Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLI, вып. 2, 1961 г.

К РАСЧЕТУ СКОРОСТИ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ТЕЛ В СРЕДЕ

Б. Б. Кудряшов

Количественное определение скорости свободного падения тел в жидкой или газообразной среде имеет важнейшее значение в теории гидравлического и пневматического транспорта, гравитационных методов обогащения, для расчета ряда аппаратов, машин, технологических процессов и, в частности, лежит в основе расчета потребного расхода жидкого или газообразного промывочного агента для выноса шлама при бурении скважин.

При свободном падении в среде тело достигает конечной скорости [1], когда сила сопротивления среды становится равной движущей силе веса тела в среде.

Сопротивление, испытываемое телом определенной формы при его движении в среде, зависит от условий и режима движения, характеризующихся безразмерным числом Рейнольдса *Re*. Доступными непосредственному теоретическому разрешению оказались лишь частные случаи движения шаров, характеризующиеся определенными, достаточно узкими интервалами значений *Re*.

Накопленный к настоящему времени богатый экспериментальный материал и предложенный в 1938 г. советским ученым П. В. Лященко новый безразмерный параметр *Li* * позволяют на основе зависимости между *Li* и *Re* получить эмпирическую формулу конечной скорости, а также выражение для коэффициента сопротивления, пригодные для практических расчетов в весьма широком диапазоне значений *Re*.

В настоящей работе делается попытка обобщения данных многочисленных экспериментальных исследований движения шаровидных тел в среде, по которым построена известная диаграмма Рэлея, в виде эмпирических формул, пригодных для определения конечной скорости и коэффициента сопротивления в интервале значений *Re* от 1 до 100 000. Указанный интервал включает почти всю известную область значений *Re*, за исключением ползущих движений ($Re<1$), хорошо отражаемых формулой Стокса, и «кризиса обтекания», не представляющих интереса для большинства прикладных расчетов.

---

[1] Конечную скорость, т. е. скорость равномерного падения, в гравитационном обогащении называют «критической», в пневмотранспорте — скоростью «витания» или «парения», в гидравлике — «гидравлической крупностью».

* Обозначение *Li* для критерия П. В. Лященко принято здесь в соответствии с вполне обоснованным предположением В. А. Олевского [10].

Приведем исходные выражения и примем обозначения (все величины выражены в системе CGS):

v — конечная скорость движения частицы относительно среды (или среды относительно частицы), *см/сек*;

d — диаметр частицы сферической формы, *см*;

r — радиус шаровидной частицы, *см*;

δ — плотность вещества частицы, *г/см*^{3};

Δ — плотность среды, *г/см*^{3};

μ — коэффициент вязкости среды, *пуаз*;

g — ускорение силы тяжести (981 *см/сек*^{2});

Re — безразмерное число (параметр) Рейнольдса,

$$Re = \frac{vd\Delta}{\mu}; \tag{1}$$

ψ — коэффициент сопротивления по Рэлею,

$$\psi = \frac{\pi g d}{6v^2}\left(\frac{\delta - \Delta}{\Delta}\right); \tag{2}$$

c и Q — коэффициенты сопротивления соответственно по Л. Прандтлю и А. М. Годэну,

$$c = Q = \frac{4}{3}\frac{gd}{v^2}\left(\frac{\delta - \Delta}{\Delta}\right) \tag{3}$$

λ — коэффициент сопротивления по М. А. Великанову — А. П. Зегжда,

$$\lambda = \frac{1}{2}\frac{gd}{v^2}\left(\frac{\delta - \Delta}{\Delta}\right); \tag{4}$$

все коэффициенты связаны соотношениями

$$\psi = \frac{\pi}{8}c = \frac{\pi}{3}\lambda; \tag{5}$$

Li — безразмерное число (параметр) П. В. Лященко,

$$Li = \psi Re^2 \frac{\pi g d^3}{6}(\delta - \Delta)\frac{\Delta}{\mu^2}; \tag{6}$$

G_0 — движущая сила веса тела в среде (результирующая веса тела и подъемной силы среды, действующей в соответствии с законом Архимеда), *дн*,

$$G_0 = \frac{\pi d^3}{6}(\delta - \Delta)g. \tag{7}$$

1. Краткий обзор существующих методов расчета критической скорости

По современным представлениям тело, движущееся в жидкой или газообразной среде, испытывает сопротивления двоякого рода: а) сопротивление давления или формы (его называют также динамическим), зависящее от структуры обтекания, от степени вихреобразования; б) сопротивление трения, зависящее от вязкости среды.

В самой общей форме сопротивление среды (по Рэлею)

$$P = \psi v^2 d^2 \Delta, \tag{8}$$

где коэффициент сопротивления ψ для геометрически подобных тел зависит от режима движения, характеризующегося числом Рейнольдса.

Аналитическая зависимость между ψ и Re для всего известного интервала значений Re до настоящего времени не найдена. Ее выражают графически в виде построенной в логарифмической шкале диаграммы Рэлея (рис. 1).

Из самого определения числа Рейнольдса ясно, что при малых его значениях преобладающую роль играют силы вязкости μ, а при больших — динамические силы $vd\Delta$. В пределе, при самых больших и самых малых числах Re, можно вообще пренебречь либо силами вязкости, либо

