Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLI, вып. 2, 1961 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ БУРОВОЙ СКВАЖИНЫ ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ

А. М. Журавский

1. Пространственное положение искривленной буровой скважины определяется на основании данных измерений. Измерения дают в ряде точек M_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, взятых по длине скважины, величины углов наклона ϑ_i и азимута φ_i. По этим данным и расстояниям s_i точек M_i от устья скважины определяется положение точек M_i и скважины в целом. Такое определение может быть произведено различными способами, каждый из которых дает приближенное положение буровой скважины. Возникает вопрос об оценке возможного отклонения полученного положения скважины от действительного и зависимости точности определения пространственного положения скважины от точности измерений углов ϑ_i и φ_i и числа точек, в которых подобные измерения производятся.

В настоящей статье задача об определении пространственного положения искривленной скважины трактуется как задача определения положения кривой линии, в ряде точек которой, заданных расстоянием от некоторой точки, принимаемой за начальную, указано направление касательной. Устанавливается аналогия задачи о пространственном положении кривой, заданной направлением касательных, с задачей определения центра тяжести сферической кривой и, в частности, дуги окружности по заданному распределению массы на дуге. Эта аналогия дает возможность весьма просто получить ряд приближенных формул для вычисления координат точек кривой по заданному направлению касательных и найти область возможных ее положений. Для большей ясности изложения рассмотрение общего случая пространственного изгиба предваряется более простым случаем плоского изгиба. Теоретические положения иллюстрируются примером расчета искривленного положения буровой скважины [1].

В настоящей статье не рассматривается вопрос о влиянии точности измерений на точность определения положения скважины и некоторые задачи, тесно связанные с практикой буровых работ. Эти исследования должны составить предмет дальнейшей публикации.

---

[1] Данные измерений, использованные в расчете, любезно предоставлены Г. А. Черменским.

2. Рассмотрим кривую C в пространстве (рис. 1) и отнесем ее к некоторой прямоугольной системе координат. Положение точки $M(x, y, z)$ на кривой C определяется длиной дуги s, отсчитываемой от некоторой точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, и ее координаты x, y, z можно рассматривать как функции длины дуги s. Производные этих функций определяют направление касательной в точке M. Углы α, β, γ, образуемые с координатными

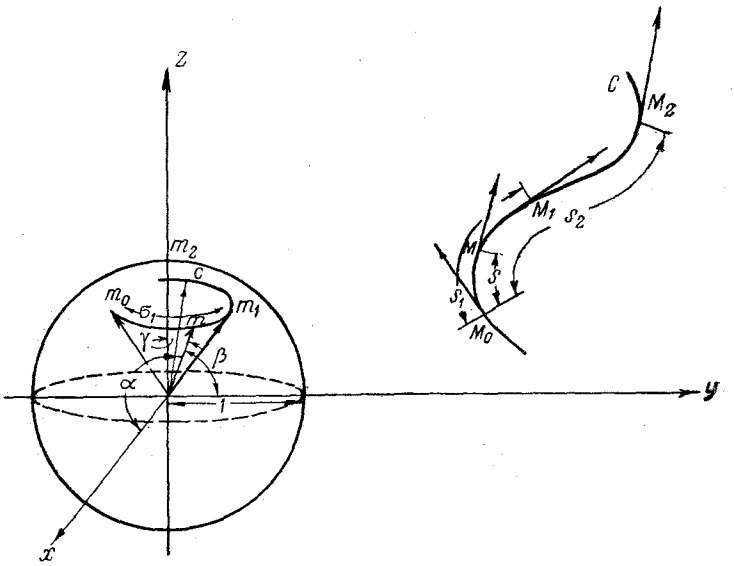


Рис. 1

осями положительным направлением касательной, идущим в сторону возрастания дуги, определяются равенствами [1]

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha; \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta; \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma. \tag{1}$$

Если направление касательной в точке M задается для каждого значения s, то из уравнения (1) получается выражение ее координат в интегральной форме

$$x = x_0 + \int_0^s \cos\alpha ds; \tag{2}$$

$$y = y_0 + \int_0^s \cos\beta ds; \tag{3}$$

$$z = z_0 + \int_0^s \cos\gamma ds. \tag{4}$$

Рассмотрим одновременно с кривой C ее сферическое изображение c, расположенное на сфере радиуса единицы с центром в начале координат. Точка m кривой c, являющаяся изображением точки M кривой C, находится на пересечении сферы с лучом, проходящим через центр сферы и параллельным положительному направлению касательной в точке M (см. рис. 1). Координаты точки $m(\xi, \eta, \zeta)$ определяются равенствами

$$\xi = \cos\alpha, \quad \eta = \cos\beta, \quad \zeta = \cos\gamma, \tag{5}$$

которые позволяют переписать выражения координат точки M в виде

$$x = x_0 + \int_0^s \xi ds; \tag{6}$$

$$y = y_0 + \int_0^s \eta ds; \tag{7}$$

$$z = z_0 + \int_0^s \zeta ds. \tag{8}$$

Эти равенства являются источником приближенных выражений координат точки кривой C в тех случаях, когда известны сферические изображения лишь в ряде отдельных точек M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Если принять за независимое переменное длину дуги σ сферического изображения, отсчитываемой от точки m_0, то равенства (6)—(8) представятся в виде

$$x = x_0 + \int_0^\sigma \xi R d\sigma; \tag{9}$$

$$y = y_0 + \int_0^\sigma \eta R d\sigma; \tag{10}$$

$$z = z_0 + \int_0^\sigma \zeta R d\sigma, \tag{11}$$

где

$$R = \frac{ds}{d\sigma} \tag{12}$$

есть радиус первой кривизны кривой C.

3. В случае плоской кривой C можно принять плоскость последней за плоскость XOY. В этом случае $z = z_0 = 0$ и сферическим изображением кривой C служит дуга большого круга, являющегося пересечением сферы с плоскостью XOY. При этом $\zeta = 0$ и равенство (11) превращается в тождество.

Между углами α и β имеет место зависимость

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

и координаты сферического изображения даются равенствами (рис. 2)

$$\xi = \cos\alpha, \quad \eta = \sin\alpha. \tag{13}$$

Равенства (6), (7), определяющие координаты точки M, могут быть заменены одним равенством, если ввести комплексные аффиксы точек M и m, положив

$$Z = x + iy; \tag{14}$$

$$w = \xi + i\eta. \tag{15}$$

Упомянутое равенство имеет вид

$$Z = Z_0 + \int_0^s w\,ds \tag{16}$$

или

$$Z = Z_0 + \int_0^{\sigma} wR\,d\sigma. \tag{17}$$

4. Из равенств (16), (17) получаются приближенные выражения Z, когда значения w заданы для ряда значений аргумента s.

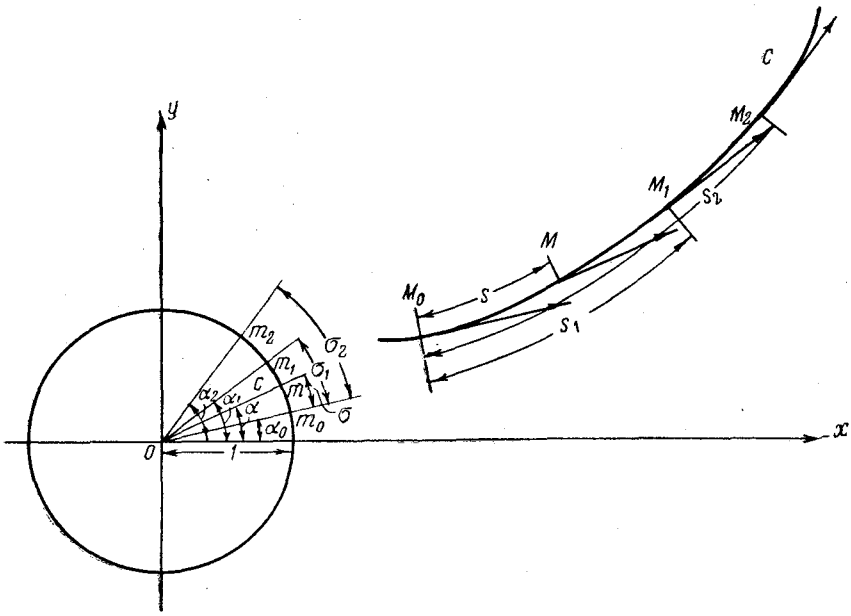


Рис. 2

Рассмотрим простейший случай, когда значения w_0 и w_1 задаются в точках M_0, M_1. Аппроксимируя w линейной функцией

$$w \approx w_0 + (w_1 - w_0)\frac{s}{s_1},$$

получаем из формулы (16)

$$Z_1 \approx Z_0 + \frac{w_0 + w_1}{2} s_1. \tag{18}$$

В силу равенств (13) и (15)

$$\frac{w_0 + w_1}{2} = w_{\frac{1}{2}} \cos\frac{\omega}{2}, \tag{19}$$

где

$$w_{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1)i}; \tag{20}$$

$$\omega = |\alpha_1 - \alpha_0|. \tag{21}$$

Равенство (18) может быть представлено в виде

$$Z_1 = Z_0 + w_{\frac{1}{2}} \cos\frac{\omega}{2} s_1. \tag{22}$$

Две другие приближенные формулы выведем из равенства (17). Полагая радиус кривизны R постоянным, находим из равенства (17)

$$Z_1 = Z_0 + R\int_0^{\sigma_1} e^{(\alpha_0+\sigma)i} ds,$$

откуда после очевидных преобразований

$$Z_1 = Z_0 + 2Rw_{\frac{1}{2}} \sin\frac{\omega}{2}. \tag{23}$$

Принимая во внимание, что

$$R = \frac{s_1}{\omega}$$

и учитывая соотношение (19), получаем приближенное выражение

$$Z_1 = Z_0 + \frac{w_0 + w_1}{2} s_1 \frac{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}{\left(\frac{\omega}{2}\right)}. \tag{24}$$

Из приведенного выше анализа следует, что равенство (24) не содержит погрешности и является точным в том случае, когда кривая C — окружность.

