*Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLI, вып. 1, 1959 г.*

# НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И УСЛОВИЯ РАЗРУШЕНИЯ ГОРНОГО МАССИВА ПРИ СТАТИЧЕСКИ ПРИЛОЖЕННОЙ НАГРУЗКЕ

*В. Г. Лабазин*

В статье рассматриваются вопросы, связанные с расчетом условий разрушения хрупких горных пород статически приложенной нагрузкой. Горный массив рассматривается как бесконечное полупространство, находящееся под действием нормально приложенной к границе нагрузки.

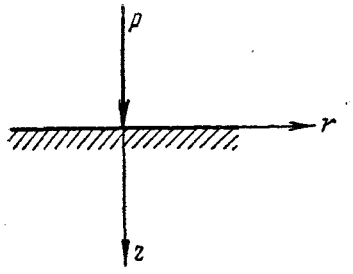


Рис. 1.

Применением некоторых результатов теории упругости изучено напряженное состояние массива в начале разрушения и подсчитана работа, необходимая для разрушения определенного объема породы. Результаты распространены на случай анизотропного горного массива.

1. Поле напряжений, возникающих в однородном изотропном полупространстве от действия на его границе нормальной силы $P$, определяется выражениями

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{P}{2\pi}\left\{(1-2\nu)\left[\frac{1}{r^2}-\frac{z}{r^2}(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right]-3r^2z(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}\\ \sigma_z &= -\frac{3P}{2\pi}z^3(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\end{aligned}\right\}; \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{P}{2\pi}(1-2\nu)\left[-\frac{1}{r^2}+\frac{z}{r^2}(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}+z(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right]\\ \tau_{rz} &= -\frac{3P}{2\pi}rz^2(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

где $\nu$ — коэффициент Пуассона;

$rz$ — цилиндрические координаты рассматриваемой точки полупространства;

$\sigma_r$, $\sigma_\theta$, $\tau_{rz}$ — составляющие напряжения в цилиндрических координатах (см. рис. 1).

Вывод выражений (1) и (2), являющихся решением известной задачи Буссинеска, имеется в книге С. П. Тимошенко [1]. Используя решение задачи Буссинеска, можно получить распределение напряжений в полупространстве, возникающих от приложенной нормально к поверхности и распределенной по любому закону системе напряжений.

2. Рассмотрим вопрос о распределении напряжений в изотропном полупространстве, возникающих под действием нагрузки интенсивности $p$, равномерно распределенной по площади круга радиуса $a$ (рис. 2). Выделим на загруженной площади бесконечно малый элемент $ds$ и подсчитаем напряжения, возникающие от нагрузки на элемент $pds$, в некоторой точке $M$ полупространства с координатами $rz$. Обозначим $\sigma_r$, $\sigma_\theta$ и $\sigma_z$ — составляющие напряжения от действия сосредоточенной силы на элемент $ds$ в системе координат $r$, $\Theta$, $z$ (рис. 3). Тогда составляющие напряжения от той же нагрузки в системе $r$, $\Theta$, $z$ запишутся в виде

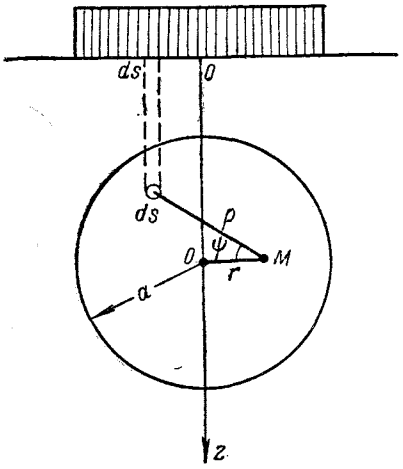


Рис. 2

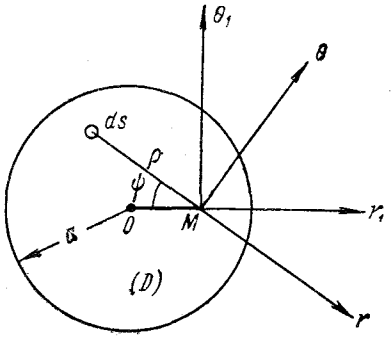


Рис. 3.

