Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLIII, вып. 2, 1962 г.

К МЕТОДИКЕ УЧЕТА СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАИБОЛЕЕ ДОСТОВЕРНЫХ СОДЕРЖАНИЙ КОМПОНЕНТОВ В РУДАХ

Г. С. Поротов

Контрольные химические анализы совершенно обязательны при разведочных работах. При существенных расхождениях между результатами основных и контрольных анализов основные должны быть исправлены или вновь проанализированы. Очень велика роль контрольных анализов в тех случаях, когда содержание приближается к пределу чувствительности анализа (для редких элементов и элементов-примесей). Расхождения между основными и контрольными анализами возникают за счет случайных и систематических погрешностей. При подсчете средних содержаний по большому числу проб влияние случайных погрешностей невелико, так как они имеют разные знаки и взаимоуничтожаются. Гораздо сильнее влияние систематических погрешностей, выявляемых внешним контролем.

Существуют различные способы учета систематических погрешностей. Простым, распространенным и самым недостоверным является способ поправочных коэффициентов Н. В. Барышева [1, 6], по которому все основные анализы умножаются на поправочный коэффициент:

$$f = \frac{M_x}{M_y},$$

где M_x и M_y — среднее содержание по контрольным и основным пробам.

Недостатки этого способа выявлены Б. Я. Юфой [9]. Кроме того, введение поправочного коэффициента целесообразно только при достаточно надежных контрольных анализах. Иначе, устранив одну ошибку, можно ввести другую, так как в действительности основные и контрольные анализы выполняются с какой-то погрешностью.

Б. Я. Юфа предложил учитывать систематические ошибки по уравнению регрессии [9]

$$x = ay + b,$$

где x и y — содержание в контрольной и основной пробах;
a и b — постоянные коэффициенты.

Для этого он рекомендует все пробы предварительно разбить по содержанию на классы и определить поправочный коэффициент для

каждого класса. Однако и этот способ применим только при высокой достоверности контрольных анализов.

При дальнейшем развитии способа учета систематических погрешностей по уравнению регрессии [10] были допущены извращения корреляционного метода [5, 8], рассмотренные в работах А. П. Грудева [2] и Бинтиг [11].

Рассмотрим развернутое уравнение регрессии

$$x = M_x + r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - M_y), \qquad (1)$$

где r_{xy} — коэффициент корреляции между основными и контрольными анализами;

σ_x и σ_y — среднеквадратичные отклонения контрольных и основных анализов.

В силу двойственного характера корреляционной связи кроме уравнения (1) имеется и не тождественное ему уравнение

$$y = M_y + r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - M_x). \qquad (2)$$

Уравнение (1) позволяет по известному содержанию в основной пробе y найти вероятное содержание в контрольной пробе x, а уравнение (2), наоборот, — по известному содержанию в контрольной пробе найти вероятное содержание в основной пробе. Но оба уравнения ничего не говорят о наиболее вероятном действительном содержании в пробе.

Г. В. Крылов выдвинул следующее положение: поскольку основные и контрольные анализы выполняются с какой-то погрешностью, то наиболее вероятное содержание в пробе равно полусумме содержаний основного и контрольного определений [4]. Но Г. В. Крылов не довел свой тезис до логического конца и ограничился графическим построением погрешностей для отдельных проб. То же положение выдвинул и практически использовал Б. Я. Юфа для характеристики результатов внутреннего контроля [10].

Попытаемся синтезировать положительные стороны методов Б. Я. Юфы и Г. В. Крылова и предложить методику расчета систематической погрешности.

Рассмотрим пробу, в которой произведены основной и контрольный анализы. Наиболее вероятное содержание в пробе при одинаковой достоверности анализов

$$z = \frac{x + y}{2}. \qquad (3)$$

Если достоверность анализов различна, то по теории вероятностей [7, стр. 210] наиболее вероятное содержание

$$z = \frac{\omega_x x + \omega_y y}{\omega_x + \omega_y}, \qquad (4)$$

где ω_x и ω_y — веса наблюдений в контрольных и основных пробах (более точное наблюдение имеет больший вес).

Если имеется совокупность проб, то для каждой из них по формулам (3) или (4) можно рассчитать наиболее вероятное содержание. Зная наиболее вероятные содержания и содержания по данным основ-

ных анализов, между ними можно установить корреляционную зависимость:

$$z = M_z + r_{yz}\frac{\sigma_z}{\sigma_y}(y - M_y), \tag{5}$$

где M_z — среднее наиболее вероятное содержание;
σ_z — среднеквадратичное отклонение этих содержаний;
r_{yz} — коэффициент корреляции между основными и наиболее вероятными содержаниями.