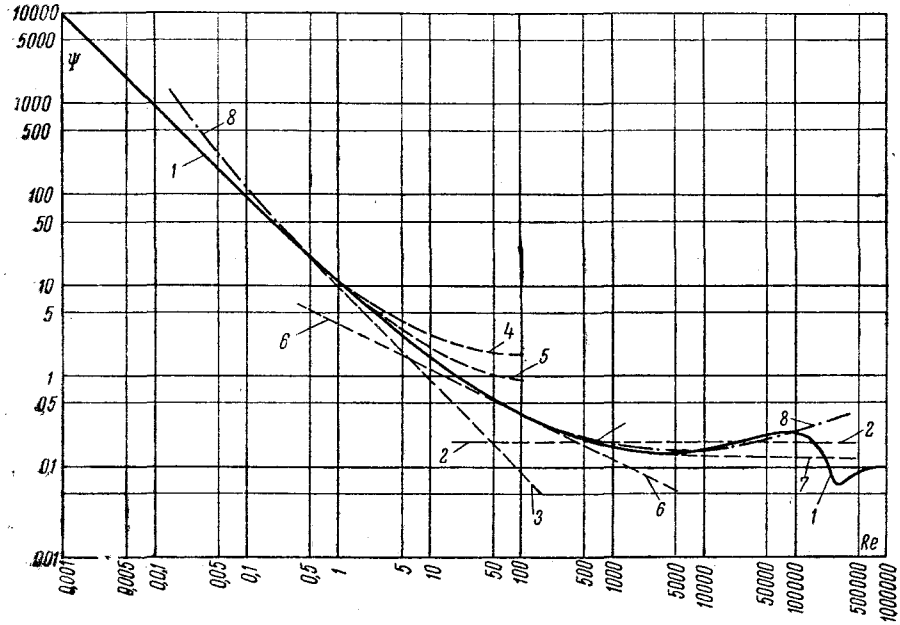


Рис. 1. Диаграмма Рэлея:
1 — опытная кривая Рэлея; *2* — по Риттингеру; *3* — по Стоксу; *4* — по Озеену; *5* — по Гольдштейну; *6* — по Аллену; *7* — по Олевскому; *8* — по формуле (36)

динамическими. Именно такие предельные случаи движения и оказались доступными для непосредственного теоретического разрешения.

П. Р. Риттингер принял динамическое давление среды на шар равным половине давления на площадь его миделевого (наибольшего) сечения

$$P_R = \frac{1}{2}\frac{\pi d^2}{4}\frac{\Delta v^2}{2},\ дн \tag{9}$$

и из условия $P = G_0$, справедливого для равномерного падения тела в среде, получил формулу конечной скорости

$$v = 51{,}1\sqrt{d\frac{\delta-\Delta}{\Delta}},\ см/сек. \tag{10}$$

Эта формула построена на основе полного пренебрежения силами вязкости и приближенно справедлива для турбулентной области, т. е. при $Re > 1000$.

Приравняв формулы (8) и (9), получим выражение для коэффициента сопротивления, отвечающее закону Риттингера.

$$\psi = \frac{\pi}{16}. \tag{11}$$

Эта функциональная зависимость на диаграмме Рэлея представится в виде прямой (см. рис. 1), пересекающей кривую в трех точках, что и показывает приближенность закона Риттингера. Для медленных движений, когда можно пренебречь силами инерции и учитывать лишь силы вязкости, классическое решение о величине сопротивления принадлежит Стоксу

$$P_{St} = 3\pi\mu dv, \ дн. \tag{12}$$

Полученная им формула конечной скорости для ламинарной области может быть представлена в виде

$$v = 54{,}5\left(\frac{\delta - \Delta}{\Delta}\right) d^2, \ см/сек \tag{13}$$

и применима для так называемых «ползущих движений» (капелек тумана, мельчайшей пыли в воздухе и пр.), характеризующихся числами Рейнольдса $Re < 1$. Функциональная зависимость ψ от Re (см. рис. 1) в соответствии с законом Стокса имеет вид

$$\psi = \frac{3\pi}{Re}. \tag{14}$$

Решение Стокса было получено на основе полного пренебрежения инерционными членами в уравнениях движения вязкой жидкости Навье—Стокса. К. Озеен на основе приближенного учета динамических сил, имеющих все же место при малых значениях Re, получил формулу критической скорости более сложного вида

$$v = \frac{-\frac{6\mu}{d} \pm \sqrt{\frac{36}{d^2} + \frac{3}{2}\Delta(\delta - \Delta)\, gd}}{\frac{9}{4}\Delta}. \tag{15}$$

Выражение для коэффициента сопротивления ψ, соответствующее решению Озеена, имеет вид

$$\psi = \frac{3\pi}{Re}\left(1 + \frac{3}{16} Re\right). \tag{16}$$

Впоследствии С. Гольдштейн уточнил К. Озеена, показав, что коэффициент сопротивления должен выражаться разложением в ряд по степеням малого параметра Re

$$\psi = \frac{3\pi}{Re}\left(1 + \frac{3}{16} Re - \frac{19}{1280} Re^2 + \ldots\right). \tag{17}$$

Интервалы значений Re, в которых могут быть использованы формулы К. Озеена и С. Гольдштейна (см. рис. 1), мало отличаются от интервала, соответствующего формуле Стокса. Поэтому они не нашли практического применения. Между областями применимости формул Риттингера и Стокса лежит обширный интервал средних значений числа

Рейнольдса, характеризующих переходную область от ламинарного к турбулентному обтеканию, т. е. область совместного проявления динамических сил и сил вязкости.

А. Аллен сделал предположение о пропорциональности сопротивления в переходной области полуторной степени скорости и, приняв величину сопротивления

$$P_A = \frac{10}{\sqrt{\frac{vd\Delta}{\mu}}} \frac{\pi d^2}{4} \frac{\Delta v^2}{2}, \ дн, \tag{18}$$

получил формулу скорости

$$v = 25{,}8d \sqrt[3]{\left(\frac{\delta - \Delta}{\Delta}\right)^2} \sqrt[3]{\frac{\Delta}{\mu}}, \ см/сек. \tag{19}$$

Формула (18) с известной степенью допущения применима для расчетов в интервале значений Re от 2 до 300. Точное же соответствие опытным данным, как показал П. В. Лященко [8], формула Аллена дает лишь при одном значении числа Re, равном 100.

Коэффициент сопротивления ψ в функции числа Рейнольдса по закону Аллена можно выразить в виде

$$\psi = \frac{\sqrt{5\pi}}{2Re}. \tag{20}$$

График этой функции на диаграмме Рэлея (см. рис. 1) представляется в виде касательной к опытной кривой в точке, соответствующей $Re = 100$.

Таким образом, решением Аллена далеко не исчерпывалась задача об определении конечной скорости в обширной области средних значений числа Re, и попытки в этом направлении продолжаются до настоящего времени [5, 7, 8, 10].