Не делая предположения о постоянстве радиуса кривизны кривой C, можно получить приближенное выражение Z из равенства (17) иначе. Заменяя интеграл в правой части равенства его приближенным выражением по формуле

$$\int_0^{\sigma_1} wRd\sigma \approx w_{\frac{1}{2}} \int_0^{\sigma_1} Rd\sigma = w_{\frac{1}{2}} s_1,$$

находим

$$Z_1 = Z_0 + w_{\frac{1}{2}} s_1. \tag{25}$$

Последнее равенство в силу соотношения (19) может быть представлено в виде

$$Z_1 = Z_0 + \frac{w_0 + w_1}{2} s_1 \sec\frac{\omega}{2}. \tag{26}$$

Каждое из равенств (18), (24), (26) позволяет найти приближенные координаты точки M_1 по координатам точки M_0, если известны направления касательных в концах дуги M_0M_1 и ее длина.

5. Равенства (18), (24) и (26) могут быть записаны в векторной форме. Пусть $\vec{r}$ обозначает вектор положения точки M кривой C, а век-

тор $\vec{t}$ единичный вектор касательной, соответствующий этой точке (рис. 3). Равенство (18) запишется в виде

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}(\vec{t}_0 + \vec{t}_1)\, s_1. \tag{27}$$

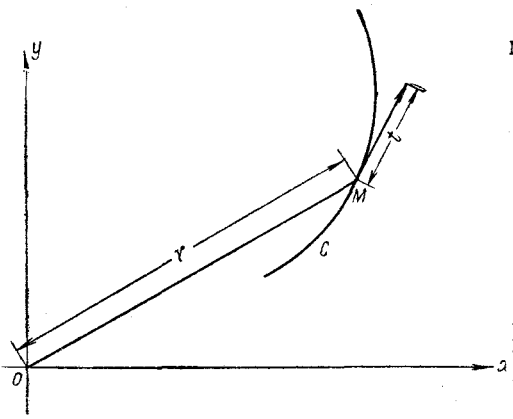


Рис. 3

Равенства (24) и (26) примут соответственно вид

$$\vec{r}_1 \approx \vec{r}_0 + \frac{1}{2}(\vec{t}_0 + \vec{t}_1)\, s_1 \frac{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}{\left(\frac{\omega}{2}\right)} \tag{28}$$

и

$$\vec{r}_1 \approx \vec{r}_0 + \frac{1}{2}(\vec{t}_0 + \vec{t}_1)\, s_1 \sec\frac{\omega}{2}. \tag{29}$$

Векторная запись равенств показывает построения, при помощи которых по данным векторам $\vec{t}_0$, $\vec{t}_1$ и длине дуги s_1 осуществляется переход от вектора положения $\vec{r}_0$ к вектору положения $\vec{r}_1$, т. е. из точки M_0 в точку M_1. Так, например, для перехода из точки M_0 в точку M_1, согласно равенству (27), следует из точки M_0 придвинуться на расстояние $\frac{1}{2}s_1$ по направлению вектора $\vec{t}_0$ и, придя в точку M',

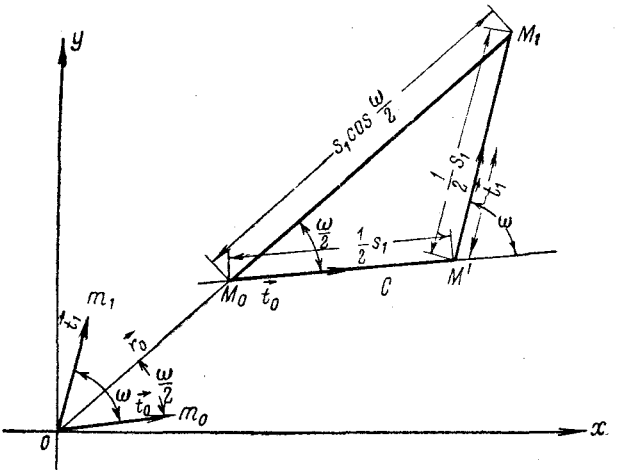


Рис. 4

продвинуться из нее на расстояние $\frac{1}{2}s_1$ в направлении вектора $\vec{t}_1$ (рис. 4).

Подобное же построение получается на основе равенства (28), только по направлению векторов $\vec{t}_0$ и $\vec{t}_1$ следует перемещаться не на расстояние $\frac{1}{2}s_1$, а на расстояние

$$\frac{1}{2}s_* = \frac{1}{2}s_1 \frac{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}{\left(\frac{\omega}{2}\right)}. \tag{30}$$

Величина угла ω между векторами $\vec{t}_0$ и $\vec{t}_1$ определяется равенством

$$\cos\omega = \vec{t}_0 \cdot \vec{t}_1. \tag{31}$$

Нетрудно видеть, что в точку M_1, определяемую указанным построением, можно прийти, проведя окружность радиуса $R = \frac{s_1}{\omega}$, касающуюся в точке M_0 вектора $\vec{t}_0$, и отложив на ней от точки M_0 дугу, равную s_1 (рис. 5).

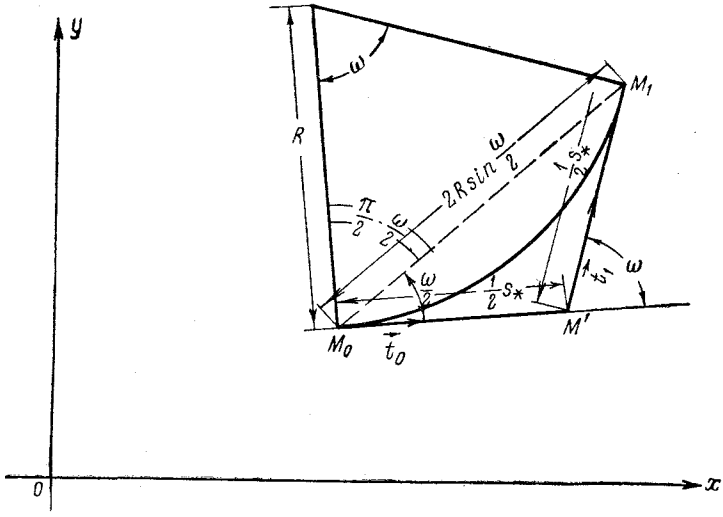


Рис. 5

При выполнении первого построения точка M_1 оказывается вершиной равнобедренного треугольника $M_0M'M_1$ (рис. 5), имеющего боковую сторону длины $\frac{1}{2}s_*$, а углы при основании $\frac{\omega}{2}$. Длина основания треугольника

$$M_0M_1 = s_* \cos\frac{\omega}{2} = 2s_1 \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}.$$

При втором построении точка M_1 является концом хорды, стягивающей дугу окружности радиуса R. Центральный угол, соответствующий дуге, равен ω. Точка M_1 находится в одной из вершин при основании равнобедренного треугольника с углом $\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$ при основании и длиной боковой стороны R. Длина основания треугольника

$$M_0M_1 = s_* \cos\frac{\omega}{2} = 2s_1 \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}.$$

Таким образом, как в первом, так и во втором построении точка M_1 лежит на прямой, образующей угол $\frac{\omega}{2}$ с направлением вектора $\vec{t}_0$ на одинаковом расстоянии от точки M_0. Равенство (29) приводит к построению, аналогичному построениям, соответствующим равенствам (27) и

(28). Разница лишь в том, что в последнем случае на векторах $\vec{t}_0$ и $\vec{t}_1$ откладываются отрезки длины $\frac{1}{2}s^*$, где

$$s^* = s_1 \sec \frac{\omega}{2}.$$

Это построение равносильно следующему (рис. 6). Через точку M_0 проводится прямая, составляющая угол $\frac{\omega}{2}$ с направлением вектора $\vec{t}_0$ и на этой прямой откладывается длина $M_0M_1 = s_1$. Во всех трех случаях точка M_1 находится на прямой, проходящей через точку M_0 и на-

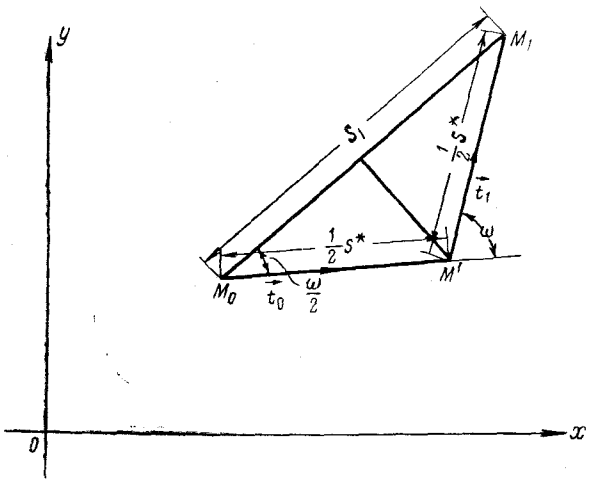


Рис. 6

правленной под углом $\frac{\omega}{2}$ к вектору $\vec{t}_0$, касательной в точке M_0 к кривой C, т. е. параллельно биссектрисе между направлениями векторов $\vec{t}_0$ и $\vec{t}_1$. В первом случае точка M_1 оказывается на расстоянии

$$l_1 = s_1 \cos \frac{\omega}{2}$$

от M_0, во втором случае на расстоянии

$$l_2 = 2s_1 \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\omega}$$

и в третьем на расстоянии

$$l_3 = s_1.$$

Нетрудно видеть, что

$$l_1 < l_2 < l_3. \tag{32}$$

6. Общее выражение, представляющее аффикс Z_1 точки M_1,

$$Z_1 = Z_0 + \int_0^{\sigma_1} w R d\sigma \tag{33}$$

дает основание для аналогии между задачей определения положения конца дуги M_0M_1 по заданным направлениям касательной в различных ее точках и задачей определения положения центра тяжести круговой дуги. Рассмотрим c — дугу окружности, являющуюся сферическим изображением дуги M_0M_1 кривой C (рис. 7). Предположим, на этой дуге расположены массы так, что погонная плотность в точке m равна μ. Аффикс Z_* центра тяжести дуги определяется равенством