Уравнение (5) позволяет найти наиболее вероятное содержание z в пробе по основному анализу y. Расчет величин M_z, σ_z, r_{yz} можно производить обычным методом [6, стр. 490].

Рассмотрим ω_x и ω_y в уравнении (4). В большинстве случаев разведчик не имеет данных о точности работы основной и контрольной лабораторий. Но если имеются результаты внутреннего контроля обеих лабораторий, то их можно использовать для частичного учета весов. По теории статистики [7] известно, что веса наблюдений обратно пропорциональны дисперсии наблюдений:

$$\omega = \frac{1}{\sigma^2}.$$

Обозначим в отличие от внешнего контроля x' — основные и x'' — контрольные анализы внутреннего контроля одной лаборатории и соответственно y' и y'' — другой лаборатории. Тогда роль дисперсии наблюдений будут играть величины

$$\sigma^2_{x'} = \frac{\sum (x' - x'')^2}{4n}, \tag{6}$$

$$\sigma^2_{y'} = \frac{\sum (y' - y'')^2}{4n} \tag{7}$$

(n — число проб), которые характеризуют достоверность работы лабораторий и выведены в предположении, что основные и контрольные анализы при внутреннем контроле равноточны. Таким образом,

$$\omega_x = \frac{1}{\sigma^2_{x'}} \text{ и } \omega_y = \frac{1}{\sigma^2_{y'}},$$

и уравнение (4) после преобразования примет вид:

$$z = \frac{x + my}{1 + m}, \tag{8}$$

где

$$m = \frac{\sigma^2_{x'}}{\sigma^2_{y'}}. \tag{9}$$

Кроме уравнений (6), (7) для характеристики дисперсии можно пользоваться выражением

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum (x' - x'')^2}{2n}, \tag{10}$$

которое выведено Н. В. Ивановым [3] и названо им впоследствии действительной ошибкой. Формулы (6) и (10) отличает только постоянный коэффициент, который на величине m не отражается.

Наметим порядок вычисления и учета систематической ошибки.

Вначале по формулам (6) и (7) обработаем данные внутреннего контроля обеих лабораторий и найдем m по формуле (9). Если данных внутреннего контроля нет, то m принимается равной единице, что соответствует случаю одинаковой достоверности основной и контролирующей лабораторий, после чего уравнение (8) принимает вид уравнения (3). Далее для каждой пары значений внешнего контроля x и y найдем наиболее вероятное содержание z по формулам (8) или (3) и определим M_y, M_z, σ_y, σ_z, r_{yz} общеизвестным способом [6]. После этого все величины подставим в уравнение (5), которое отражает зависимость между основными и наиболее вероятными исправленными содержаниями. При подсчете запасов все средние содержания, полученные по основным анализам, пересчитываем согласно уравнению (5).

Пример. Произведен внешний и внутренний контроль основной и контролирующей лабораторий анализов цинка, присутствующего в качестве элемента-примеси в магнетитовых рудах. Обработкой результатов внутреннего контроля по формулам (6) и (7) установлено, что

$$\sigma^2_{x'} = 0{,}0000816 \text{ и } \sigma^2_{y'} = 0{,}000126,$$

где индекс x относится к контролирующей, а y — к основной лабораториям.

Так как $\sigma^2_{x'} < \sigma^2_{y'}$, контролирующая лаборатория работает точнее. По формуле (9)

$$m = \frac{0{,}0000816}{0{,}000126} = 0{,}648.$$

При обработке внешнего контроля величину z определим по формуле (8) для каждой пары значений x и y:

$$z = \frac{x + 0{,}648y}{1{,}648}.$$

Дальнейший расчет приведен в таблице.

Итак, уравнение зависимости между основными и наиболее вероятными содержаниями

$$z = 0{,}132 + 0{,}9986\,\frac{0{,}1732}{0{,}1557}(y - 0{,}111),$$

или

$$z = 1{,}111y + 0{,}009.$$

Сравним средние содержания цинка в процентах в одном из блоков, где систематическая ошибка учитывалась различными методами:

По данным основных анализов	0,121
С применением поправочного коэффициента (по Н. В. Барышеву)	0,158
По классическому уравнению регрессии	0,157
Наиболее вероятное содержание по формуле (5) . . .	0,143

Расхождения между содержаниями цинка при различных методах учета систематической ошибки достигают 0,015% абсолютной или 10,5% относительной величины.