На основе анализа существующих частных решений задачи о свободном падении сферических тел в среде А. К. Корольков [6] после простых преобразований и округления показателей степеней до десятых долей выделяет следующий ряд формул:

формула Риттингера

$$v = K_R d^{0,5} \left(\frac{\delta - \Delta}{\Delta}\right)^{0,5} \left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^{0,0} (Re\ 10^3 \div 10^5);$$

формула Кармана — Леви — Лященко

$$v = K_L d^{0,7} \left(\frac{\delta - \Delta}{\Delta}\right)^{0,6} \left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^{0,1} (Re\ 500 \div 30);$$

формула Аллена—Прандтля—Блязиуса

$$v = K_A d^{1,0} \left(\frac{\delta - \Delta}{\Delta}\right)^{0,7} \left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^{0,3} (Re\ 30 \div 3);$$

формула Стокса

$$v = K_{St} d^{2,0} \left(\frac{\delta - \Delta}{\Delta}\right)^{1,0} \left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^{1,0} (Re\ 1 \div 0).$$

Достоинство этого ряда формул в том, что он предназначен для количественной оценки процесса свободного падения шаровидных тел различной крупности в различных средах. Но этот ряд имеет и серьезные

недостатки: а) между ограниченными областями значений Re, для которых применимы отдельные формулы, есть интервалы, где ни одна из формул вообще не может быть использована; б) границы применимости каждой из формул неопределенны и зависят от допустимой погрешности расчетов; в) заранее невозможно определить, какой из указанных формул в данном конкретном случае необходимо пользоваться, поскольку значение числа Re, соответствующее данному случаю, можно определить, зная лишь конечную скорость, являющуюся искомой величиной.

Метод П. В. Лященко. Рассмотренные выше формулы не связаны друг с другом. Каждая из них справедлива только для определенного интервала значений Re, а между тем диаграмма Рэлея показывает непрерывную зависимость сопротивления от числа Рейнольдса, что, в частности, указывает на плавный характер перехода ламинарного течения в турбулентное. Однако диаграмма Рэлея в отношении расчета критической скорости оказывается бесполезной, поскольку и в коэффициент сопротивления ψ и в параметр Re, зависимость между которыми выражается этой диаграммой, входит искомая величина конечной скорости v.

П. В. Лященко предложил новый безразмерный параметр

$$Li = \psi Re^2,$$

в определение которого скорость не входит [8]. Новый параметр лег в основу известной диаграммы П. В. Лященко (рис. 2), построенной в логарифмической шкале путем пересчета тех же вполне достоверных опытных данных, по которым построена диаграмма Рэлея.

Поскольку

$$Li = \psi Re^2 = \frac{\pi d^3 g}{6} (\delta - \Delta) \frac{\Delta}{\mu^2},$$

где все величины известны заранее, всегда можно определить значение Li для данного тела и данной среды, а затем по диаграмме определить величину Re. А так как

$$Re = \frac{v d \Delta}{\mu},$$

конечную скорость можно получить из выражения

$$v = \frac{Re \mu}{d\Delta}. \tag{21}$$

Зависимость Li от Re была выражена П. В. Лященко только в виде диаграммы, но не закреплена какими-либо аналитическими соотношениями.

Критериальные уравнения В. А. Олевского. На основе анализа опытных данных, по которым построены диаграммы Рэлея и Лященко, В. А. Олевский получил критериальное уравнение для кривой Рэлея [10]

$$\psi = \frac{3\pi}{Re} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{Re}} + \frac{1}{8}. \tag{22}$$

Оно дает хорошие совпадения с опытными данными в широком интервале от самых малых значений Re до 6000. С помощью формул перехода (5) его легко преобразовать для выражения аналитической связи между Re и коэффициентами сопротивления по Прандтлю — Годэну и Великанову — Зегжда.

С помощью соотношения (6) от уравнения кривой Рэлея легко перейти к уравнению кривой Лященко

$$Li = 3\pi Re + \sqrt{3} Re^{1,5} + \frac{1}{8} Re^2, \qquad (23)$$

также обеспечивающему хорошие совпадения с опытными данными до $Re = 6000$.

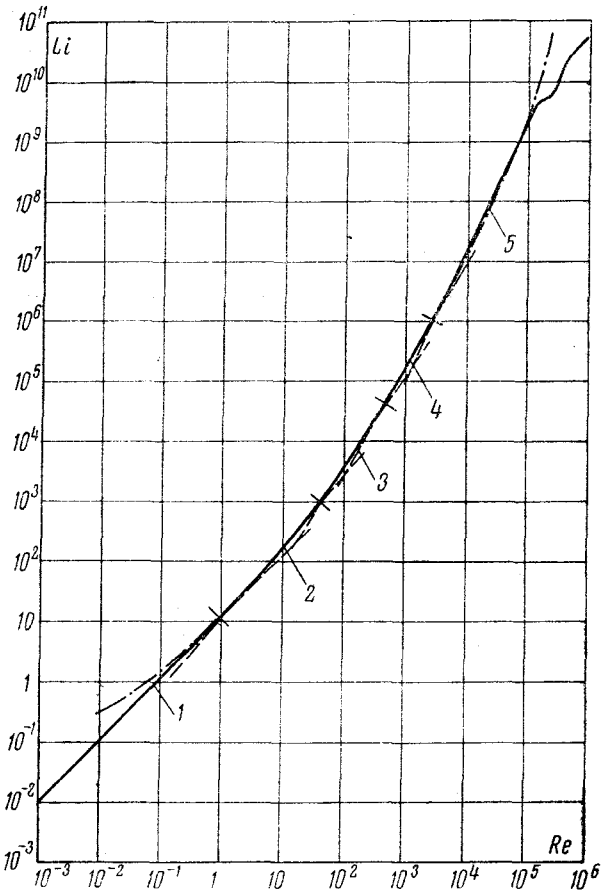


Рис. 2. Диаграмма Лященко:

1—5 — участки опытной кривой, замененные В. А. Олевским на прямолинейные отрезки. Штрих-пунктирная линия — расчетная кривая по эмпирической формуле критериальной зависимости (34)

Зная величину *Re*, по уравнению (23) можно определить значение *Li*. Практически же важна обратная задача: зная *Li*, определить *Re*, а по нему — величину критической скорости. Уравнение (23) легко привести к уравнению четвертой степени относительно v. Однако, как отмечает В. А. Олевский, в связи с тем, что общее решение уравнения четвертой степени может быть получено только в виде весьма громоздких выражений, выведенная им зависимость для расчета конечной скорости практически использована быть не может.