$$M_*Z_* = \int_0^{\sigma_1} w\mu d\sigma, \tag{34}$$

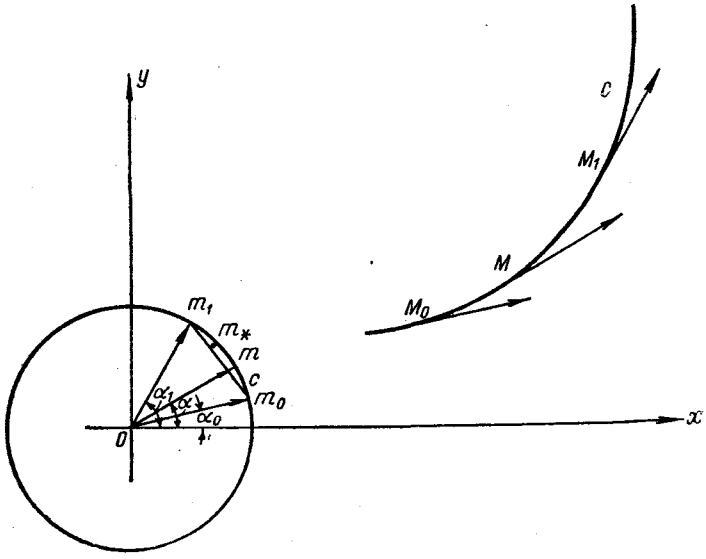


Рис. 7

причем масса, распределенная на дуге,

$$M_* = \int_0^{\sigma_1} \mu d\sigma. \tag{35}$$

Если распределение погонной плотности μ на дуге m_0m_1 определить условием

$$\mu = R, \tag{36}$$

то

$$M_* = \int_0^{\sigma_1} Rd\sigma = \int_0^{s_1} ds = s_1, \tag{37}$$

и равенство (33) представится в виде

$$Z_1 = Z_0 + Z_*s_1. \tag{38}$$

Сообразно с характером распределения кривизны на дуге M_0M_1 распределена масса на дуге ее сферического изображения. В точке m сферического изображения плотность μ возрастает при возрастании радиуса кривизны, соответствующей точке M. Каждому распределению

массы на дуге m_0m_1 отвечает определенное положение центра тяжести и определенная величина его аффикса Z_*. Так, например, если половина массы, равная $\frac{s_1}{2}$, сосредоточена в точке m_0, а другая в точке m_1, то центр тяжести $m_*^{(1)}$ лежит на середине хорды m_0m_1 (рис. 8) и

$$Z_*^{(1)} = \frac{1}{2}(w_0 + w_1) = w_{\frac{1}{2}} \cos\frac{\omega}{2}. \tag{39}$$

При равномерном распределении массы на дуге m_0m_1 центр тяжести дуги лежит на биссектрисе угла m_0Om_1 в точке $m_*^{(2)}$ и

$$Z_*^{(2)} = w_{\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}; \quad \omega = |\alpha_1 - \alpha_0|. \tag{40}$$

Если вся масса s_1 сосредоточена в точке пересечения биссектрисы угла m_0Om_1 с дугой, то центр тяжести $m_*^{(3)}$ находится в этой точке и

$$Z_*^{(3)} = w_{\frac{1}{2}}. \tag{41}$$

При иных распределениях массы на дуге m_0m_1 центр тяжести m_* займет положение, отличное от указанных. Область возможных положе-

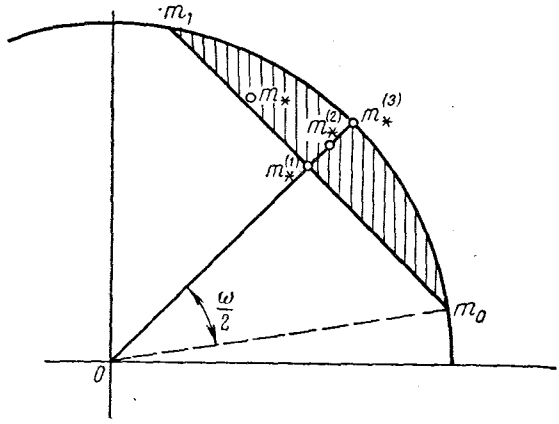


Рис. 8

ний центра тяжести m_* (на рис. 8 показана штриховкой) является сегментом окружности, опирающимся на хорду m_0m_1 и однозначно определяемым положением ее концов.

7. Погонная плотность μ на дуге m_0m_1 определяется, согласно соотношению (36), соответствующей величиной радиуса кривизны на дуге M_0M_1. Каждому распределению кривизны на дуге M_0M_1 отвечает распределение плотности μ на дуге m_0m_1 и определенное положение центра тяжести m_*, а стало быть, согласно равенству (38), определенное положение ее конца M_1. Так, например, в том случае, когда кривая C имеет форму ломаной линии $M_0M'M_1$ (см. рис. 4), масса на дуге m_0m_1 сосредоточена в точках m_0, m_1 и распределена между ними поровну. Аффиксом центра тяжести является $Z_*^{(1)}$. Согласно равенству (39), построение точки M_1 по формуле (38) приводится к отложению отрезка длины $s_1 \cos\frac{\omega}{2}$ на биссектрисе между направлениями линий M_0M' и $M'M_1$.

Если бы в точке m_0 была сосредоточена масса s', а в точке m_1 масса $s'' = s_1 - s'$, то центр тяжести m_* лежал бы на хорде, соединяющей m_0 и m_1, а его аффикс

$$Z_* = \frac{s'w_0 + s''w_1}{s_1}.$$

В этом случае линия C изображалась бы в виде ломаной $M_0M'M_1$ со сторонами, имеющими соответственно длины s' и s''. Из формулы (38) следует, что аффикс точки M_1

$$Z_1 = Z_0 + s_1Z_* = Z_0 + s'w_0 + s''w_1 \qquad (42)$$

и стало быть формула (38) дает как раз конец ломаной (рис. 9).

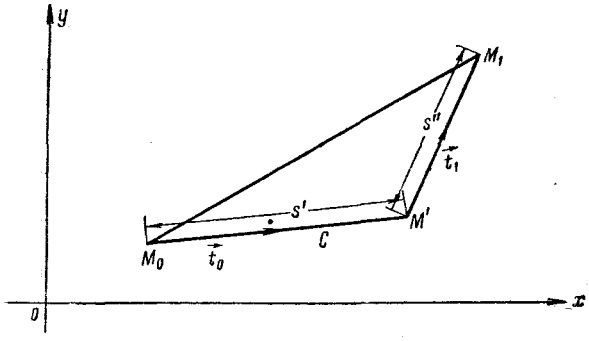


Рис. 9

Когда кривая C является дугой окружности, масса μ равномерно распределяется по дуге m_0m_1. Аффикс центра тяжести будет $Z_*^{(2)}$, согласно равенству (40). Точка M_1, определяемая равенством (38), находится на биссектрисе угла между направлениями касательных в точках M_0 и M_1 на расстоянии $\frac{2s_1\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}$ от точки M_0 (см. рис. 5).

Когда линия C резко изменяет свое направление в окрестности точки M_0 на направление биссектрисы между Om_0 и Om_1 и следует ему до подхода к точке M_1, где резким изломом переходит на направление Om_1, масса оказывается сосредоточенной в $m_*^{(3)}$ (см. рис. 8) и

$$Z_*^{(3)} = w_{\frac{1}{2}}s_1. \qquad (43)$$

Точка M_1, согласно формуле (38), лежит на прямой, проходящей через точку M_0, параллельно биссектрисе между Om_0 и Om_1 на расстоянии s_1 от M_0 (см. рис. 6).

Область возможных положений точки M_1 определяется областью возможных положений центра тяжести m_*. Эта область является сегментом окружности радиуса s_1 с центром в точке M_0 (рис. 10). Радиусы M_0A_0 и M_0B_0, соединяющие концы дуги A_0B_0, ограничивающей сектор с центром M_0, параллельны Om_0 и Om_1.

