,e}zi}dz=J_{k,e}. \tag{70}$$

Равенство (70) показывает, что все интегралы $J_{k,e}$, входящие в правую часть равенства (68), имеют вещественное значение. Учитывая неравенство (62), их можно представить в виде

$$J_{k,e}=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{n_{k,e}^2}{4t}}F_{k,e}(x',\ x,\ t;\ h_0,\ h_1). \tag{71}$$

Функции $F_{k,e}(x',\ x,\ t;\ h_0,\ h_1)$ вещественны и удовлетворяют неравенство

$$|F_{k,e}(x',\ x,\ t;\ h_0,\ h_1)|\leqslant 1. \tag{72}$$

Функция $\theta(x',\ x,\ t)$ представляется разложением

$$\theta(x',\ x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x'-x+2k)^2}{4t}}F_{k,k}(x',\ x,t;\ h_0,\ h_1)+\right.$$

$$\left.+\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x'+x+2k)^2}{4t}}F_{k+1,k}(x',\ x,\ t;\ h_0,\ h_1)\right\}. \tag{73}$$

V. Функции $F_{k,e}(x',\ x,\ t;\ h_0,\ h_1)$ тесно связаны с интегралами $J_{k,e}$, в выражение которых они входят. Приступая к изучению функций $F_{k,e}(x',\ x,\ t;\ h_0,\ h_1)$, следует отметить некоторые очевидные их свойства, вытекающие из их определения и выражающиеся равенствами:

$$F_{k,k}(x',\ x,\ t;\ h_1,\ h_0)=F_{k,k}(x',\ x,\ t;\ h_0,\ h_1); \tag{74}$$

$$F_{k,k}(x,\ x',\ t;\ h_0,\ h_1)=F_{-k,-k}(x',\ x,\ t;\ h_0,\ h_1); \tag{75}$$

$$F_{k+1,k}(x,\ x',\ t;\ h_0,\ h_1)=F_{k+1,k}(x',\ x,\ t;\ h_0,\ h_1); \tag{76}$$

$$F_{k+1,k}(x',\ x,\ t;\ h_1,\ h_0)=F_{-k,-k-1}(1-x',\ 1-x,\ t;\ h_0,\ h_1). \tag{77}$$

Равенство (75) и (77) показывает, что функции $F_{k,k}(x',\ x,\ t;\ h_0,\ h_1)$ и $F_{k+1,k}(x',\ x,\ t;\ h_0,\ h_1)$ с отрицательным указателем k приводятся к функциям положительного указателя, поэтому их изучение может быть ограничено положительными значениями указателя k.

Изучение интегралов $J_{k,e}$ естественно начать с простейших случаев, отвечающих наименьшим по абсолютной величине значениям k. Рассмотрим интеграл

$$J_{0,0}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2t+n_{0,0}zi}dz. \tag{78}$$

Как указано выше, этот интеграл выражается равенством

$$J_{0,0}=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{n_{0,0}^2}{4t}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x'-x)^2}{4t}}. \tag{79}$$

Следовательно,

$$F_{0,0}(x',\ x,\ t;\ h_0,\ h_1)=1. \tag{80}$$

Когда

$$h_0=h_1=0$$

функции

$$H_{k,e}(z)=1$$

и

$$F_{k,e}(x',\ x,\ t;\ 0,\ 0)=1. \tag{81}$$

Равенство (73) принимает вид

$$\theta(x',\ x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x'-x+2k)^2}{4t}}+\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x'+x+2k)^2}{4t}}\right\},$$

откуда при $x'=0$ получается разложение $\theta_3(x,\ t)$, а при $x'=1$ разложение $\theta_4(x,\ t)$.

Если положить:

$$h_0=0;\quad h_1=\infty,$$

то

$$H_{k,\,e}(z)=(-1)^e$$

и функции

$$F_{k,\,e}(x',\ x,\ t;\ \ 0,\ \infty)=(-1)^e. \tag{82}$$

Равенство (73) принимает вид

$$\theta(x',\ x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^k e^{-\frac{(x'-x+2k)^2}{4t}}+\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^k e^{-\frac{(x'+x+2k)^2}{4t}}\right\}. \tag{83}$$

При $x'=0$ разложение (83) дает $\theta_2(x,\ t)$, при $x'=1$ разложение (83) дает $\theta_1(x,\ t)$.