Упрощенные расчетные формулы. Для расчетов в области гравитационного обогащения Р. Леннон [8] на основе диаграммы Рэлея упро-

стил известные формулы Риттингера, Стокса и Аллена (табл. 1). Для выведенных формул Р. Леннон дал границы применимости, определяемые по величине произведения vd. Однако само произведение vd в общем случае определить невозможно, поскольку величина v является искомой.

Таблица 1

Автор исходной формулы	Упрощенные формулы Леннона	
	для воды, *см/сек*	для воздуха, *см/сек*
Риттингер	$v = 55\sqrt{d(\delta - 1)}$	$v = 1600\sqrt{d\delta}$
Аллен	$v = \frac{25{,}8\sqrt[3]{(\delta - 1)^2 d}}{\sqrt[3]{\mu}}$	$v = 4260\, d\delta^{\frac{2}{3}}$
Стокс	$v = \frac{54{,}5\, d^2 (\delta - 1)}{\mu}$	$v = 303\,000\, d^2 \delta$

Для расчетов, связанных с проветриванием выработок и закладкой выработанного пространства, нашла применение упрощенная формула, называемая в литературе формулой А. О. Спиваковского [9] или формулой Прандтля [3],

$$v = \sqrt{28{,}4d\frac{\gamma_т}{\gamma_в}},\ м/сек, \tag{24}$$

где $\gamma_т$ — удельный вес материала частиц, *кг/м*³;
$\gamma_в$ — удельный вес воздуха, *кг/м*³;
d — диаметр частиц, условно принимаемых шаровидными, *м*.

Если положить $\gamma_в = 1{,}29$, формула (23) приводится к столь же широко распространенной формуле Блесса

$$v = 4{,}7\sqrt{d\gamma_т},\ м/сек \tag{25}$$

[обозначения аналогичны формуле (24)].

Близка к формуле Блесса применяемая в цементной промышленности для расчетов пневматического транспорта формула [4]

$$v = 4{,}8\sqrt{d\gamma_т},\ м/сек \tag{26}$$

[обозначения аналогичны формуле (24)].

В. В. Недин для расчетов режима проветривания горных выработок (при нормальном состоянии атмосферного воздуха) выводит формулу, применяемую при $Re < 1$ [9],

$$v = 0{,}00304 d^2\gamma,\ см/сек, \tag{27}$$

где γ — удельный вес материала пылинки, *г/см*³;
d — диаметр дисперсной пылинки, *μ*.

Для расчета потребного расхода воздуха или газа при бурении скважин с продувкой в США К. М. Никольсоном предложен метод, основанный на формуле [12],

$$v = 2{,}67\left(\frac{d\rho_p}{\rho_f}\right)^{\frac{1}{2}},\ фут/сек, \tag{28}$$

где d — размер частицы, *дюйм*;

ρ_p — плотность материала частицы, *фунт/фут*^{3};

ρ_f — плотность газа, *фунт/фут*^{3}.

Для определения расхода воздуха в тех же целях во Франции К. Перро [11] предложен метод расчета, основанный на упрощенных формулах, построенных по данным Стокса и Эйфеля:

для шаровидных частиц породного шлама диаметром менее 0,15 *мм*

$$v = 1{,}2 \cdot 10^6 r^2 \gamma, \ см/сек \tag{29}$$

и для частиц диаметром более 0,30 *мм*

$$v = 2{,}16 \cdot 10^3 \sqrt{r\gamma}, \ см/сек, \tag{30}$$

где r — радиус шаровидных частиц, *см*;

γ — удельный вес материала частиц, *г/см*^{3};

Подставим в формулы (24) и (25) постоянное значение удельного веса воздуха 1,2 *кг/м*^{3} и сравним рассмотренные упрощенные формулы, представив их в системе *CGS* аналогично формулам Леннона и в соответствии с принятыми обозначениями:

Формула Спиваковского—Прандтля . . . . . $v = 1538 \sqrt{d\delta}$

Формула Блесса . . . . . $v = 1486 \sqrt{d\delta}$

Формула, применяемая в цементной промышленности $v = 1518 \sqrt{d\delta}$

Формула Никольсона . . . . . $v = 1477 \sqrt{d\delta}$

Формула Перро—Эйфеля . . . . . $v = 1532 \sqrt{d\delta}$

Формула Перро—Стокса . . . . . $v = 300\,000\ d^2\delta$

Формула Недина . . . . . $v = 304\,000\ d^2\delta$

Рассмотренные формулы конечной скорости весьма близки к соответствующим формулам Леннона, полученным непосредственно путем упрощения формул Риттингера и Стокса (см. табл. 1).

Существует много подобных упрощенных формул для воздуха и воды, но так как они всегда соответствуют либо закону Риттингера, либо закону Стокса, то применимы только либо в турбулентной ($Re > 1000$), либо в ламинарной ($Re < 1$) областях и непригодны для переходной области. В связи с этим более оправдан метод построения эмпирических формул скорости с помощью диаграммы Лященко (см. рис. 2), в основе которой лежат классические экспериментальные данные, охватывающие всю известную область значений Re. Кривая на диаграмме Лященко может быть заменена ломаной, каждому из прямолинейных участков которой будет отвечать уравнение вида

$$Re = kLi^n, \tag{31}$$

где k и n — постоянные.

Длину и угол наклона каждого прямолинейного отрезка можно определить, задавшись величиной допустимого отклонения. Общая идея этого искусственного приема была высказана А. К. Корольковым [6]. Основываясь на этих положениях, В. А. Олевский [10] заменил кривую на диаграмме Лященко в интервале Re $10^{-3} \div 10^5$ ломаной из пяти участков (см. рис. 2) и получил пять формул скорости (табл. 2). Наибольшие отклонения расчетных значений по этим формулам от опытных достигают на границах второго и третьего участков $\pm 10\%$, что, однако, вполне допустимо в практике расчетов движения реальных частиц.