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{r_1} &= \sigma_r \cos^2\psi + \sigma_\theta \sin^2\psi \\
\sigma_{\theta_1} &= \sigma_r \sin^2\psi + \sigma_\theta \cos^2\psi \\
\sigma_{z_1} &= \sigma_z \\
\tau_{r_1\theta_1} &= (\sigma_\theta - \sigma_r)\cos\psi \sin\psi \\
\tau_{r_1 z_1} &= \tau_{rz}\cos\psi \\
\tau_{\theta_1 z_1} &= -\tau_{rz}\sin\psi
\end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Напряжения, возникающие в точке $M$ на глубине $z$ от всей нагрузки, распределенной по кругу, находятся интегрированием по всей площади круга $D$ выражений (3), причем $\sigma_r$, $\sigma_\theta$, $\sigma_z$ и $\tau_{rz}$ определяются формулами (1), в которых $P=pds$, $r=\rho$.

Учитывая сказанное, получим

$$\sigma_r = \iint\limits_{(D)} \frac{p}{2\pi}\left\{(1-2\nu)\left[\frac{1}{\rho^2} - \frac{z}{\rho^2}(\rho^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right] - 3\rho^2 z(\rho^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\right\}\cos^2\psi ds + \iint\limits_{(D)} \frac{p}{2\pi}(1-2\nu)\left[-\frac{1}{\rho^2} + \frac{z}{\rho^2}(\rho^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} + z(\rho^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right]\sin^2\psi ds; \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z &= -\iint\limits_{(D)} \frac{3p}{2\pi} z^3 (\rho^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}\, ds \\ \tau_{rz} &= -\iint\limits_{(D)} \frac{3p}{2\pi} z^2 \rho (\rho^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}\, ds\end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Индексы у обозначений напряжений для краткости опущены. Выражение для $\sigma_\theta$, аналогичное (4), не выписано, так как в дальнейшем не понадобится для расчета касательных напряжений. Величина $\tau_{\theta z} = 0$, так как полупространство загружено симметрично относительно оси $Oz$.

Вычисление двойных интегралов проводим в полярной системе $\rho$, $\psi$ (рис. 3). При этом, с учетом симметрии по углу $\psi$,

$$0 \leqslant \rho < R;$$

$$0 \leqslant \psi \leqslant \pi,$$

для случая, когда исследуемая точка полупространства $M$ отвечает внутренности загруженного круга. $R = R(\psi)$ определяется контуром области $D$. Очевидно,

$$R = r\cos\psi + \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2\psi}.$$

Интегрирование по $\rho$ в выражениях (4) и (5) выполняется в конечном виде, после чего получаем

$$\sigma_r = \frac{1-2\nu}{\pi} p \int_0^\pi \ln\left(\sqrt{R^2 + z^2} + z\right) \cos 2\psi d\psi +$$

$$+ \frac{p}{2\pi} \int_0^\pi \left[ -(1+2\nu) + 2(1+\nu) \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)^3 \right] d\psi + \frac{p}{2\pi} \int_0^\pi \left[ 2(2-\nu) \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)^3 \right] \cos 2\psi d\psi; \tag{6}$$

$$\sigma_z = -p + \frac{pz^3}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\psi}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; \tag{7}$$

$$\tau_{rz} = -\frac{p}{\pi} \int_0^\pi \frac{R^3 \cos\psi}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\psi. \tag{8}$$

Как отмечалось, эти формулы выведены в предположении, что точка полупространства, в которой вычисляются напряжения, находится на вертикали, удовлетворяющей условию $0 \leqslant r < a$. Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \ln\left(\sqrt{R^2+\frac{z^2}{a^2}}+\frac{z}{a}\right)\cos 2\psi d\psi \\
I_2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\frac{z}{a}}{\sqrt{R_1^2+\frac{z^2}{a^2}}}\,d\psi \\
I_3 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{\frac{z}{a}}{\sqrt{R_1^2+\frac{z^2}{a^2}}}\right)^3 d\psi \\
I_4 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\frac{z}{a}}{\sqrt{R_1^2+\frac{z^2}{a^2}}}\cos 2\psi d\psi \\
I_5 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{\frac{z}{a}}{\sqrt{R_1^2+\frac{z^2}{a^2}}}\right)^3 \cos 2\psi d\psi \\
I_6 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+\frac{z^2}{a^2}}}\right)^3 \cos\psi d\psi
\end{aligned}\right\}. \qquad (9)$$

$$R_1 = \frac{r}{a}\cos\psi + \sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}\sin^2\psi} \qquad (10)$$

Учитывая (6), (9) и (10), находим следующие окончательные выражения

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= (1-2\nu)pI_1 - \frac{p}{2}(1+2\nu) + 2p(1+\nu)I_2 - \\
&\quad - pI_3 + 2p(2-\nu)I_4 - pI_5 \\
\sigma_z &= -p + 2pI_3 \\
\tau_{rz} &= -pI_6
\end{aligned}\right\}. \qquad (11)$$

Формулы (11) удобно использовать для численного расчета поля напряжений в полупространстве. Входящие в выражение (11) интегралы $I_1$—$I_6$ табулированы и их значения приведены в табл. 1.