Если определить положение точки M_1, согласно первому из указанных выше приближенных способов, то она окажется на середине хорды A_0B_0 в положении $M_1^{(1)}$. Если определить положение точки M_1 в предположении постоянства кривизны дуги M_0M_1, то она окажется в положе-

Л Г И

нии $M_1^{(2)}$. Третьему из указанных выше приближенных способов отвечает точка $M_1^{(3)}$. Наибольшее возможное отклонение точек $M_1^{(1)}$, $M_2^{(2)}$, $M_3^{(3)}$ от истинного положения M_1 в направлении, перпендикулярном $M_0M_1^{(1)}$.

$$\Delta_1 = s_1 \sin\frac{\omega}{2}. \tag{44}$$

Наибольшее возможное отклонение точек $M_1^{(1)}$, $M_1^{(2)}$, $M_1^{(3)}$ от M_1 по направлению $M_0M_1^{(1)}$

$$\Delta_2 = 2s_1 \sin^2\frac{\omega}{4}. \tag{45}$$

Отношение

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \operatorname{tg}\frac{\omega}{4} \tag{46}$$

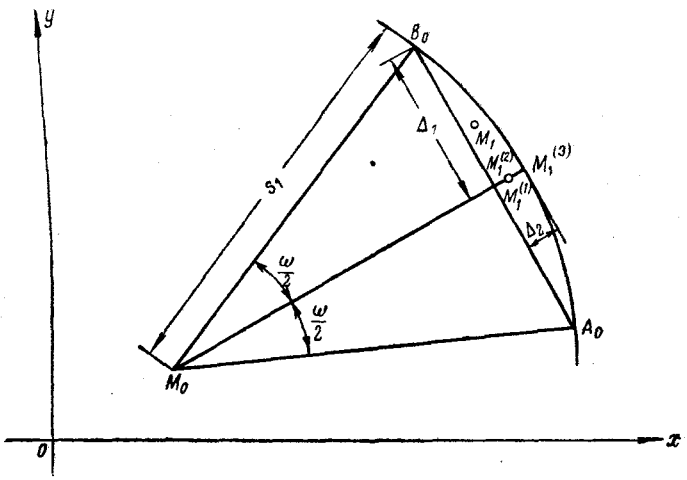


Рис. 10

мало при небольших значениях угла ω:

ω	1′	5′	10′	30′	1°	5°	10°	15°
$\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$	0,00007	0,00036	0,00072	0,0022	0,0044	0,022	0,044	0,074

Как видим, величиной Δ_2 можно пренебрегать по сравнению с Δ_1 и рассматривать лишь уклонения в направлении, перпендикулярном $M_0M_1^{(1)}$. Область возможных положений точки M_1 построена при допущении любого искривления линии M_0M_1 вплоть до ее перелома. Размер области возможных положений точки M_1 значительно уменьшается условием ограничения кривизны. Условие ограничения кривизны кривой C дается неравенством

$$R \geqslant a, \tag{47}$$

которое вносит в возможное распределение плотности μ на дуге m_0m_1 ограничение

$$\mu \geqslant a,$$

исключающее ряд положений центра тяжести m_* (см. рис. 8).

Если положить

$$\mu = a + \mu'; \quad \mu' \geqslant 0, \tag{48}$$

то распределение плотности μ на дуге $m_0 m_1$ можно рассматривать как наложение распределения плотности μ' на равномерное распределение плотности a. Центр тяжести первого распределения может оказаться в любой точке рассмотренного выше сегмента. Центр тяжести второго распределения находится в точке $m_*^{(2)}$. Аффиксы центров тяжести результирующего и составляющих распределений связаны соотношением

$$M_* Z_* = M_*^{(2)} Z_*^{(2)} + M'_* Z'_*, \tag{49}$$

где

$$M_* = s_1; \quad M_*^{(2)} = a\omega; \quad M'_* = s_1 - a\omega.$$

Из равенства (49) следует, что

$$Z_* - Z_*^{(2)} = \frac{M'_*}{M_*} (Z'_* - Z_*^{(2)}). \tag{50}$$

Равенство (50) показывает, что область возможных положений m_* получается из области возможных положений m'_* преобразованием подобия с центром в точке $m_*^{(2)}$. Она представляется прежним сегментом, уменьшенным в отношении

$$h = \frac{M'_*}{M_*} = 1 - \frac{a\omega}{s_1}. \tag{51}$$

В соответствии с уменьшением области возможных положений M_1 уменьшаются и границы возможных уклонений

$$\Delta_1 = h s_1 \sin\frac{\omega}{2}; \quad \Delta_2 = 2 h s_1 \sin^2\frac{\omega}{4}. \tag{52}$$

8. В общем случае по кривой C в ряде точек M_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ определено направление касательной и единичные векторы касательной $\vec{t}_k (k = 0, 1, \ldots, n)$ известны. Вектор положения $\vec{r}_k$ точки M_k связан с вектором положения $\vec{r}_{k-1}$ точки M_{k-1} одним из приближенных равенств

$$\vec{r}_k \approx \vec{r}_{k-1} + \frac{1}{2}(\vec{t}_{k-1} + \vec{t}_k)\Delta s_{k-1}; \tag{53}$$

$$\vec{r}_k \approx \vec{r}_{k-1} + \frac{1}{2}(\vec{t}_{k-1} + \vec{t}_k)\Delta s'_{k-1} \tag{54}$$

$$\vec{r}_k \approx \vec{r}_{k-1} + \frac{1}{2}(\vec{t}_{k-1} + \vec{t}_k)\Delta s''_{k-1}, \tag{55}$$

где

$$\Delta s_{k-1} = s_k - s_{k-1}; \tag{56}$$

$$\Delta s'_{k-1} = \Delta s_{k-1} \frac{\operatorname{tg}\frac{\omega_k}{2}}{\frac{\omega_k}{2}}; \tag{57}$$

$$\Delta s''_{k-1} = \Delta s_{k-1} \sec\frac{\omega_k}{2} \tag{58}$$

и угол ω_k между векторами $\vec{t}_{k-1}$, $\vec{t}_k$ определяется равенством

$$\cos\omega_k = \vec{t}_{k-1} \cdot \vec{t}_k. \tag{59}$$

Равенства (53)—(55) позволяют последовательно определить векторы положения $\vec{r}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), зная вектор $\vec{r}_0$, векторы $\vec{t}_k$ и расстояния s_k точек M_k от M_0 ($k = 1, 2, \ldots, n$). Если обозначить ошибки, связанные с приближенными равенствами (53)—(55) соответственно $\vec{\Delta}_k^{(1)}$, $\vec{\Delta}_k^{(2)}$, $\vec{\Delta}_k^{(3)}$, то, согласно вышеизложенному,

$$\vec{\Delta}_k^{(j)} = x_{k,1}^{(j)}\vec{\Delta}_{k,1} + x_{k,2}^{(j)}\vec{\Delta}_{k,2} \quad (j = 1, 2, 3), \tag{60}$$

где $\vec{\Delta}_{k,1}$ и $\vec{\Delta}_{k,2}$ — векторы, направленные соответственно перпендикулярно и параллельно биссектрисе векторов $\vec{t}_{k-1}$, $\vec{t}_k$ и имеющие величины

$$\Delta_{k,1} = h_k (s_k - s_{k-1}) \sin\frac{\omega_k}{2}; \quad 0 < h_k < 1; \tag{61}$$

$$\Delta_{k,2} = 2h_k (s_k - s_{k-1}) \sin^2\frac{\omega_k}{4}, \quad 0 < h_k < 1; \tag{62}$$

$x_{k,1}^{(j)}$ и $x_{k,2}^{(j)}$ — вещественные числа, не превосходящие по абсолютной величине единицы.

Ошибка $\vec{\delta}_k^{(j)}$ определения вектора $\vec{r}_k$ в результате последовательного использования приближенных равенств выражается формулой

$$\vec{\delta}_k^{(j)} = \sum_{i=1}^{k} x_{i,1}^{(j)}\vec{\Delta}_{i,1} + \sum_{i=1}^{k} x_{i,2}^{(j)}\vec{\Delta}_{i,2}. \tag{63}$$

Равенство (63) позволяет установить область $D_k^{(j)}$ возможного уклонения точки M_k от точки $M_k^{(j)}$, найденной одним из указанных способов. Эта область заключена в наименьшем выпуклом многоугольнике с центром в точке $M_k^{(j)}$, содержащем все точки, определяемые векторами положения, отличающимися от $r_k^{(j)}$ слагаемыми

$$\vec{\delta}_k = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i\vec{\Delta}_{i,1} + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i'\vec{\Delta}_{i,2}, \tag{64}$$

где

$$\varepsilon_i = \begin{cases} +1 \\ 0; \\ -1 \end{cases} \quad \varepsilon_i' = \begin{cases} +1 \\ 0. \\ -1 \end{cases}$$

Ввиду малости $\Delta_{i,2}$ по сравнению с $\Delta_{i,1}$ равенства (63) и (64) можно заменить приближенными

$$\vec{\delta}_k^{(j)} \approx \sum_{i=1}^{k} x_{i,1}^{(j)}\vec{\Delta}_{i,1} \tag{63'}$$

и

$$\vec{\delta}_k \approx \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i\vec{\Delta}_{i,1}. \tag{64'}$$

Из разложения

$$\vec{\Delta}_{k,1} \approx -\Delta_{k,1} \sin\left(\frac{\alpha_{k-1}+\alpha_k}{2}\right)\vec{e}_1 + \Delta_{k,2}\cos\left(\frac{\alpha_{k-1}+\alpha_k}{2}\right)\vec{e}_2,$$

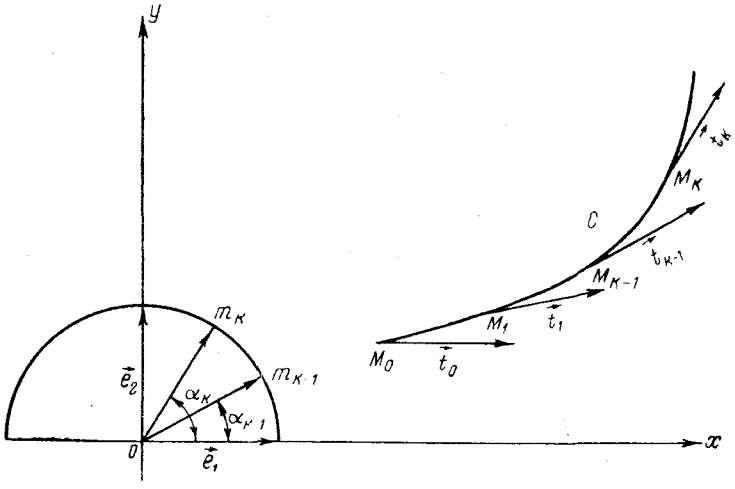


Рис. 11

где $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ означают орты по осям OX и OY (рис. 11), следует

$$\vec{\delta}_k \approx -\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \Delta_{i,1} \sin\left(\frac{\alpha_{i-1}+\alpha_i}{2}\right)\vec{e}_1 + \\ + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \Delta_{i,2} \cos\left(\frac{\alpha_{i-1}+\alpha_i}{2}\right)\vec{e}_2. \qquad (65)$$

Равенство (65) показывает, что область $D_k^{(j)}$ содержится внутри прямоугольника с центром $M_k^{(j)}$ и сторонами, параллельными осям координат (рис. 12).