Достоинство выведенных В. А. Олевским эмпирических формул в том, что ими охватывается вся указанная область значений числа Re без каких-либо промежутков. Недостатком является узость интервалов, в которых применимы отдельные формулы.

Таблица 2

Область применения	Формула скорости	Границы применимости формул					
		по *Re*		по *Li*		по зернам кварца в воде, *см*	
		от	до	от	до	от	до
Ламинарное движение	$v_1 = 54{,}5d^2\nu^{-1}\left(\frac{\delta-\Delta}{\Delta}\right)$	0	1	0	10	0	0,012
Начало переходной области . .	$v_2 = 23{,}6d^{\frac{3}{2}}\nu^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{\delta-\Delta}{\Delta}\right)^{\frac{5}{6}}$	~1	~50	10	10^3	0,012	0,042
Середина переходной области	$v_3 = 24{,}4d\nu^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{\delta-\Delta}{\Delta}\right)^{\frac{2}{3}}$	~50	~500	10^3	$3\cdot10^4$	0,042	0,14
Конец переходной области . .	$v_4 = 37{,}2d^{\frac{2}{3}}\nu^{-\frac{1}{9}}\left(\frac{\delta-\Delta}{\Delta}\right)^{\frac{5}{9}}$	~500	~2500	$3\cdot10^4$	10^6	0,14	0,56
Турбулентное движение . . .	$v_5 = 57{,}8d^{\frac{1}{2}}\nu^{0}\left(\frac{\delta-\Delta}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2}}$	~2500	~10000	10^6	10^9	0,56	10

Примечания: 1. Все величины в системе *CGS*.

2. В этих формулах ν — кинематический коэффициент вязкости, *см²/сек* ($\nu = \frac{\mu}{\Delta}$).

3. Постоянные множители округлены до первого десятичного знака.

2. Эмпирическая формула зависимости между параметрами Лященко и Рейнольдса

Зависимость *Li* от *Re* на диаграмме Лященко представляется в виде плавной кривой. Чтобы выразить эту зависимость аналитически в широком диапазоне значений *Re*, кривую на диаграмме уже нельзя заменить прямой, как это было сделано В. А. Олевским для отдельных коротких участков кривой в соответствии с предложением А. К. Королькова. Однако есть другой путь решения этой задачи. Кривую на диаграмме Лященко в координатах $x = \lg Re$ и $y = \lg Li$ можно рассматривать как ветвь параболы, смещенной в направлении оси y.

Общее уравнение параболы для этого случая имеет вид

$$y = ax^b + c$$

или, в нашем случае,

$$\lg Li = a \lg^b Re + c, \qquad (32)$$

где a, b, c — постоянные.

Показатель степени b не является заранее заданным. Поэтому необходимо выравнивать величины $Y = \lg(\lg Li - c)$ и $X = \lg\lg Re$. Но при этом предварительно должна быть определена для нужного участка кривой величина c по существующей для этого методике. Тогда показатель степени b вычислится по методу среднего или из условия наименьшей квадратичной ошибки.

Решения, проведенные для интервала значений *Re* от 1 до 10^5, дают показатель степени 1,85—1,90. Однако дробное значение показателя степени приводит к излишнему усложнению конечной формулы. Удобнее задаться величиной показателя степени $b = 2$. В этом случае выравнивается $X = \lg^2 Re$ и $Y = \lg Li$. Но зависимость между $\lg^2 Re$ и $\lg Li$ несколько отклоняется от прямолинейной. Дело в том, что интересующий

нас участок кривой на диаграмме Лященко в интервале Re $1 \div 10^5$ соответствует такой параболе с показателем степени $b=2$, которая смещена не только в направлении оси y, но и в направлении оси x. Поэтому выравниваем окончательно зависимость между $(\lg Re+f)^2$ и $\lg Li$, где f выражает смещение оси параболы в направлении оси x. Наилучшее приближение к прямолинейной зависимости имеет место при $f=4{,}3$ (определено методом последовательных приближений).

Итак,

$$\lg Li = a\,(\lg Re + 4{,}3)^2 + c. \qquad (33)$$

Числовые значения постоянных a и c были определены методом приближения в отдельных точках с целью обеспечения наилучшей сходимости в области высоких значений логарифмов, поскольку равные в процентном отношении отклонения расчетных значений больших и малых логарифмов чисел не означают равных отклонений самих чисел. Исходные данные и результаты расчетов сведены в табл. 3. Полученное выражение критериальной зависимости имеет вид

$$\lg Li = 0{,}1224\,(\lg Re + 4{,}3)^2 - 1{,}25 \qquad (34)$$

или

$$Li = 10^{0{,}1224(\lg Re+4{,}3)^2-1{,}25} \qquad (34')$$

Таблица 3

Re	X $(\lg Re+4{,}3)^2$	Y $\lg Li_{опт}$	$Li_{опт}$	$\lg Li_{расч}$	$Li_{расч}$	$\frac{Li_{расч}-Li_{опт}}{Li_{опт}}$,
1,0	18,4900	1,0492	11,2	1,0132	10,30	−8,0
3,2	23,0890	1,6014	39 936	1,5761	37,68	−5,6
10,0	28,0900	2,1987	158	2,1882	154,3	−8,3
32	33,6990	2,8911	778,24	2,8748	749,6	−3,7
40	34,8350	3,0367	1 088	3,0134	1 031	−5,2
50	35,9900	3,1538	1 425	3,1552	1 430	+0,35
60	36,9450	3,2756	1 886	3,2721	1 871	−0,8
80	38,4780	3,4594	2 880	3,4597	2 882	±0,0
100	39,6900	3,5911	3 900	3,6081	4 056	+4,0
200	43,5730	4,0492	11 200	4,0833	12 120	+8,2
300	45,9290	4,3692	23 400	4,3717	23 540	+0,6
316	46,2360	4,3903	24564,6	4,4093	25 660	+4,4
400	47,6390	4,5289	36 800	4,5810	38 110	+3,6
500	48,9860	4,7423	55 250	4,7459	55 710	+0,8
600	50,1010	4,8826	76 320	4,8824	76 280	±0,0
700	51,0520	4,9912	98 000	4,9988	99 720	+1,8
800	51,8850	5,0916	123 520	5,1007	126 100	+2,1
1 000	53,2900	5,2601	182 000	5,2727	187 400	+3,0
2 000	57,7750	5,8116	648 000	5,8217	663 300	+2,4
2 500	59,2580	5,9945	987 500	6,0032	1 007 000	+2,0
3 000	60,4830	6,1473	1 404 000	6,1531	1 422 000	+1,3
4 000	62,4430	6,3888	2 448 000	6,3930	2 472 000	+1,0
5 000	63,9840	6,5798	3 800 000	6,5816	3 816 000	+0,4
6 000	65,2570	6,7410	5 508 000	6,7375	5 464 000	−0,8
8 000	67,2910	7,0129	10 304 000	6,9864	9 692 000	−5,9
10 000	68,8900	7,2095	16 200 000	7,1821	15 210 000	−6,1
15 900	72,2740	7,6333	42 977 700	7,5963	39 480 000	−8,1
20 000	73,9770	7,8573	72 000 000	7,8048	63 800 000	−11,4*
30 000	77,0370	8,1895	154 700 000	8,1793	151 100 000	−2,3
40 000	79,2470	8,4734	297 600 000	8,4498	281 700 000	−5,3
100 000	86,4900	9,3010	2 000 000 000	9,3364	2 170 000 000	+8,5