Расчет исходных данных для уравнения (5)

n	Анализ		z	$y - M_y$	$(y-M_y)^2$	$z - M_z$	$(z - M_z)^2$	$(y-M_y)(z-M_z)$
	x	y						
1	0,03	0,01	0,022	—0,101	0,0102	—0,110	0,0121	0,0111
2	0,03	0,02	0,026	—0,091	0,0083	—0,106	0,0112	0,0096
3	0,03	0,02	0,026	—0,091	0,0083	—0,106	0,0112	0,0096
4	0,04	0,02	0,032	—0,091	0,0083	—0,100	0,0100	0,0091
5	0,04	0,02	0,032	—0,091	0,0083	—0,100	0,0100	0,0091
6	0,04	0,02	0,032	—0,091	0,0083	—0,100	0,0100	0,0091
7	0,05	0,02	0,038	—0,091	0,0083	—0,094	0,0088	0,0086
8	0,05	0,03	0,042	—0,081	0,0066	—0,090	0,0081	0,0073
9	0,06	0,03	0,048	—0,081	0,0066	—0,084	0,0071	0,0068
10	0,06	0,04	0,052	—0,071	0,0050	—0,080	0,0064	0,0057
11	0,07	0,07	0,070	—0,041	0,0017	—0,062	0,0038	0,0025
12	0,08	0,05	0,068	—0,061	0,0037	—0,064	0,0041	0,0039
13	0,08	0,07	0,076	—0,041	0,0017	—0,056	0,0031	0,0023
14	0,09	0,05	0,074	—0,061	0,0037	—0,058	0,0034	0,0035
15	0,11	0,10	0,106	—0,011	0,0001	—0,026	0,0007	0,0003
16	0,13	0,09	0,114	—0,021	0,0004	—0,018	0,0003	0,0004
17	0,14	0,12	0,132	+0,009	0,0001	0	0	0
18	0,22	0,15	0,192	+0,039	0,0015	+0,060	0,0036	0,0023
19	0,44	0,35	0,405	+0,239	0,0571	+0,273	0,0745	0,0652
20	0,51	0,43	0,478	+0,319	0,1018	+0,346	0,1197	0,1104
21	0,75	0,62	0,699	+0,509	0,2591	+0,567	0,3215	0,2886
Сумма	3,05	2,33	2,764	—0,001	0,5091	—0,008	0,6296	0,5654

$n = 21;$

$$M_x = \frac{3,05}{21} = 0,145; \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{0,5091}{21}} = 0,1557;$$

$$M_y = \frac{2,33}{21} = 0,111; \qquad \sigma_z = \sqrt{\frac{0,6296}{21}} = 0,1732;$$

$$M_z = \frac{2,764}{21} = 0,132, \qquad r_{yz} = \frac{0,5654}{\sqrt{0,5091 \cdot 0,6296}} = 0,9986$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Барышев Н. В. Контроль опробования. Госгеолиздат, 1948.
2. Грудев А. П. Об истинном уравнении регрессии при подсчете запасов элементов-примесей. «Разведка и охрана недр», 1960, № 6.
3. Иванов Н. В. Некоторые данные, уточняющие коэффициент вариации. Зап. ЛГИ, т. XXV, вып. 2, 1961.
4. Крылов Г. В. О двух формах случайных ошибок анализа разведочных проб. Тр. Каз. ин-та минерал. сырья, 1959, вып. 1.
5. Раевский В. И., Шурубор Ю. В. Обработка данных внешнего контроля химических анализов геологических проб. Изв. высш. учеб. завед. «Геология и разведка», 1958, № 11.
6. Смирнов В. И. Геологические основы поисков и разведок рудных месторождений. Изд-во МГУ, 1957.
7. Уиттекер Э., Робинсон Г. Математическая обработка результатов наблюдений. ГТТИ, 1933.
8. Шарапов И. П. К теории подсчета запасов элементов-примесей. «Разведка и охрана недр», 1957, № 1.
9. Юфа Б. Я. Учет систематических ошибок при подсчете запасов. «Разведка и охрана недр», 1951, № 6.
10. Юфа Б. Я. Методика оценки случайных погрешностей при подсчете запасов минерального сырья. Разведка и охрана недр, 1960, № 12.
11. Bintig K. H. Z. angew, Geol., 1959, N 12.