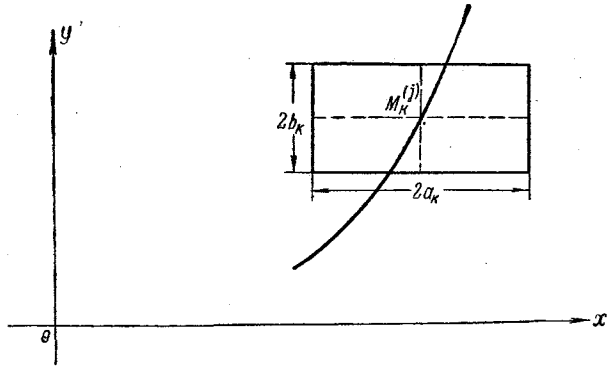


Рис. 12

Длины этих сторон $2a_k$ и $2b_k$ определяются равенствами:

$$a_k = Max \left| \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \Delta_{i,1} \sin\left(\frac{\alpha_{i-1}+\alpha_i}{2}\right) \right|; \qquad (66)$$

$$b_k = Max \left| \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \Delta_{i,1} \cos\left(\frac{\alpha_{i-1}+\alpha_i}{2}\right) \right|. \qquad (67)$$

В частном случае, когда все углы α_k заключаются в пределах первой четверти,

$$a_k = \sum_{i=1}^{k} \Delta_{i,1} \sin\left(\frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2}\right); \tag{66'}$$

$$b_k = \sum_{i=1}^{k} \Delta_{i,1} \cos\left(\frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2}\right). \tag{67'}$$

9. Пространственная задача трактуется совершенно так же, как плоская. Вводя вектор положения точки M пространственной кривой C

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \tag{68}$$

и единичный вектор касательной

$$\vec{t} = \xi\vec{e}_1 + \eta\vec{e}_2 + \zeta\vec{e}_3, \tag{69}$$

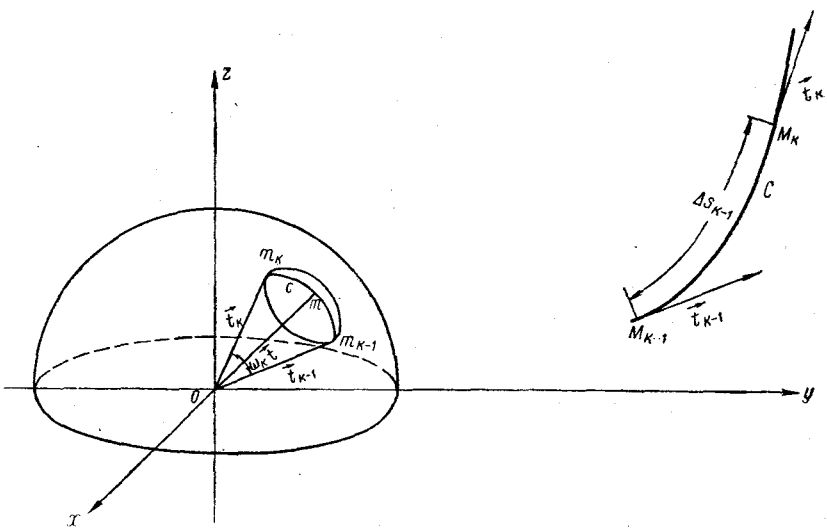


Рис. 13

где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — орты координатных осей, можно заменить равенства (6)—(8) векторным равенством

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^s \vec{t}\,ds \tag{70}$$

и соответственно равенства (9)—(11) векторным равенством

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^\sigma \vec{t}R\,ds. \tag{71}$$

Равенства (70) и (71) являются основанием для построения приближенных формул, выражающих вектор положения $\vec{r}_k$ конца дуги $M_{k-1}M_k$ через вектор положения $\vec{r}_{k-1}$ ее начала и единичные векторы $\vec{t}_{k-1}$, $\vec{t}_k$ касательной в начале и конце дуги. Если на дуге $M_{k-1}M_k$ аппроксимировать вектор $\vec{t}$ линейной функцией s, положив

$$\vec{t} \approx \vec{t}_{k-1} + (\vec{t}_k - \vec{t}_{k-1})\frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}}, \quad s_{k-1} \leqslant s \leqslant s_k, \tag{72}$$

то на основании (70) получается первое приближенное равенство

$$\vec{r}_k \approx \vec{r}_{k-1} + \frac{1}{2}(\vec{t}_{k-1} + \vec{t}_k)(s_k - s_{k-1}). \tag{73}$$

Второе приближенное равенство получается в предположении постоянства R на дуге $M_{k-1}M_k$ в результате аппроксимации дуги $m_{k-1}m_k$ сферического изображения дугой большого круга, проходящего через точки m_{k-1} и m_k (рис. 13).

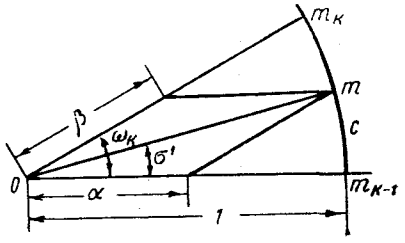


Рис. 14

В этом случае вектор $\vec{t}$ компланарен векторам $\vec{t}_{k-1}$, $\vec{t}_k$. Он представляется в виде

$$\vec{t} = \alpha\vec{t}_{k-1} + \beta\vec{t}_k, \tag{74}$$

где

$$\alpha = \frac{\sin(\omega_k - \sigma')}{\sin\omega_k}; \qquad \beta = \frac{\sin\sigma'}{\sin\omega_k} \tag{75}$$

и

$$\sigma' = \sigma - \sigma_{k-1}; \quad \omega_k = \sigma_k - \sigma_{k-1}. \tag{76}$$

Равенства (74), (75), (76) следуют непосредственно из рис. 14. Выполняя интегрирование по дуге сферического изображения от точки m_{k-1} до точки m_k, в силу равенства (71) имеем

$$\vec{r}_k \approx \vec{r}_{k-1} + R\vec{t}_{k-1}\int_0^{\omega_k}\frac{\sin(\omega_k - \sigma')}{\sin\omega_k}\,d\sigma' + R\vec{t}_k\int_0^{\omega_k}\frac{\sin\sigma'}{\sin\omega_k}\,d\sigma',$$

откуда

$$\vec{r}_k \approx \vec{r}_{k-1} + R(\vec{t}_{k-1} + \vec{t}_k)\operatorname{tg}\frac{\omega_k}{2}. \tag{77}$$

Приближенная кривая C, отвечающая принятой аппроксимации сферического изображения, есть плоская кривая с постоянным радиусом кривизны R. Дуга $M_{k-1}M_k$ есть дуга окружности радиуса R. Ее длина

$$\Delta s_{k-1} = s_k - s_{k-1} = R\omega_k. \tag{78}$$

Равенство (77) может быть представлено в виде

$$\vec{r}_k \approx \vec{r}_{k-1} + \frac{1}{2}(\vec{t}_{k-1} + \vec{t}_k)\Delta s_{k-1}\frac{\operatorname{tg}\frac{\omega_k}{2}}{\left(\frac{\omega_k}{2}\right)}. \tag{79}$$

Величина угла ω_k определяется уравнением

$$\cos\omega_k = \vec{t}_{k-1}\cdot\vec{t}_k. \tag{80}$$

Третье приближенное выражение $\vec{r}_k$ может быть получено на основе равенства (71) в результате осреднения вектора $\vec{t}$ на дуге $M_{k-1}M_k$. В равенстве

$$\vec{r}_k \approx \vec{r}_{k-1} + \vec{t}_{\text{ср}} \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} R d\sigma = \vec{r}_{k-1} + \vec{t}_{\text{ср}} \Delta s_{k-1} \tag{81}$$

единичный вектор $\vec{t}_{\text{ср}}$ направлен по биссектрисе угла, образованного векторами $\vec{t}_{k-1}$, $\vec{t}_k$. Вектор $\vec{t}_{\text{ср}}$ коллинеарен вектору $\vec{t}_{k-1} + \vec{t}_k$

$$\vec{t}_{\text{ср}} = \lambda_k (\vec{t}_{k-1} + \vec{t}_k). \tag{82}$$

Скалярная величина λ_k определяется из условия

$$|\vec{t}_{\text{ср}}| = t_{\text{ср}} = 1.$$

Простое вычисление показывает, что

$$\lambda_k = \frac{1}{2} \sec \omega_k.$$

Равенство (81) представляется в виде

$$\vec{r}_k \approx \vec{r}_{k-1} + \frac{1}{2} (\vec{t}_{k-1} + \vec{t}_k) \Delta s_{k-1} \sec \frac{\omega_k}{2}. \tag{83}$$

В равенствах (73)—(83) вектор, добавляемый в правой части к вектору $\vec{r}_{k-1}$, направлен по биссектрисе между векторами $\vec{t}_{k-1}$ и $\vec{t}_k$. Наименьшую величину добавляемый вектор имеет в равенстве (73), наибольшую — в равенстве (83).

10. Равенство (71) дает место для той же механической аналогии, которая была отмечена в случае плоской кривой.