Таблица 1

| $\frac{z}{a}$ | $\frac{r}{a}$ = 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $I_1$ | | | | $I_2$ | | | |
| 0,2 | 0,0013 | 0,0017 | 0,0142 | 0 0115 | 0,1009 | 0,1106 | 0,1327 | 0,1849 |
| 0,4 | 0,0017 | 0,0075 | 0,0248 | 0.0552 | 0 1877 | 0 2038 | 0,2312 | 0,2834 |
| 0,6 | 0,0019 | 0,0085 | 0,0211 | 0.0495 | 0,2615 | 0,2746 | 0,2979 | 0,3316 |
| 0,8 | 0,0020 | 0,0082 | 0,0208 | 0 0310 | 0,3158 | 0,3264 | 0,4441 | 0,3671 |
| 1 | 0,0083 | 0,0074 | 0,0178 | 0,0340 | 0,3563 | 0,3640 | 0,3765 | 0,3927 |
| | $I_3$ | | | | $I_4$ | | | |
| 0,2 | 0,0043 | 0,0067 | 0,0150 | 0,0550 | 0,0004 | 0 0019 | 0 0053 | 0,0113 |
| 0,4 | 0,0249 | 0,0397 | 0,0698 | 0,1438 | 0,0025 | 0 0018 | 0 0 31 | 0 0 000 |
| 0,6 | 0,0738 | 0,0933 | 0,1472 | 0,2044 | 0,0 002 | 0,0003 | −0,0011 | −0,0090 |
| 0,8 | 0,1289 | 0,1499 | 0,1908 | 0,2482 | −0,0002 | −0, 012 | −0,0 050 | −0,0135 |
| 1 | 0,1835 | 0,2036 | 0,2372 | 0,2828 | −0,0002 | −0 0023 | 0,0064 | −0,0151 |
| | $I_5$ | | | | $I_6$ | | | |
| 0,2 | 0,0 02 | 0,0009 | 0,0039 | 0 0182 | 0,0112 | 0,0296 | 0 0617 | 0,1564 |
| 0,4 | 0,0019 | 0,0037 | 0,0118 | 0,0230 | 0,0394 | 0 0788 | 0,1396 | 0,2260 |
| 0,6 | 0 0013 | 0,0054 | −0,0038 | 0,0105 | 0,0510 | 0,0978 | 0,1659 | 0,2212 |
| 0,8 | 0,0012 | 0 0045 | 0,0052 | −0,0079 | 0,0557 | 0,1125 | 0,1592 | 0,1966 |
| 1 | 0,0006 | −0,0026 | 0,0000 | 0,0063 | 0,0524 | 0,1025 | 0,1452 | 0,1679 |

Заметим, что при $r=0$ оказывается $R=a$, и интегралы в (6)—(8) вычисляются в конечном виде. Производя вычисления, получим

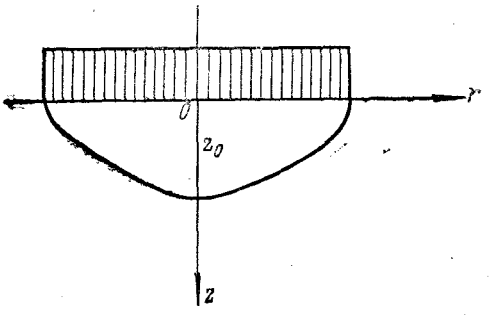


Рис. 4.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p}{2}\left[-(1+2\nu)+\right.\\ &\quad +\frac{2(1+\nu)}{\sqrt{a^2+z^2}}z-\\ &\quad \left.-\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)^3\right]\\ \sigma_z &= p\left[-1+\frac{z^3}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\\ \tau_{rz} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Формулы (12) совпадают с известными выражениями напряжений в точках оси $Oz$ [1, стр. 368—369].

3. Полученные результаты позволяют приблизительно установить величину максимальных касательных напряжений, возникающих в полупространстве в условиях поставленной задачи.

Этот вопрос представляет интерес в связи с тем, что во многих случаях причиной разрушения хрупких горных пород являются касательные напряжения.