* Опытное значение сомнительно.

Примечание. Опытные значения Re и соответствующие им $Li = \psi Re^2$ взяты у П. В. Лященко [8].

Отклонения расчетных значений от опытных (см. табл. 3 и рис. 2) вполне удовлетворительны. Для более половины точек, разбросанных по всему интервалу, ошибка не превышает ±3%, для 80% точек погрешность не больше ±6% и нигде, за исключением одной точки, ошибка не выходит за пределы ±8,5%. Резкое отклонение имеет место в точке $Re=20\,000$, где ошибка составляет —11,4%. Критериальные уравнения В. А. Олевского в точках $Re=0{,}004$; $Re=0{,}04$ дают ошибку до 11—12%, что он объяснил возможной погрешностью, допущенной при обработке опытных данных. Достоверность опытного значения Li при $Re=20\,000$ также вызывает сомнение, однако сравнительные данные отсутствуют, поскольку уравнения В. А. Олевского за пределами $Re=6000$ теряют силу. Выражение (34) может быть преобразовано к виду, удобному для определения Re по известному значению Li,

$$\lg Re = \sqrt{\frac{\lg Li + 1{,}25}{0{,}1224}} - 4{,}3 \qquad (35)$$

или

$$Re = \frac{10^{\sqrt{\frac{\lg Li+1{,}25}{0{,}1224}}}}{19\,950} = \frac{724^{\sqrt{\lg Li+1{,}25}}}{20\,000}. \qquad (35')$$

Погрешность расчетных значений Re по формулам (35) и (35′) будет находиться в тех же вполне допустимых пределах. Следует учитывать, что при определении Re графическим методом по диаграмме Лященко средняя ошибка достигает ±10% [10].

Полученный логарифмический закон зависимости между параметрами Лященко и Рейнольдса для интервала значений Re от 1 до 100 000 позволяет решить две практически важные задачи: а) получить аналитическое выражение коэффициента сопротивления любого вида (по Рэлею, Прандтлю — Годэну и Великанову — Зегжда) от числа Рейнольдса; б) вывести формулу конечной скорости.

3. Коэффициент сопротивления

Из критериальной зависимости (34′) при помощи выражения $Li=\psi Re^2$ легко получить эмпирическую формулу для коэффициента сопротивления по Рэлею в виде

$$\psi = \frac{10^{0{,}1224(\lg Re+4{,}3)^2-1{,}25}}{Re^2} \qquad (36)$$

или после элементарных преобразований и некоторых округлений

$$\psi = \frac{1{,}325^{(\lg Re-3{,}87)^2}}{6{,}6}. \qquad (36')$$

Функциональная зависимость ψ от Re по формуле (36) представлена графически на рис. 1. Расчетная кривая хорошо совпадает с опытной кривой диаграммы Рэлея на интервале от $Re=1$ до $Re=10^5$, т. е. соответствует переходной и турбулентной областям движения, оставляя в стороне ламинарное движение и область кризиса обтекания (резкое снижение опытной кривой за пределами $Re=10^5$).

С помощью формул перехода легко получить эмпирические формулы для коэффициента сопротивления по Прандтлю — Годэну

$$c = Q = 0{,}386 \cdot 1{,}325^{(\lg Re-3{,}87)^2} \qquad (37)$$

и по Великанову — Зегжда

$$\lambda = 0{,}146 \cdot 1{,}325^{(\lg Re - 3{,}87)^2}. \qquad (38)$$

Для последнего коэффициента известны полуэмпирические выражения Великанова — Зегжда [1]

$$\lambda = 4{,}5Re^{-1} + \frac{2 \cdot 2{,}655}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{Re^{-1}} + 0{,}115^* \qquad (39)$$

и В. А. Олевского [10]

$$\lambda = 9Re^{-1} + 1{,}66\sqrt{Re^{-1}} + 0{,}119. \qquad (40)$$

Для сравнения трех формул (38), (39), (40) в табл. 4 приведены расчетные значения $\lambda_{расч}$ по этим формулам в интервале $Re1 \div 100\,000$ и их отклонения от опытных значений $\lambda_{опт}$, полученных из таблиц П. В. Лященко [8] путем пересчета по формуле перехода

$$\lambda_{опт} = \frac{3}{\pi}\psi_{опт} = 0{,}955\psi_{опт}.$$

При $Re<1$ формулы (39) и (40) дают хорошие совпадения с опытными данными. Однако в этом интервале можно пользоваться непосредственно законом Стокса без каких-либо поправок. Что же касается больших значений числа Рейнольдса, то, как показывают данные табл. 4, формула Великанова — Зегжда дает грубые отклонения от опыта, а формула В. А. Олевского, обеспечивая хорошую сходимость расчетных значений с опытными до $Re=6000$, за этими пределами теряет силу (при $Re>6000$ формула В. А. Олевского дает ошибку того же порядка, что и формула Великанова — Зегжда).