Обратимся к изучению интегралов $J_{1,\,0}$ и $J_{1,\,1}$. Интеграл

$$J_{1,\,0}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z-h_0 i}{z+h_0 i}\,e^{-z^2t+n_{1,\,0}zi}\,dz$$

представляется в виде суммы двух интегралов

$$J_{1,\,0}=J_*+J_{**},$$

где

$$J_*=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2t+n_{1,\,0}zi}\,dz=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{n_{1,\,0}^2}{4t}}. \tag{84}$$

Интеграл

$$J_{**}=-\frac{h_0 i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2t+n_{1,\,0}zi}\,\frac{dz}{z+h_0 i}$$

заменой переменных приводится к интегралу

$$J_{**}=-\frac{h_0 i}{\pi}\,e^{M}\int_{-\infty+h_0 i}^{+\infty+h_0 i}e^{-z^2t+Nzi}\,\frac{dz}{z},$$

где

$$M=h_0{}^2t+n_{1,\,0}h_0;$$

$$N=2h_0t+n_{1,\,0}.$$

Производная по параметру N

$$\frac{\partial J_{**}}{\partial N}=\frac{h_0}{\pi}\,e^{M}\int_{-\infty+h_0 i}^{+\infty+h_0 i}e^{-z^2t+Nzi}\,dz=\frac{h_0}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{N^2}{4t}+M}.$$

Интегрируя по параметру N, получаем

$$J_{**} = \frac{h_0}{\sqrt{\pi t}} e^M \int_0^N e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau + C, \tag{85}$$

где постоянная C определяется равенством

$$C = -\frac{h_0 i}{\pi} e^M \int_{-\infty + h_0 i}^{+\infty + h_0 i} e^{-z^2 t} \frac{dz}{z}. \tag{86}$$

Интеграл, входящий в правую часть равенства (86), можно заменить интегралом, взятым по контуру Γ (рис. 3),

$$\int_{-\infty + h_0 i}^{+\infty + h_0 i} e^{-z^2 t} \frac{dz}{z} = \int_{\Gamma} e^{-z^2 t} \frac{dz}{z}.$$

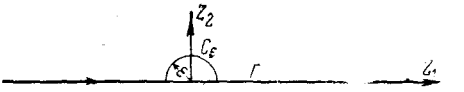


Рис. 3

Интеграл

$$\int_{\Gamma} e^{-z^2 t} \frac{dz}{z} = \int_{C_\varepsilon} e^{-z^2 t} \frac{dz}{z} = -\pi i.$$

и

$$C = -h_0 e^M.$$

Из равенства (85)

$$J_{**} = \frac{2h_0}{\sqrt{\pi}} e^M \int_0^{\frac{N}{2\sqrt{t}}} e^{-\tau^2} d\tau - h_0 e^M = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} h_0 e^M \int_{\frac{N}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau,$$

что можно представить в виде

$$J_{**} = -h_0 e^{-\frac{n_{1,0}^2}{4t}} \psi\left(\frac{N}{2t}\right). \tag{87}$$

Функция $\psi(x)$ определяется равенством

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} \int_x^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau. \tag{88}$$

Нетрудно видеть, что

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\tau^2 - 2x\tau} d\tau, \tag{89}$$

откуда

$$0 < \psi(x) < \frac{1}{\sqrt{\pi x}}. \tag{90}$$

Используя выражения J_* и J_{**}, легко найти интеграл

$$J_{1,0} = \frac{e^{-\frac{n_{1,0}^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} \left[1 - 2h_0 \sqrt{\pi t}\, \psi\left(h_0 \sqrt{t} + \frac{n_{1,0}}{2\sqrt{t}}\right)\right] \tag{91}$$

или

$$J_{1,0} = \frac{e^{-\frac{(x'+x)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} \left[1 - 2h_0 \sqrt{\pi t}\, \psi\left(h_0 \sqrt{t} + \frac{x'+x}{2\sqrt{t}}\right)\right]. \tag{92}$$