Для оси $Oz$ (рис. 2) максимальное касательное напряжение

$$\tau_{max}=\frac{p}{2}\left[\frac{1-2\nu}{2}+\frac{2}{9}(1+\nu)\sqrt{2(1+\nu)}\right] \quad (13)$$

достигается в точке [1, стр. 370].

$$z_0 = a\sqrt{\frac{2(1+\nu)}{7-2\nu}}. \qquad (14)$$

Для подсчета $\tau_{max}$ при $\frac{r}{a} = 0{,}2 \div 0{,}8$ находим $\sigma_r$, $\sigma_z$ и $\tau_{rz}$ по формулам (11), приняв $\nu = 0{,}25$ (подсчет для другого $\nu$ не представляет особых затруднений, так как $I_1 - I_6$ от $\nu$ не зависят). Далее находим наибольшее касательное напряжение

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{rz}^2}. \qquad (15)$$

Результаты расчета $\nu = 0{,}25$ приведены в табл. 2, откуда видно, что максимальное касательное напряжение на каждой вертикали имеет порядок $0{,}34p$ и достигается на различных глубинах (рис. 4).

Таблица 2

| $\frac{z}{a}$ | $\frac{r}{a}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 |
| | | | $\sigma_r$ | | |
| 0 | −0,75 | −0,75 | −0,75 | −0,75 | −0,75 |
| 0,2 | −0,507 | −0,500 | −0,444 | −0,417 | −0,316 |
| 0,4 | −0,313 | −0,298 | −0,274 | −0,231 | −0,181 |
| 0,6 | −0,175 | −0,170 | −0,157 | −0,142 | −0,143 |
| 0,8 | −0,091 | −0,090 | −0,088 | −0,093 | −0,104 |
| 1 | −0,046 | −0,040 | −0,045 | −0,059 | −0,080 |
| | | | $\tau_{rz}$ | | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,2 | 0 | −0,0112 | −0,0296 | −0,0617 | −0,1564 |
| 0,4 | 0 | −0,0394 | −0,0788 | −0,1396 | −0,2260 |
| 0,6 | 0 | −0,0510 | −0,0978 | −0,1659 | −0,2212 |
| 0,8 | 0 | −0,0577 | −0,1125 | −0,1592 | −0,1966 |
| 1 | 0 | −0,0524 | −0,1025 | −0,1452 | −0,1679 |
| | | | $\sigma_z$ | | |
| 0 | −1 | −1 | −1 | −1 | −0 |
| 0,2 | −0,992 | −0,991 | −0,987 | −0,970 | −0,890 |
| 0,4 | −0,949 | −0,950 | −0,921 | −0,860 | −0,712 |
| 0,6 | −0,864 | −0,852 | −0,813 | −0,706 | −0,591 |
| 0,8 | −0,756 | −0,742 | −0,700 | −0,618 | −0,504 |
| 1 | −0,646 | −0,633 | −0,593 | −0,526 | −0,434 |
| | | | $\tau_{max}$ | | |
| 0 | 0,125 | 0,125 | 0,125 | 0,125 | 0,125 |
| 0,2 | 0,243 | 0,2460 | 0,2579 | 0,283 | 0,326 |
| 0,4 | 0,318 | 0,3286 | 0,3329 | 0,344 | 0,349 |
| 0,6 | 0,344 | 0,3453 | 0,3426 | 0,327 | 0,315 |
| 0,8 | 0,333 | 0,3308 | 0,3410 | 0,307 | 0,280 |
| 1 | 0,300 | 0,3006 | 0,2922 | 0,275 | 0,244 |

Следовательно, максимальные касательные напряжения, возникающие в полупространстве, имеют приближенно величину (13) и достигаются на некоторой поверхности, образованной вращением кривой рис. 4 вокруг оси $Oz$.

Таким образом, если считать причиной разрушения материала полупространства наличие скалывающих напряжений, то можно заключить, что из полупространства выколется некоторый объем, по форме напоминающий параболоид вращения. Поэтому объем выколотой части материала можно приближенно принять равным

$$V_0 = \frac{1}{2}\pi a^2 z_0, \tag{16}$$

где $z_0$ определяется формулой (14).

4. Рассмотрим задачу, аналогичную предыдущей, в предположении, что полупространство загружено по площади круга симметрично распределенной по параболическому закону системой напряжений (рис. 5).