Таблица 4

Re	$\lambda_{опт}$	По формуле (38)		По формуле Олевского (40)		По формуле Великанова—Зегжда (39)	
		$\lambda_{расч}$	$\frac{\lambda_{расч}-\lambda_{опт}}{\lambda_{опт}}$, %	$\lambda_{расч}$	$\frac{\lambda_{расч}-\lambda_{опт}}{\lambda_{опт}}$, %	$\lambda_{расч}$	$\frac{\lambda_{расч}-\lambda_{опт}}{\lambda_{опт}}$, %
1,0	10,7	9,87	—7,8	10,78	+0,7	10,74	+0,4
10	1,51	1,48	—2,0	1,543	+2,2	1,77	+17,2
50	0,545	0,550	+0,9	0,534	—2,0	0,628	+15,2
100	0,372	0,390	+4,8	0,374	+0,5	0,443	+19,1
500	0,211	0,215	+1,9	0,211	±0,0	0,240	+13,7
1 000	0,174	0,180	+3,5	0,180	+3,5	0,199	+14,4
2 000	0,155	0,160	+3,2	0,161	+3,8	0,173	+11,6
3 000	0,149	0,152	+2,0	0,152	+2,0	0,163	+9,4
4 000	0,146	0,149	+2,1	0,148	+1,4	0,155	+6,2
5 000	0,145	0,147	+1,4	0,144	—0,6	0,151	+4,1
6 000	0,146	0,146	±0,0	0,142	—2,7	0,147	+0,7
8 000	0,154	0,146	—5,2	—	—	0,143	—7,1
10 000	0,155	0,147	—5,2	—	—	0,140	—9,7
20 000	0,172	0,155	—9,9	—	—	0,132	—23,2
30 000	0,175	0,162	—7,5	—	—	0,129	—26,3
40 000	0,177	0,170	—4,0	—	—	0,127	—28,2
100 000	0,191	0,209	+9,4	—	—	0,1225	—35,8

* В формуле (39) под Re подразумевается его половинное значение против обычного.

Таким образом, для практических расчетов в интервале $Re1 \div 100\,000$ предпочтительнее пользоваться выведенной здесь эмпирической формулой (38). Формулы (36) и (37) для иначе исчисляемых коэффициентов сопротивления дают того же порядка отклонения от опытных данных и также могут быть использованы для практических расчетов в интервале $\div 10^5$.

4. Формула конечной скорости

В ряде отраслей, связанных с гидравлическим или пневматическим транспортом, и, в частности, при расчетах потребного расхода промывочного агента для выноса шлама с забоя скважины при бурении [2] пользуются общей формулой конечной скорости типа

$$v = \sqrt{\frac{d(\delta - \Delta)}{\Delta}} \sqrt{\frac{4g}{3c}}, \qquad (41)$$

где c — коэффициент сопротивления во Прандтлю.

Значение c из-за отсутствия расчетных формул принимают для шара ориентировочно 0,46—0,50 [2,9 и др.], что приближенно справедливо лишь при $Re > 1000$.

Выведенная формула (37) позволяет, зная Re, определить достаточно точно значение c (в интервале $Re\ 1 \div 10^5$). Однако величина Re заранее не известна. Подставив в формулу (37) вместо $\lg Re$ его значение по формуле (35) и исключив таким образом Re, можно получить выражение для c через Li, численное значение которого всегда может быть определено заранее. Вычислив для данного случая значение Li, а по нему значение c, можно по общей формуле (41) определить величину скорости на всем практически встречающемся при транспортировании сыпучих материалов интервале значений Re. Иначе исчисляемые коэффициенты сопротивления ψ и λ также могут быть выражены через параметр Лященко.

Однако указанный путь решения задачи о величине скорости сложен. Полученное выше выражение зависимости Re от Li (35) позволяет вывести непосредственно формулу скорости.

Поскольку по выражению (21)

$$v = \frac{Re\mu}{d\Delta},$$

подставив в последнее значение Re по формуле (35′), имеем

$$v = \frac{\mu 724^{\sqrt{\lg Li + 1{,}25}}}{20\,000 d\Delta}. \qquad (42)$$

Полученная эмпирическая формула конечной скорости пригодна для расчетов движения тел весьма широкого диапазона крупности в любой среде в интервале значений числа Рейнольдса от 1 до 10^5. Для сравнения можно отметить, что область применимости формулы (42) охватывает полностью четыре из пяти интервалов значений Re, в которых применимы эмпирические формулы В. А. Олевского (см. табл. 2).

Для определения конечной скорости по формуле (42) предварительно необходимо вычислить для данного конкретного случая значение Li по формуле (6). Одновременно при этом вполне определенно и точно решается вопрос о применимости формулы (42) для данного случая, поскольку границы применимости выведенной формулы по параметру Лященко известны заранее: $Li\ 10 \div 10^9$. Если вычисленное по фор-

муле (6) значение Li будет менее 10, необходимо пользоваться формулой Стокса (13), если более 10^9, можно производить расчет по формуле Риттингера (10). В последнем случае результат будет приближенным, так как формула Риттингера вообще приближенна. Однако указанные крайние случаи в обычной практике расчетов, тем более связанных с гидравлическим и пневматическим транспортом, весьма редки.