Функция $F_{1,0}(x',\ x,\ t;\ \ h_0,\ h_1)$ характеризуется равенством

$$F_{1,0}(x',\ x,\ t;\ \ h_0,\ h_1)=1-2h_0\sqrt{\pi t}\,\psi\left(h_0\sqrt{t}+\frac{x'+x}{2\sqrt{t}}\right). \qquad (93)$$

Неравенство (90) показывает, что

$$-1<F_{1,0}(x',\ x,\ t;\ \ h_0,\ h_1)<1.$$

Вычисление функции $F_{1,0}(x',\ x,\ t;\ \ h_0,\ k_1)$ легко производится по таблицам. Аналогично равенству (93) устанавливается

$$F_{0,1}(x',\ x,\ t;\ \ h_0,\ h_1)=1-2h_1\sqrt{\pi t}\,\psi\left(h_0 t+\frac{x'+x}{2\sqrt{t}}\right). \qquad (94)$$

Интеграл

$$J_{1,1}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}H_{1,1}(z)\,e^{-z^2t+n_{1,1}zi}dz$$

представляется в виде суммы

$$J_{1,1}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2t+n_{1,1}zi}\,dz-\frac{h_0(h_0+h_1)}{\pi(h_0-h_1)}i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2t+n_{1,1}zi}\,\frac{dz}{z+h_0i}-$$

$$-\frac{h_1(h_0+h_1)}{\pi(h_1-h_0)}i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2t+n_{1,1}zi}\,\frac{dz}{z+h_1i}.$$

В силу выражений (78) и (87) из последнего равенства следует, что

$$J_{1,1}=\frac{e^{-\frac{n_{1,1}^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\left[1-\frac{2h_0(h_0+h_1)}{h_0-h_1}\sqrt{\pi t}\,\psi\left(h_0\sqrt{t}+\frac{n_{1,1}}{2\sqrt{t}}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2h_1-(h_0+h_1)}{h_1-h_0}\sqrt{\pi t}\,\psi\left(h_1\sqrt{t}+\frac{n_{1,1}}{2\sqrt{t}}\right)\right] \qquad (95)$$

и

$$F_{1,1}(x',\ x,\ t;\ \ h_0,\ h_1)=1-\frac{2h_0(h_0+h_1)}{h_0-h_1}\sqrt{\pi t}\,\psi\left(h_0\sqrt{t}+\frac{n_{1,1}}{2\sqrt{t}}\right)-$$

$$-\frac{2h_1(h_0+h_1)}{h_1-h_0}\sqrt{\pi t}\,\psi\left(h_1\sqrt{t}+\frac{n_{1,1}}{2\sqrt{t}}\right). \qquad (96)$$

VI. Введем в рассмотрение интеграл

$$I_{k,e}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}H_{k,e}(z)\,e^{-z^2t+nzi}dz \qquad (97)$$

и функцию $\Phi_{k,e}(n,\ t;\ \ h_0,\ h_1)$, определяемую равенством

$$I_{k,e}=\frac{e^{-\frac{n^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\Phi_{k,e}(n,\ t;\ \ h_0,\ h_1). \qquad (98)$$

Интеграл $J_{k,e}$ и функция $F_{k,e}(x',\ x,\ t;\ \ h_0,\ h_1)$ получаются из интеграла $I_{k,e}$ и функции $\Phi_{k,e}\ (n,\ t;\ \ h_0,\ h_1)$ соответственно заменой n на $n_{k,e}$.

Как следует из определения

$$\Phi_{e,k}(n,\ t;\quad h_1,\ h_0)=\Phi_{k,e}(n,\ t;\quad h_0,\ h_1), \tag{99}$$

поэтому определение функций $\Phi_{k,e}(n,\ t;\quad h_0,\ h_1)$ может быть ограничено неотрицательными значениями указателей, удовлетворяющими условию $k \geqslant e$.