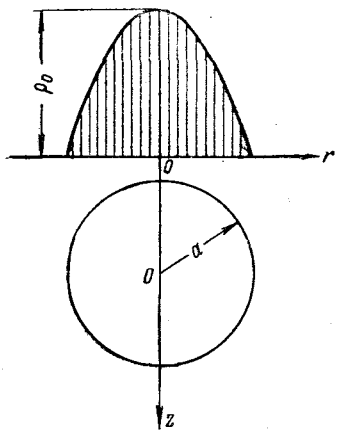


Рис. 5.

Допустим, что эпюра напряжений в сечении плоскостью, проходящей через ось $Oz$, ограничена параболой с уравнением

$$p = \frac{p_0}{a^2}(a^2 - r^2), \tag{17}$$

где $p_0$ — давление в центре круга.

Поле напряжений и в этом случае определится выражениями (4) и (5), но в отличие от предыдущего случая, в них следует положить, согласно формуле (17),

$$p = \frac{p_0}{a^2}(a^2 - \rho^2).$$

В дальнейшем ограничиваемся рассмотрением вопроса о распределении касательных напряжений на оси $Oz$. В этом случае $\tau_{rz} = 0$, поэтому в силу выражения (15), главное касательное напряжение в любой точке оси $Oz$ определяется выражением

$$\tau = \left|\frac{\sigma_z - \sigma_r}{2}\right|.$$

Подставив сюда выражения (4) и (5) и произведя интегрирование по переменной $\psi$, после упрощений получим

$$\tau = \frac{1}{2}\int_0^a \left[-(1+\nu)\,z\,(\rho^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{9}{2}z^3(\rho^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\right] \times$$

$$\times \frac{p_0}{a^2}(a^2-\rho^2)\,\rho\,d\rho.$$

Вычисляя интеграл, после некоторых преобразований выражение для $\tau$ можно представить в виде

$$\tau = \frac{p_0}{2}\left[\frac{2(1+\nu)u - 3u^3}{1+u^2} + \frac{1}{2} - \nu\right], \tag{18}$$

где

$$u = \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}. \tag{19}$$

Исследуя выражение (17), находим, что $\tau$ имеет максимум

$$\tau_{max} = \frac{p_0}{2}\left(8{,}5 + \nu - 2\sqrt{15 + 6\nu}\right), \tag{20}$$

который достигается при

$$u = \frac{\sqrt{15 + 6\nu} - 3}{3}. \tag{21}$$

Формула (20) аналогична формуле (13) для случая равномерной нагрузки полупространства по площади круга.

Для сопоставления величин $\tau_{max}$, отвечающих равномерной и параболической нагрузке, приняв $\nu = 0{,}3$; $p = 1$; $p_0 = 2$, по формулам (13) и (20) найдем $\tau_{max} = 0{,}6$ (напряжения распределены по параболическому закону); $\tau_{max} = 0{,}33$ (равномерное распределение напряжений).

В случае параболического распределения напряжений $\tau_{max}$ достигается при $z_0 \approx 0{,}4\ a$, в случае равномерного — при $z_0 \approx 0{,}64\ a$. Все величины подсчитаны в предположении, что общая суммарная нагрузка на полупространство одинакова для равномерного и для параболического распределения напряжений.

5. Для оценки величины энергоемкости процесса разрушения материала полупространства установим величину потенциальной энергии деформации полупространства, загруженного по площади круга равномерно и по параболическому закону.

Если допустить, что энергия деформации $A$ равна работе внешних сил, то получим

$$A = \iint\limits_{(D)} ds \int\limits_0^w p\,dw, \tag{22}$$

где $w$ — смещение по оси $Oz$ граничных точек полупространства под действием внешних сил.

Для равномерной загрузки по площади круга

$$w = \frac{4p(1 - \nu^2)}{\pi E} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi, \tag{23}$$

где $E$ — модуль Юнга материала полупространства [1, стр. 367].

Это выражение можно представить в виде

$$w = p\gamma I(r), \tag{24}$$

где

$$\gamma = \frac{4(1 - \nu^2)}{\pi E};$$

$$I_r = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

Подставив $p$ из равенств (23) и (21), найдем

$$A=\iint\limits_{(D)} ds \int\limits_0^w \frac{w}{\gamma I(r)}\, dw = \frac{1}{2}\iint\limits_{(D)} \frac{w^2}{\gamma I(r)}\, ds.$$

Так как в силу выражения (23)

$$\gamma I(r) = \frac{w}{p},$$

окончательно находим

$$A=\frac{1}{2}\iint\limits_{(D)} pw\, ds. \tag{25}$$

Эта формула справедлива и для случая неравномерного распределения давления.