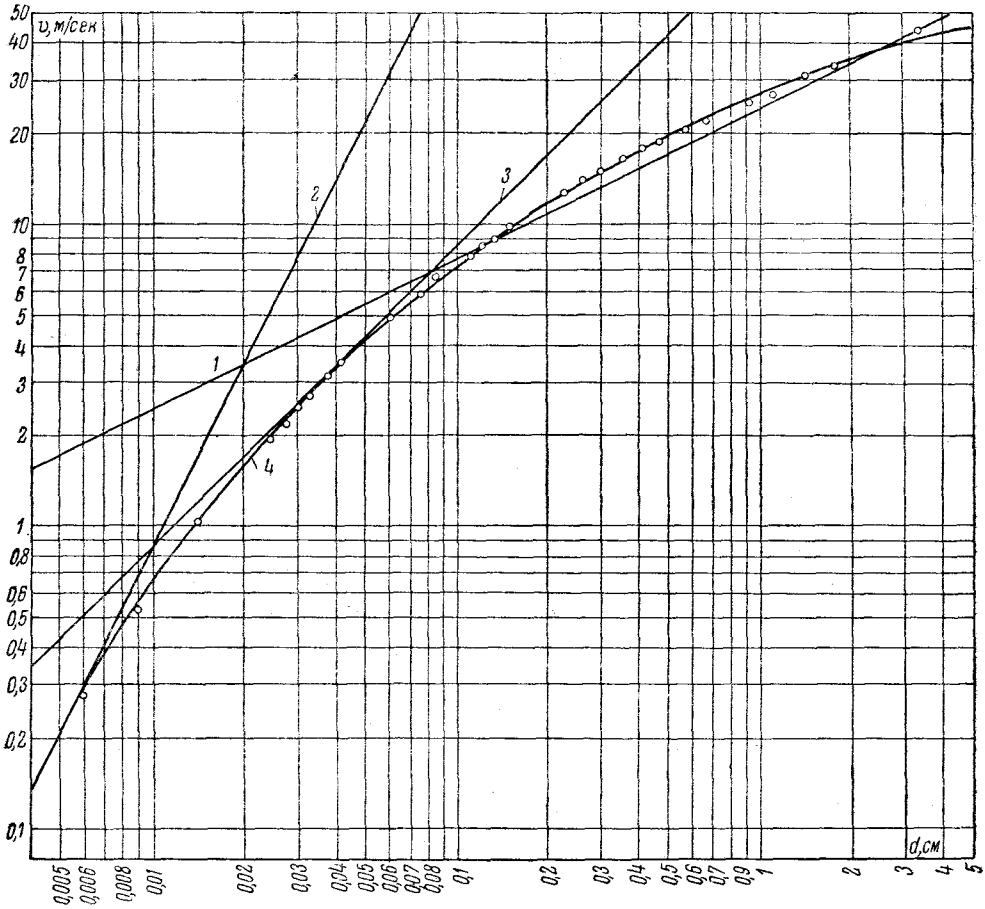


Рис. 3. Опытные точки и расчетные кривые зависимости конечной скорости падения в воздухе шаровидных частиц (δ=2,8 *г/см*^{3}) и от их диаметра в интервале Re $1 \div 10^5$:
1 — по Риттингеру; *2* — по Стоксу; *3* — по Аллену; *4* — по формуле (42)

На рис. 3. показана зависимость критической скорости падения в воздухе шаровидных частиц плотностью 2,8 *г/см*^{3} (типичной для ряда горных пород) от диаметра частиц в интервале Re $1 \div 10^5$. Для большей наглядности по оси ординат отложены $\lg v$, по оси абсцисс $\lg d$. Опытные значения взяты из таблиц проф. П. В. Лященко [8] с пересчетом на основе принципа подобия Рейнольдса для случая движения шаров в воздухе при нормальном атмосферном давлении и температуре 15° (плотность воздуха 0,00123 *г/см*^{3}, абсолютный коэффициент вязкости 0,00018 *пуаз*). Расчетная кривая для этих условий построена по формуле (12). Полученные по ней расчетные значения v хорошо совпадают с опытными на всем указанном интервале.

Формула (42) справедлива для частиц сферической формы. Влияние действительной формы реальных частиц на величину критической

скорости может быть учтено соответствующими коэффициентами [6, 8].

Эмпирическая формула скорости (42) может быть преобразована и упрощена подстановкой постоянных значений Δ и μ как в самое формулу, так и в формулу для Li применительно к определенной среде (вода, воздух).

Приведенные здесь эмпирические зависимости могут послужить основой для построения простых номограмм, определяющих коэффициенты сопротивления и конечную скорость, что облегчит и повысит точность расчетов потребного расхода промывочного агента при бурении скважин как с промывкой жидкостями, так и с продувкой воздухом или газом.

Выводы

1. На основе анализа опытных данных, по которым построены известные диаграммы Рэлея и Лященко, найдена эмпирическая формула (34) критериальной зависимости между параметрами Лященко и Рейнольдса, обеспечивающая вполне удовлетворительное совпадение с опытом в интервале значений Re $1 \div 10^5$.

2. С помощью полученной формулы критериальной зависимости выведены расчетные формулы для коэффициента сопротивления по Рэлею (36), Прандтлю — Годэну (37) и Великанову — Зегжда (38), дающие в интервале Re $1 \div 10^5$ лучшие совпадения с опытом, чем существующие формулы.

3. Выведена эмпирическая формула (42) конечной скорости свободного падения шаровидных тел в любой среде, вполне пригодная для практических расчетов в интервале значений числа Рейнольдса от 1 до 10^5, охватывающем начало, середину и конец переходной и турбулентную области движения. Область применимости полученной формулы скорости значительно шире, чем существующих формул.

ЛИТЕРАТУРА

1. Великанов М. А. Динамика русловых потоков. Гидрометеоиздат, 1949.
2. Воздвиженский Б. И., Васильев М. Г. Буровая механика. Госгеолтехиздат, 1954.
3. Геронтьев В. И. Методы закладки выработанного пространства. Углетехиздат, 1948.
4. Гринев К. М. и др. Пневматический транспорт в цементной промышленности. Промстройиздат, 1951.
5. Годэн А. М. Основы обогащения полезных ископаемых. Металлургиздат, 1946.
6. Корольков А. К. К расчету скорости падения минеральных зерен. Зап. ЛГИ, 1948, т. XVII—XVIII.
7. Леви И. И. Отстойники и промывные устройства. ОНТИ, 1938.
8. Лященко П. В. Гравитационные методы обогащения. Гостоптехиздат, 1940.
9. Недин В. В. Борьба с пылью на рудниках Криворожского бассейна. Металлургиздат, 1954.
10. Олевский В. А. О свободном падении частиц в жидкой среде. Сб. ин-та «Механобр», 1953, вып. 88.
11. Перро К. Разведочное бурение с очисткой забоя сжатым воздухом. ОНТИ, 1959, вып. 15.
12. Nicolson K. M. Petrol. Engr., 1954, № 6.