Если на дуге $m_{k-1}m_k$ сферического изображения (см. рис. 13) распределить массу $M_*^{(k)}$ с погонной плотностью

$$\mu = R, \tag{84}$$

то центр тяжести $m_*^{(k)}$ этой массы будет характеризоваться вектором положения

$$\vec{\tau}_k = \frac{1}{M_*^{(k)}} \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} \mu \vec{t} d\sigma. \tag{85}$$

Масса

$$M_*^{(k)} = \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} \mu d\sigma = \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} R d\sigma = s_k - s_{k-1} = \Delta s_{k-1}. \tag{86}$$

Равенства (84)—(86) позволяют представить связь между $\vec{r}_{k-1}$ и $\vec{r}_k$ в виде

$$\vec{r}_k = \vec{r}_{k-1} + \vec{\tau}_k \Delta s_{k-1}. \tag{87}$$

При изменении распределения плотности μ на дуге $m_{k-1}m_k$ изменяется положение центра тяжести $m_*^{(k)}$. Но не только изменение распределения плотности μ на дуге $m_{k-1}m_k$ сказывается на положении центра тяжести $m_*^{(k)}$. В отличие от случая плоской кривой, когда сферическое изображение $m_{k-1}m_k$ дуги $M_{k-1}M_k$ лежит на дуге большого

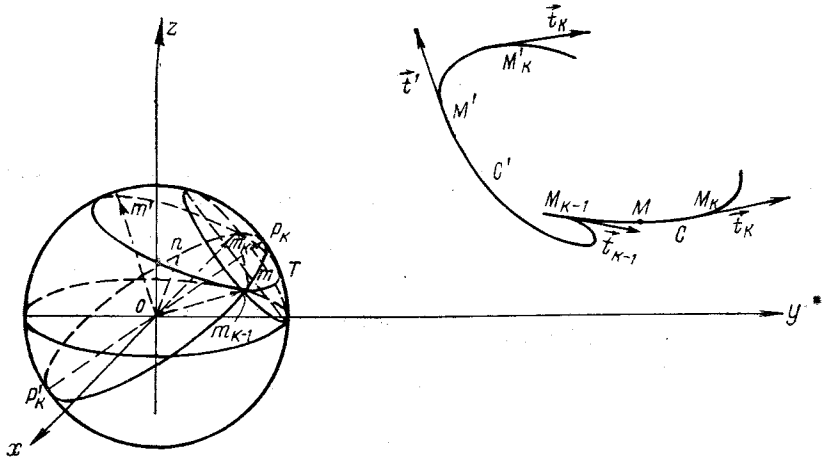


Рис. 15

круга и вполне определяется конечными ее точками, в общем случае пространственной кривой конечные точки дуги m_{k-1}, m_k не определяют ее. Между ними могут проходить и другие линии, отличные от дуги большого круга. Можно, например, соединить точки m_{k-1}, m_k какой-либо дугой малого круга. В последнем случае вектор $\vec{Om} = \vec{t}$ образует с направлением перпендикуляра On к плоскости малого круга постоянный угол (рис. 15), и дуга $M_{k-1}M_k$ кривой C будет винтовой линией. На рис. 15 показаны дуги $M_{k-1}MM_k$ и $M_{k-1}M'M_k'$ винтовых линий C и C', соответствующие дугам $m_{k-1}mm_k$ и $m_{k-1}m'm_k$, окружность большого круга, проходящего через точки m_{k-1}, m_k и точки p_k, p_k', середин дуг большего круга с концами в точках m_{k-1}, m_k. Дуги $M_{k-1}P_kM_k$ и $M_{k-1}P_k'M_k'$ окружностей C и C', соответствующие дугам $m_{k-1}p_km_k$ и $m_{k-1}p_k'm_k$, показаны на рис. 16. Подобно тому, как в плоской задаче рассматривалась только дуга $M_{k-1}P_kM_k$, соответствующая меньшей дуге $m_{k-1}p_km_k$, в пространственной задаче (см. рис. 15) будет рассматриваться только дуга $M_{k-1}MM_k$ кривой C, соответствующая меньшей дуге $m_{k-1}mm_k$, соединяющей точки m_{k-1}, m_k. Такое ограничение диктуется характером искривления буровых скважин на небольших длинах проходки. Меньшие дуги малых кругов, проходящие через точки m_{k-1} и m_k, располагаются на поверхности шарового сегмента T, отсекаемого плоскостью, перпендикулярной

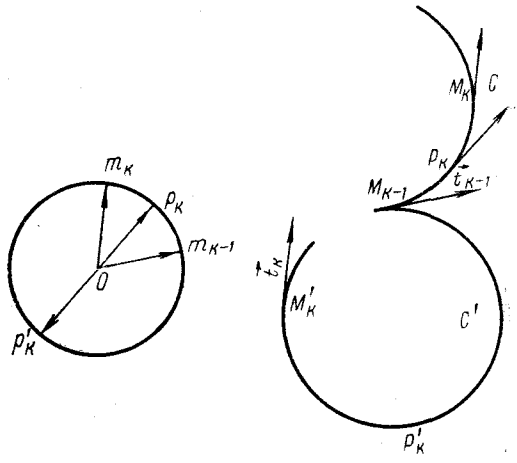


Рис. 16

Op_k (см. рис. 15). В дальнейшем будут рассматриваться лишь дуги $m_{k-1}m_k$, сферического изображения, которые лежат на поверхности сегмента T. Центр тяжести масс, расположенных на дуге $m_{k-1}m_k$ любой кривой, лежащей на поверхности сегмента T, находится внутри или на поверхности последнего. Не представляет большого труда убедиться, что при соответствующем расположении масс любая точка сегмента T может оказаться центром тяжести. В том случае, когда погонная плотность μ на дуге $m_{k-1}m_k$ удовлетворяет неравенству

$$\mu \geqslant a,$$

область возможных положений центра тяжести масс составляет лишь часть сегмента T. Возможное уклонение центра тяжести m_* от центра

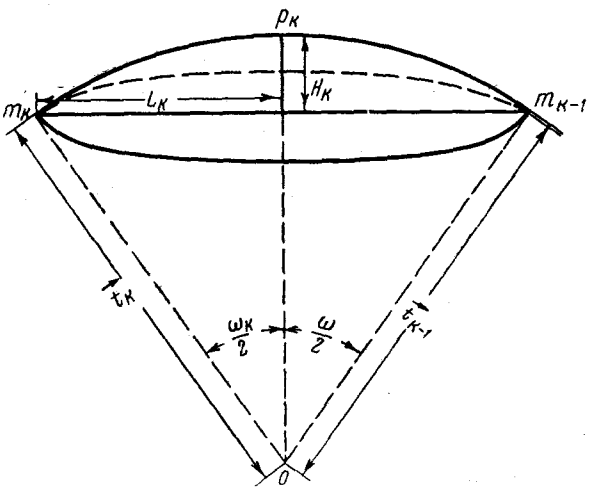


Рис. 17

основания в направлении, параллельном основанию сегмента, не превосходит величины (рис. 17)

$$L_k = \sin\frac{\omega_k}{2}. \tag{88}$$

Уклонение в направлении, перпендикулярном основанию, не превосходит

$$H_k = 2\sin^2\frac{\omega_k}{2} \tag{89}$$

и вследствие малости по сравнению с L_k не рассматривается.

11. Область возможных положений конца M_k дуги $M_{k-1}M_k$ при заданном положении начала M_{k-1} устанавливается на основании указанной аналогии между задачей определения положения точки M_k и задачей определения положения центра тяжести сферического изображения. Согласно равенству (87), областью возможных положений точки M_k является сегмент шара радиуса Δs_{k-1} с центром в точке M_{k-1} (рис. 18), отсекаемый плоскостью, перпендикулярной к плоскости векторов $\Delta s_{k-1}\vec{t}_{k-1}$, $\Delta s_{k-1}\vec{t}_k$ и проходящей через их концы.

Возможное отклонение M_k от центра основания сегмента $M_k^{(1)}$ в направлении, параллельном плоскости основания, не превосходит величины

$$\Delta_k' = \Delta s_{k-1} \sin \frac{\omega_k}{2}. \tag{90}$$

Возможное уклонение в направлении, перпендикулярном основанию, не превосходит

$$\Delta_k'' = 2\Delta s_{k-1} \sin^2 \frac{\omega_k}{4}. \tag{91}$$

Величиной последнего можно пренебречь по сравнению с первым. Если определить величину вектора $\vec{r}_k$ по одной из формул (73),

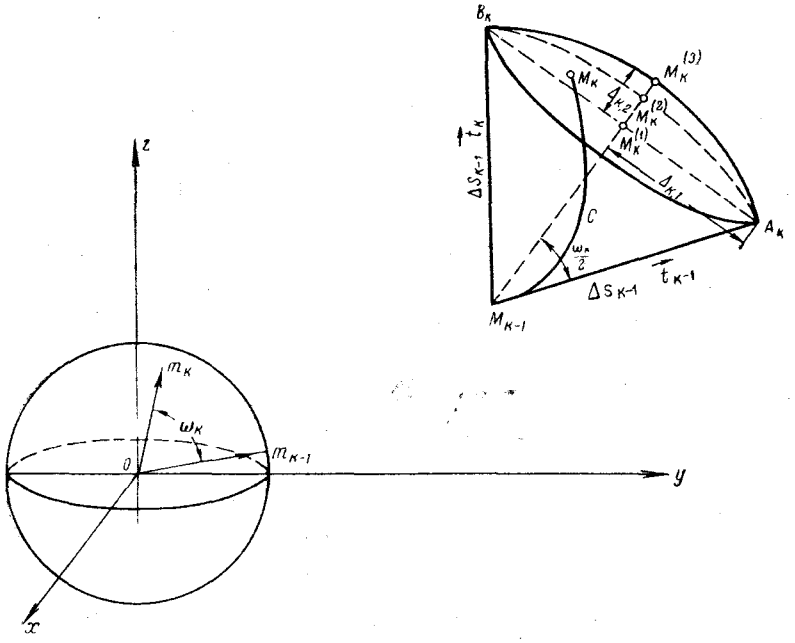


Рис. 18

(79), (83), считая вектор $\vec{r}_{k-1}$ заданным без погрешности, то истинное положение может уклоняться от расчетного на вектор

$$\vec{\Delta}_k^{(j)} = x_{k,1}^{(j)} \vec{\Delta}_{k,1} + x_{k,2}^{(j)} \vec{\Delta}_{k,2} + x_{k,3}^{(j)} \vec{\Delta}_{k,3} \quad (j = 1, 2, 3), \tag{92}$$

где

$$\vec{\Delta}_{k,1} = \frac{1}{2} (\vec{t}_k - \vec{t}_{k-1}) \Delta s_{k-1}; \tag{93}$$

$$\vec{\Delta}_{k,2} = \frac{1}{2} [\vec{t}_{k-1} \vec{t}_k] \Delta s_{k-1} \sec \frac{\omega_k}{2}; \tag{94}$$

$$\vec{\Delta}_{k,3} = (\vec{t}_{k-1} + \vec{t}_k) \Delta s_{k-1} \sec \frac{\omega_k}{2} \sin^2 \frac{\omega_k}{4}; \tag{95}$$

$x^{(j)}_{k,1}$, $x^{(j)}_{k,2}$, $x^{(j)}_{k,3}$ — скаляры, не превосходящие по абсолютной величине единицы и различные для трех указанных приближенных формул. Последнее обстоятельство отмечается указателем j.