Между интегралами $I_{k,e}$ имеет место соотношение

$$I_{k+1,e}=\frac{2h_0}{k}\frac{\partial I_{k,e}}{\partial h_0}+I_{k-1,e}, \tag{100}$$

вытекающее из равенств

$$\frac{\partial I_{k,e}}{\partial h_0}=-\frac{ki}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H_{k,e}(z)\left[\frac{1}{z-h_0 i}+\frac{1}{z+h_0 i}\right]e^{-z^2t+nzi}dz$$

и

$$I_{k+1,e}-I_{k-1,e}=-\frac{2h_0 i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H_{k,e}(z)\left[\frac{1}{z-h_0 i}+\frac{1}{z+h_0 i}\right]e^{-z^2t+nzi}dz.$$

Из равенства (99) следует, что

$$\Phi_{k+1,e}(n,\ t;h_0 h_1)=\frac{2h_0}{k}\frac{\partial\Phi_{k,e}(n,\ t;\ h_0,\ h_1)}{\partial h_0}+\Phi_{k-1,e}(n,\ t;\ h_0,\ h_1). \tag{101}$$

Аналогично устанавливается равенство

$$\Phi_{k,e+1}(n,\ t;\quad h_0,\ h_1)=\frac{2h_1}{l}\frac{\partial\Phi_{k,e}(n,\ t;\quad h_0,\ h_1)}{\partial h_1}+\Phi_{k,e-1}(h,\ t;\ h_0,\ h_1). \tag{102}$$

Из равенств (99) и (101)

$$\Phi_{k+1,k}(n,\ t;\quad h_0,\ h_1)=\frac{2h_0}{k}\frac{\partial\Phi_{k,k}(n,\ t;\ h_0,\ h_1)}{\partial h_0}+\Phi_{k,k-1}(n,\ t;\ h_1,\ h_0). \tag{103}$$

Из равенств (101), (102) вытекают соотношения:

$$\Phi_{k+1,k+1}(n,\ t;\ h_0,\ h_1)=\frac{2h_1}{k}\frac{\partial\Phi_{k+1,k}(n,\ t;\quad h_0,\ h_1)}{\partial h_1}+\Phi_{k+1,k-1}(n,\ t;\ h_0,\ h_1);$$

$$\Phi_{k+1,k-1}(n,\ t;\ h_0,\ h_1)=\frac{2h_1}{k}\frac{\partial\Phi_{k,k-1}(n,\ t;\ h_0,\ h_1)}{\partial h_0}+\Phi_{k-1,k-1}(n,\ t;\quad h_0,\ h_1),$$

дающее равенство

$$\Phi_{k+1,k+1}(n,\ t;\ h_0,\ h_1)=\frac{2h_0}{k}\frac{\partial\Phi_{k+1,k}(n,\ t;\quad h_0,\ h_1)}{\partial h_1}+$$

$$+\frac{2h_0}{k}\frac{\partial\Phi_{k,k-1}(n,\ t;\quad h_0,\ h_1)}{\partial h_0}+\Phi_{k-1,k-1}(n,\ t;\quad h_0,\ h_1). \tag{104}$$

Равенства (103) и (104) позволяют установить вид функций $\Phi_{k+1,\,k}(n,\ t;\ \ h_0,\ h_1)$ и $\Phi_{k,\,k}(n,\ t;\ \ h_0,\ h_1)$ и показать, что

$$\Phi_{k,\,e}(n,\ t;\ \ h_0,\ h_1) = A_{k,\,e} + 2\sqrt{\pi t}B_{k,\,e}\psi\left(h_0\sqrt{t} + \frac{n}{2\sqrt{t}}\right) + \\ + 2C_{k,\,e}\sqrt{\pi t}\psi\left(h_1\sqrt{t} + \frac{n}{2\sqrt{t}}\right); \qquad (105)$$

$$e = k;\ \ k-1.$$

Коэффициенты $A_{k,\,e}$, $B_{k,\,e}$, $C_{k,\,e}$ зависят от n, t; h_0, h_1. Они являются полиномами относительно n и t и рациональными функциями относительно h_0, h_1. Подробное исследование их свойств вместе с общим их выражением и формулами для их последовательного вычисления будет доложено в дальнейшем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. ГТТИ, 1952.
2. Jacobi C. G. J. reine und angew. Math., B. III, 1828.
3. Jacobi C. G. Gesammelte Werke. B. I, 1881.
4. Landsberg J. reine und angew. Math., B. CXI, 1893.