Подставив выражение (23) в формулу (25) и вычислив двойной интеграл в полярных координатах, найдем

$$A=\frac{2(1-\nu^2)p^2}{\pi E}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-r^2\sin^2\psi}\, d\psi\right] r\, dr =$$

$$=\frac{4\pi(1-\nu^2)p^2}{\pi E}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^a \sqrt{a^2-r^2\sin^2\psi}\, r\, dr,$$

окончательно

$$A=\frac{8(1-\nu^2)p^2a^3}{3E}. \tag{26}$$

Формула (26), как указывалось выше, отвечает случаю равномерного распределения давления по площади круга.

Для подсчета энергии деформации в случае параболического распределения напряжений выведем выражение $w$. Известна формула [2, стр. 162—165]

$$w=\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} S\, d\varphi, \tag{27}$$

где $S$ — площадь сечения эпюры напряжений плоскостью, параллельной оси $Oz$ и отстоящей от нее на расстоянии $r\sin\varphi$, т. е. площадь сечения эпюры на хорде $l$ (рис. 6).

Легко проверить, что для параболического распределения напряжений, отвечающего рис. 5, получим

$$S=\frac{4}{3}\frac{p_0}{a^2}(a^2-r^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}.$$

Подставив это выражение в выражение (27) и далее в (25), найдем

$$A=\frac{4p_0(1-\nu^2)}{3\pi Ea^2}\iint\limits_{(D)}\left[\frac{p_0(a^2-r^2)}{a^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2-r^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\, d\varphi\right] ds.$$

Вычисляя двойной интеграл в полярных координатах и меняя порядок интегрирований, выводим

$$A=\frac{8p_0^2(1-\nu^2)}{3Ea^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^a(a^2-r^2)(a^2-r^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}rdr\right]d\varphi.$$

Выполняя интегрирование, окончательно находим

$$A=\frac{256}{315}\frac{(1-\nu^2)p_0^2a^3}{E}. \tag{28}$$

Для более удобного сопоставления выражений (26) и (28) введем в рассмотрение $P$ — полную нагрузку, действующую на загруженный круг. Тогда

$$P=\pi a^2p \text{ и } P=\frac{1}{2}\pi a^2p_0.$$

Выражая $p$ и $p_0$ через $P$ и подставляя в формулы (26) и (28), получим

$A=2{,}67\frac{(1-\nu^2)P^2}{\pi a^2E}$ (равномерное распределение напряжений);

$A=3{,}24\frac{(1-\nu^2)P^2}{\pi a^2E}$ (параболическое распределение напряжений).

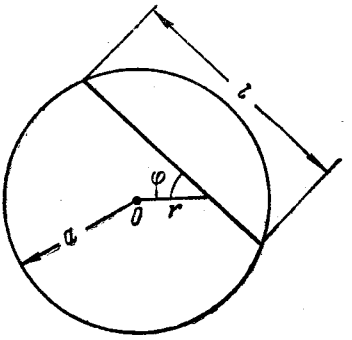


Рис. 6.

Отсюда видно, что различное распределение действующей по площади круга нагрузки незначительно отражается на энергии деформации.

6. Полученные результаты позволяют установить работу, которую нужно затратить, чтобы из материала полупространства выкололся определенный объем $V$.

Обозначим через $\tau_r$ разрушающее скалывающее напряжение материала полупространства. Согласно формуле (13), этому $\tau_r$ отвечает

$$p=\frac{2\tau_r}{\frac{1-2\nu}{2}+\frac{2}{9}(1+\nu)\sqrt{2(1+\nu)}}.$$

Соответствующая энергия деформации определяется по формуле (25)

$$A=\frac{8(1-\nu^2)}{3E}\frac{4\tau_r^2}{\left[\frac{1-2\nu}{2}+\frac{2}{9}\sqrt{2}(1+\nu)^{\frac{3}{2}}\right]^2}a^3. \tag{29}$$

Объем $V$, выколотый из полупространства, определяется по формуле (16), причем $z_0$ подставляется из выражения (14)

$$V=\frac{1}{2}\pi a^3\sqrt{\frac{2(1+\nu)}{7-2\nu}}. \tag{30}$$

Используя формулу (29), выражение (28) можно представить в виде

$$A=kV\frac{\tau_r^2}{E}, \tag{31}$$

где коэффициент $k$ определяется равенством

$$k=\frac{32\sqrt{2}}{3\pi}\frac{(1-\nu^2)\sqrt{7-2\nu}}{\left[\frac{1-2\nu}{2}+\frac{2}{9}\sqrt{2}(1+\nu)^{\frac{3}{2}}\right]^2\sqrt{1+\nu}}$$

(для $\nu=0{,}25$ $k=21{,}6$; для $\nu=0{,}35$ $k=22$).