Векторы $\vec{\Delta}_{k,1}$, $\vec{\Delta}_{k,2}$ и $x^{(j)}_{k,1}\vec{\Delta}_{k,1} + x^{(j)}_{k,2}\vec{\Delta}_{k,2}$ параллельны основанию сегмента. Величина последнего ограничена неравенством

$$|x^{(j)}_{k,1}\vec{\Delta}_{k,1} + x^{(j)}_{k,2}\vec{\Delta}_{k,2}| \leqslant \Delta'_k. \tag{96}$$

При последовательном определении векторов $\vec{r}_k$ в результате наложения ошибок возможное отклонение истинного положения M_k от расчетного выразится вектором

$$\vec{\delta}^{(j)}_k = \sum_{i=1}^{k} x^{(j)}_{i,1}\vec{\Delta}_{i,1} + \sum_{i=1}^{k} x^{(j)}_{i,2}\vec{\Delta}_{i,2} + \sum_{i=1}^{k} x^{(j)}_{i,3}\vec{\Delta}_{i,3}. \tag{97}$$

Равенство (97) позволяет установить область $D^{(j)}_k$ возможных отклонений истинного положения точки M_k от положения $M^{(j)}_k$, найденного расчетом по одной из указанных формул. Эта область содержится в наименьшем выпуклом многограннике с центром в точке $M^{(j)}_k$, заключающем точки, определяемые вектором положения

$$\vec{r} = \vec{r}^{(j)}_k + \vec{\delta}_k, \tag{98}$$

где $\vec{r}^{(j)}_k$ — вектор, определяемый расчетом

$$\vec{\delta}_k = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_{i,1}\vec{\Delta}_{i,1} + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_{i,2}\vec{\Delta}_{i,2} + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_{i,3}\vec{\Delta}_{i,3}; \tag{99}$$

$$\varepsilon_{i,j} = \begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, k \\ j = 1, 2, 3. \end{matrix}$$

Учитывая относительную малость $\Delta_{i,3}$ по сравнению с $\Delta_{i,1}$ и $\Delta_{i,2}$ можно заменить равенства (97) и (98) приближенными

$$\vec{\delta}^{(j)}_k \approx \sum_{i=1}^{k} x^{(j)}_{i,1}\vec{\Delta}_{i,1} + \sum_{i=1}^{k} x^{(j)}_{i,2}\vec{\Delta}_{i,2} \tag{100}$$

и

$$\vec{\delta}_k = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_{i,1}\vec{\Delta}_{i,1} + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_{i,2}\vec{\Delta}_{i,2}. \tag{101}$$

Если представить векторы $\vec{\Delta}_{k,j}$ их разложением

$$\vec{\Delta}_{k,j} = A_{k,j}\vec{e}_1 + B_{k,j}\vec{e}_2 + C_{k,j}\vec{e}_3 \tag{102}$$

по ортам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ координатных осей, то

$$\vec{\delta}_k = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{k} (\varepsilon_{i,1}A_{i,j} + \varepsilon_{i,2}B_{i,j} + \varepsilon_{i,3}C_{i,j})\vec{e}_j. \tag{103}$$

Равенство (102) показывает, что область $D_k^{(j)}$ содержится внутри прямоугольного параллелепипеда с центром в точке $M_k^{(j)}$ и сторонами, равными соответственно $2a_j$, где

$$a_j = \sum_{i=1}^{k} (|A_{i,j}| + |B_{i,j}| + |C_{i,j}|), \quad (j = 1, 2, 3). \tag{104}$$

Равенства (103) дают оценку расхождения между координатами истинного положения $M_k(x_k, y_k, z_k)$ и положения $M_k^{(j)}(x_k^{(j)}, y_k^{(j)}, z_k^{(j)})$, найденного по одной из указанных выше формул (73), (79), (83). Для практического использования полученной оценки следует знать коэффициенты $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$, входящие в формулу (102). Выражения этих коэффициентов могут быть получены из формул (93)—(95). Они сложны для практического использования и здесь не приводятся.

В целях практической оценки величины возможного уклонения истинного положения от расчетного оценим $|\vec{\delta}_k^{(j)}|$. Из выражения (97) следует, что

$$\delta_k^{(j)} = \left|\vec{\delta}_k^{(j)}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| x_{i,1}^{(j)} \vec{\Delta}_{i,1} + x_{i,2}^{(j)} \vec{\Delta}_{i,2} \right| + \sum_{i=1}^{n} |\vec{\Delta}_{i,3}|,$$

откуда в силу (96)

$$\delta_k^{(j)} \leqslant \sum_{i=1}^{k} 2 \sin \frac{\omega_i}{4} \left(\cos \frac{\omega_i}{4} + \sin \frac{\omega_i}{4} \right) \Delta s_{i-1}. \tag{105}$$

Последнее неравенство ввиду малости $\sin \frac{\omega_i}{4}$ по сравнению $\cos \frac{\omega_i}{4}$ может быть заменено неравенством

$$\delta_k^{(j)} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \sin \frac{\omega_i}{2} \Delta s_{i-1} \tag{106}$$

или еще более простым

$$\delta_k^{(j)} \leqslant \sin \frac{\omega_{ср}}{2} s_k. \tag{107}$$

Неравенства (106) и (107) дают несколько завышенную, но простую оценку величины возможного уклонения истинного положения от полученного по расчету.

12. Поясним изложенные теоретические соображения примером. Рассмотрим скважину, исследованную каротажной партией.

В одном из северных районов в 1954 г. скважина исследовалась на интервале 200—1200 *м*, считая по длине проходки от устья скважины, инклинометром ИШ2 с шагом измерения 20 *м*. В табл. 1 приведено расстояние s_k точки измерения M_k от устья скважины, угол ϑ_k, составляемый направлением касательной с вертикалью, и азимут φ_k вертикальной плоскости, проходящей через касательную. По данным измерений определялись координаты точки m_k

$$\xi_k = \cos \varphi_k \sin \vartheta_k; \quad \eta_k = \sin \varphi_k \sin \vartheta_k;$$

$$\zeta_k = \cos \vartheta_k. \tag{108}$$

Таблица 1

k	s_k	ϑ_k	φ_k	ξ_k	η_k	ζ_k	ω_k
—	*м*	*мин*	*град*	—	—	—	*мин*
1	180	12	287	+0,001	—0,003	0,99999	
2	200	24	320	+0,005	—0,004	0,99997	34
3	220	12	300	+0,002	—0,003	0,99999	30
4	240	54	272	+0,001	—0,016	0,99988	21
5	260	48	272	0,000	—0,014	0,99990	34
6	280	24	285	+0,002	—0,007	0,99997	21
7	300	48	280	+0,002	—0,014	0,99990	15
8	320	42	280	+0,002	—0,012	0,99992	30
9	340	24	280	+0,001	—0,007	0,99997	21
10	360	18	278	+0,001	—0,005	0,99999	26
11	380	36	285	+0,003	—0,010	0,99994	5
12	400	48	292	+0,005	—0,013	0,99990	5
13	420	54	290	+0,005	—0,015	0,99988	21
14	440	48	278	+0,002	—0,014	0,99990	15
15	455	30	287	+0,003	—0,008	0,99996	5
16	460	30	300	+0,004	—0,008	0,99996	15
17	480	30	292	+0,003	—0,008	0,99996	5
18	500	48	290	+0,005	—0,013	0,99990	5
19	520	60	278	+0,002	—0,017	0,99985	21
20	540	48	265	—0,001	—0,014	0,99990	26
21	560	36	290	+0,004	—0,010	0,99994	50
22	580	42	292	+0,004	—0,011	0,99992	46
23	600	54	290	+0,005	—0,015	0,99988	21
24	620	60	285	+0,005	—0,017	0,99985	15
25	640	36	285	+0,003	—0,010	0,99994	26
26	660	42	278	+0,002	—0,012	0,99992	5
27	680	60	285	+0,005	—0,017	0,99985	15
28	700	66	245	—0,008	—0,017	0,99981	15
29	720	42	292	+0,004	—0,011	0,99992	26
30	735	24	265	—0,001	—0,007	0,99997	15
31	860	12	238	—0,002	—0,003	0,99999	15
32	760	18	260	—0,001	—0,005	0,99999	21
33	780	12	238	—0,002	—0,003	0,99999	5
34	800	18	278	+0,001	—0,005	0,99999	15
35	820	18	238	—0,003	—0,004	0,99999	21
36	840	24	278	+0,001	—0,007	0,99997	15
37	860	12	238	—0,002	—0,003	0,99999	5
38	880	18	272	0,000	—0,005	0,99999	15
39	900	24	258	—0,001	—0,007	0,99997	21
40	920	12	190	—0,003	—0,01	0,99999	5
41	940	24	212	—0,005	—0,005	0,99997	21
42	960	30	160	—0,008	+0,003	0,99996	15
43	980	36	149	—0,009	+0,005	0,99994	26
44	1000	42	130	—0,008	+0,009	0,99992	30
45	1020	12	110	—0,001	+0,003	0,99999	5
46	1040	24	120	—0,003	+0,006	0,99997	43
47	1060	42	160	—0,011	+0,004	0,99992	22
48	1080	60	190	—0,017	—0,003	0,99985	23

По координатам точек m_{k-1}, m_k определялись углы ω_k, образованные векторами $\vec{t}_{k-1}$, $\vec{t}_k$, согласно формуле

$$\cos\omega_k = \vec{t}_{k-1}\vec{t}_k = \xi_{k-1}\xi_k + \eta_{k-1}\eta_k + \zeta_{k-1}\zeta_k. \qquad (109)$$

Значения угла ω_k записаны между k—1 и k-й строками. При расчете принималось во внимание, что зенитный угол ϑ_k определяется с точно-

стью до 6′, а азимут φ_k с точностью до 3°, чему соответствуют погрешности

$$\Delta_\vartheta = 0{,}002; \quad \Delta_\varphi = 0{,}05.$$

Погрешности определения координат

$$\Delta_\xi < \Delta_\varphi \sin\vartheta + \Delta_\vartheta < 0{,}05 \cdot 0{,}02 + 0{,}002 = 0{,}003;$$

$$\Delta_\eta < \Delta_\varphi \sin\vartheta + \Delta_\vartheta < 0{,}003;$$

$$\Delta_\zeta \approx \Delta_\vartheta \sin\vartheta < 0{,}02 \cdot 0{,}002 = 0{,}000004.$$

Вычисление координат точек $M_k(x_k, y_k, z_k)$, согласно (73), производится последовательно по формулам:

$$x_k = x_{k-1} + \frac{1}{2}(\xi_{k-1} + \xi_k)\,\Delta s_{k-1}; \tag{110}$$

$$y_k = y_{k-1} + \frac{1}{2}(\eta_{k-1} + \eta_k)\,\Delta s_{k-1}; \tag{111}$$

$$z_k = z_{k-1} + \frac{1}{2}(\zeta_{k-1} + \zeta_k)\,\Delta s_{k-1}. \tag{112}$$

Значения координат x_k, y_k, z_k приведены в табл. 2.

Координаты точек M_k, согласно равенствам (79) или (83), вычисляются по формуле, где в отличие от (110)—(112) в правую часть равенств вместо Δs_{k-1} входит $\dfrac{\Delta s_{k-1}\operatorname{tg}\frac{\omega_k}{2}}{\left(\frac{\omega_k}{2}\right)}$ или $\Delta s_{k-1}\sec\frac{\omega_k}{2}$. Для значения угла ω_k, указанных в табл. 1,

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\omega_k}{2}}{\left(\frac{\omega_k}{2}\right)} < \sec\frac{\omega_k}{2} < \sec 30' = 1{,}00004 \approx 1.$$

В пределах точности расчета этот множитель не оказывает влияния на результат вычисления и все указанные приближенные правила дают одинаковый результат. Для оценки величины возможного уклонения истинного положения M_k от расчетного в табл. 2 приведены значения Δ_k' вычисленные, согласно (90).

Таблица 2

k	Δs_{k-1}	x_k	y_k	z_k	Δ'_k	$\sum_{i=1}^{k} \Delta'_i$	h_k	$h_k\Delta'_k$	$\sum_{i=1}^{k} h_k\Delta'_i$
—	*м*	*м*	*м*	*м*	*м*	*м*	—	*м*	*м*
1		0	0	0		0			0
	20				0,10		0,43	0,04	
2		0,06	—0,07	20,00		0,10			0,04
	20				0,09		0,50	0,05	
3		0,13	—0,15	40,00		0,19			0,09
	20				0,06		0,65	0,04	
4		0,16	—0,34	60,00		0,25			0,13
	20				0,10		0,43	0,04	
5		0,17	—0,54	80,00		0,25			0,17
	20				0,06		0,65	0,04	
6		0,19	—0,74	100,00		0,41			0,21
	20				0,04		0,75	0,03	
7		0,24	—0,95	119,99		0,45			0,24
	20				0,09		0,50	0,04	
8		0,29	—1,11	139,99		0,54			0,28
	20				0,06		0,65	0,04	
9		0,31	—1,30	159,99		0,60			0,32
	20				0,08		0,57	0,05	
10		0,33	—1,42	179,99		0,68			0,37
	20				0,01		0,92	0,01	
11		0,37	—1,57	199,99		0,69			0,38
	20				0,01		0,92	0,01	
12		0,44	—1,80	219,99		0,70			0,39
	20				0,06		0,65	0,04	
13		0,55	—2,08	239,99		0,76			0,43
	20				0,04		0,75	0,03	
14		0,62	—2,36	259,98		0,80			0,46
	15				0,01		0,90	0,01	
15		0,65	—2,53	274,98		0,81			0,47
	5				0,04		0,00	0,00	
16		0,67	—2,57	279,98		0,85			0,47
	20				0,01		0,92	0,01	
17		0,75	—2,73	299,98		0,86			0,48
	20				0,01		0,92	0,01	
18		0,82	—2,94	319,98		0,87			0,49
	20				0,06		0,65	0,04	
19		0,90	—3,24	339,98		0,93			0,53
	20				0,08		0,57	0,05	
20		0,91	—3,56	359,97		1,01			0,58
	20				0,15		0,17	0,03	
21		0,93	—3,79	379,97		1,16			0,61
	20				0,13		0,20	0,03	
22		1,01	—4,01	399,97		1,29			0,64
	20				0,06		0,65	0,04	
23		1,11	—4,27	419,97		1,35			0,68
	20				0,04		0,75	0,03	
24		1,21	—4,58	439,97		1,39			0,71
	20				0,08		0,57	0,05	
25		1,28	—4,85	459,96		1,47			0,76
	20				0,01		0,92	0,01	
26		1,32	—5,08	479,96		1,48			0,77
	20				0,04		0,75	0,03	
27		1,39	—5,37	499,96		1,52			0,38
	20				0,04		0,75	0,03	
28		1,35	—5,71	519,96		1,56			0,83
	20				0,08		0,57	0,05	
29		1,31	—6,00	539,96		1,64			0,88
	15				0,04		0,67	0,03	
30		1,34	—6,13	554,95		1,68			0,91
	5				0,04		0,00	0,00	

Продолжение табл. 2

k	Δs_{k-1}	x_k	y_k	z_k	Δ_k'	$\sum_{i=1}^{k} \Delta_i'$	h_k	$h_k \Delta_k'$	$\sum_{i=1}^{k} h_k \Delta_i'$
—	*м*	*м*	*м*	*м*	*м*	*м*	—	*м*	*м*
31		1,34	—6,16	559,95		1,72			0,91
	20				0,06		0,65	0,04	
32		1,33	—6,25	579,95		1,78			0,95
	20				0,01		0,92	0,01	
33		1,30	—6,33	599,95		1,79			0,96
	20				0,04		0,75	0,03	
34		1,29	—6,41	619,95		1,83			0,99
	20				0,06		0,65	0,04	
35		1,27	—6,51	639,95		1,89			1,03
	20				0,04		0,75	0,03	
36		1,25	—6,62	659,95		1,93			1,06
	20				0,01		0,92	0,01	
37		1,24	—6,72	679,95		1,94			1,07
	20				0,04		0,75	0,03	
38		1,23	—6,80	699,95		1,93			1,10
	20				0,06		0,65	0,04	
39		1,21	—6,92	719,95		2,04			1,14
	20				0,01		0,92	0,04	
40		1,16	—6,99	739,95		2,05			1,15
	20				0,06		0,65	0,04	
41		1,08	—7,04	759,95		2,11			1,19
	20				0,04		0,75	0,03	
42		0,94	—7,06	779,95		2,15			1,22
	20				0,08		0,57	0,05	
43		0,77	—6,98	799,95		2,23			1,27
	20				0,09		0,50	0,04	
44		0,60	—6,83	819,95		2,32			1,31
	20				0,01		0,92	0,01	
45		0,51	—6,71	839,95		2,33			1,32
	20				0,12		0,38	0,05	
46		0,47	—6,61	859,95		2,45			1,37
	20				0,06		0,63	0,04	
47		0,32	—6,51	879,95		2,51			1,41
	20				0,07		0,62	0,04	
48		0,03	—6,50	899,94		2,58			1,45

По этим значениям последовательным суммированием находятся $\sum_{i=1}^{k} \Delta_i'$, дающие, согласно (106), верхний предел уклонения $\delta_k^{(j)}$. Для M_{48} уклонение $\delta_{48}^{(j)}$ не превышает $2{,}58 \approx 2{,}6$ *м*.

По табл. 1 среднее значение угла $\omega_{ср} = 19'$ и согласно (107)

$$\delta_{48}^{(j)} < 1000 \sin 9{,}5' \approx 2{,}8 \text{ м}.$$

Значения границ уклонения не учитывают ограничения, накладываемого на радиус кривизны, величиной допустимого напряжения при изгибе. Для иллюстрации влияния упомянутого ограничения на предел возможного уклонения допустим, что искривление буровой скважины не должно превышать 1° на 20 *м*. Возможная граница Δ_k' уклонения при переходе от точки M_{k-1} к M_k должна быть, согласно (51), уменьшена за счет введения множителя

$$h_k = 1 - \frac{20\omega_k}{\Delta s_{k-1} 60}.$$

По значениям множителя h_k табл. 2 составлены уменьшенные значения $h_k\Delta_k'$ и определены уменьшенные значения предела возможного уклонения $\sum_{i=1}^{k} h_k\Delta_i'$. Для точки M_k граница возможного уклонения оказывается равной 1,45 *м*, т. е. значительно меньше величины, полученной без учета допустимого искривления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Т. I. Гостехиздат, 1957.

2. Ушаков И. Н. Горная геометрия, Углетехиздат, 1957.