Формула (31) позволяет приближенно оценить работу, которую можно затратить на выкалывание из полупространства объема $V$. Зависимость, аналогичную (31), легко выписать и для случая параболического распределения напряжений, используя формулу (19) и считая, что выколотый объем близок по форме к параболоиду вращения.

7. Рассмотрим вопрос об определении максимального касательного напряжения с учетом анизотропии полупространства. Предположим, что полупространство загружено равномерно по площади круга радиуса $a$ (рис. 2). Допустим, что упругие свойства полупространства во всех направлениях, параллельных граничной плоскости, одинаковы и характеризуются упругими постоянными $E$ (модулем Юнга), $\nu$ (коэффициентом Пуассона) и $G$ (модулем сдвига). Упругие постоянные, отвечающие направлению, перпендикулярному граничной плоскости, обозначим $E'$ и $\nu'$.

Воспользуемся следующим решением задачи о распределении напряжений в упругом полупространстве под действием симметричной нормальной нагрузки, полученным С. Г. Лехницким [3, стр. 274—277]

$$\sigma_r=-\frac{1}{(s_1-s_2)\sqrt{d}}\int_0^\infty t\psi(t)\left(s_1e^{-s_1tz}-s_2e^{-s_2tz}\right)I_0(tr)\,dt+$$

$$+\frac{\lambda}{s_1-s_2}\frac{1}{r}\int_0^\infty\psi(t)\left(s_1p_2e^{-s_1tz}-s_2p_1e^{-s_2tz}\right)I_1(tr)\,dt; \tag{32}$$

$$\sigma_z=\frac{1}{s_1-s_2}\int_0^\infty t\psi(t)\left(s_2e^{-s_1tz}-s_1e^{-s_2tz}\right)I_0(tr)\,dt; \tag{33}$$

$$\tau_{rz}=\frac{1}{(s_1-s_2)\sqrt{d}}\int_0^\infty t\psi(t)\left(e^{-s_1tz}-e^{-s_2tz}\right)I_1(tr)\,dt, \tag{34}$$

где

$$\left.\begin{aligned}s_{1,2}&=\sqrt{\frac{a+c\pm\sqrt{(a+c)^2-4d}}{2d}}\\ a&=\frac{a_{13}(a_{11}-a_{13})}{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}\\ c&=\frac{a_{13}(a_{11}-a_{12})+a_{11}a_{44}}{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}\\ d&=\frac{a_{11}^2-a_{12}^2}{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}\end{aligned}\right\}; \tag{35}$$

$$\left.\begin{aligned} p_1 = 1 - as_1^2;\quad p_2 = 1 - as_2^2;\quad \lambda = \frac{1-\nu}{\sqrt{d}} \\ a_{11} = \frac{1}{E};\ a_{12} = -\frac{\nu}{E};\ a_{33} = \frac{1}{E'} \\ a_{13} = -\frac{\nu'}{E'};\ a_{44} = \frac{1}{G'} \\ 2(a_{11} - a_{12}) = \frac{2(1+\nu)}{E} = \frac{1}{G} \end{aligned}\right\}. \tag{36}$$

Система обозначений (35)—(36) заимствована из книги С. Г. Лехницкого [3]. Функция $\psi(t)$ в формулах (33) и (34) определяется равенством

$$\psi(t) = \int_0^\infty p(\xi)\,\xi I_0(\xi t)\,d\xi, \tag{37}$$

где $p(\xi)$ — интенсивность нагрузки, действующей на полупространство.

В нашем случае

$$p(\xi) = p_0 = \text{const};\quad 0 \leqslant \xi < a;$$
$$p(\xi) = 0;\quad a < \xi < +\infty.$$

Поэтому, согласно выражению (36), находим

$$\psi(t) = p_0 \int_0^a \xi I_0(\xi t)\,d\xi = p_0 a \frac{I_1(at)}{t}. \tag{38}$$

Ограничиваясь случаем распределения напряжений на оси $Oz$ (рис. 2), положим в формулах (31) — (33) $r = 0$

$$\sigma_r = -\frac{1}{(s_1 - s_2)\sqrt{d}} \int_0^D t\psi(t)\,(s_1 e^{-s_1 tz} - s_2 e^{-s_2 tz})\,dt +$$

$$+ \frac{\lambda}{2(s_1 - s_2)} \int_0^D t\psi(t)\,(s_1 p_2 e^{-s_1 tz} - s_2 p_1 e^{-s_2 tz})\,dt; \tag{39}$$

$$\sigma_z = \frac{1}{s_1 - s_2} \int_0^\infty t\psi(t)\,(s_2 e^{-s_1 tz} - s_1 e^{-s_2 tz})\,dt; \tag{40}$$

$$(\tau_{rz} = 0).$$

Подставив выражение (38) в (39) и (40), и использовав известный интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} I_1(\beta x)\,dx = \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right),$$

вычислим $\sigma_z$ и $\sigma_r$

$$\sigma_z = p_0\left[-1 + \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2}\left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + s_2^2 z^2}} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + s_1^2 z^2}}\right)\right]; \tag{41}$$

$$\sigma_r = -\frac{p_0}{(s_1 - s_2)\sqrt{d}}\left[s_1 - s_2 + \frac{s_2^2 z}{\sqrt{a^2 + s_2^2 z^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{s_1^2 z}{\sqrt{a^2 + s_1^2 z^2}}\right] + \frac{\lambda p_0}{2(s_1 - s_2)}\left[s_1 p_2 - s_2 p_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{s_2^2 p_1 z}{\sqrt{a^2 + s_2^2 z^2}} - \frac{s_1^2 p_2 z}{\sqrt{a^2 + s_1^2 z^2}}\right]. \qquad (42)$$

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{z}{\sqrt{a^2 + s_1^2 z^2}} \\ v &= \frac{z}{\sqrt{a^2 + s_2^2 z^2}} \end{aligned}\right\}. \qquad (43)$$

Тогда, согласно формуле (15), наибольшее касательное напряжение $\tau$ оси $Oz$ можно представить в виде

$$\tau = A + B\frac{u - v}{s_1 - s_2} + C\frac{s_2^2 v - s_1^2 u}{s_1 - s_2}, \qquad (44)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A &= p_0\left[-\frac{1}{\sqrt{d}} + \frac{\lambda}{2}(1 + a s_1 s_2) + 1\right] \\ B &= p_0\left(\frac{\lambda}{2} a s_1^2 s_2^2 + s_1 s_2\right) \\ C &= p_0\left(-\frac{1}{\sqrt{d}} + \frac{\lambda}{2}\right) \end{aligned}\right\}. \qquad (45)$$

Как показывает исследование, выражение (4) имеет максимум при

$$z = a\sqrt{\frac{m - 1}{s_2^2 - m s_1^2}}, \qquad (46)$$

где

$$m = \left(\frac{B - C s_2^2}{B - C s_1^2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Подсчитав соответствующие $u$ и $v$, согласно формуле (43), и подставив их в выражение (44), найдем

$$\tau_{\max} = \frac{A}{2} + \frac{s_1 + s_2}{2}\left[\frac{(B - C s_1^2)^{\frac{2}{3}} - (B - C s_2^2)^{\frac{2}{3}}}{s_1^2 - s_2^2}\right]^{\frac{3}{2}}. \qquad (47)$$

Формула (13) для изотропной среды получается как частный случай (46) предельным переходом $s_1 \to 1$ и $s_2 \to 1$.

Численные расчеты по формуле (47) довольно громоздки и требуют знания соответствующего набора упругих постоянных. Так, например, при

$$E = 4 \cdot 10^4 \ кг/см^2; \quad E' = 2{,}7 \cdot 10^4 \ кг/см^2;$$

$$G = 1{,}6 \cdot 10^4; \quad G' = 0{,}96 \cdot 10^4;$$

$$\nu = 0{,}27; \quad \nu' = 0{,}4,$$

получим

$$\tau_{max} = 0{,}275 p_0.$$

«Опасная» точка оси $Oz$, в которой достигается $\tau_{max}$, определяется формулой (46). В приведенном примере $z_0 = 0{,}661\ a$ ($a$ — радиус загруженного круга).

Если принять $G = G'$ и $E = E'$, то при $\nu$, равном 0,27 и 0,4, соответственно получим по формуле (13) $\tau_{max} = 0{,}40\ p_0$ и $\tau_{max} = 0{,}31\ p_0$.

Приведенный пример показывает, что учет анизотропии не меняет существенно величину $\tau_{max}$, определяемую формулой (13).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Тимошенко С. П. Теория упругости, ОНТИ, 1937.
2. Безухов Н. И. Введение в теорию упругости и пластичности. Стройиздат, 1950.
3. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, 1950.