Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLIII, вып. 3, 1964 г.

УДК 528.241

О ЧИСЛЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ МЕСТНОЙ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

А. А. Кржижановская

За последние 20 лет в геодезическую науку введены новые методы, позволяющие решать все основные задачи геодезии по величинам, характеризующим внешнее гравитационное поле и фигуру физической поверхности Земли [1].

В неправильной и сложной физической поверхности Земли выделяется гладкая поверхность, близкая к геоиду Листинга, названная квазигеоидом.

Высоты поверхности квазигеоида ζ над выбранной поверхностью относимости получаются как частное от деления возмущающего потенциала T в данной точке поверхности Земли S * на нормальное значение силы тяжести γ, рассчитанное для этой точки:

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}.$$

Для нахождения функции T решается третья смешанная задача теории потенциала, когда граничные условия заданы на поверхности Земли S:

$$-(g-\gamma) = \left(\frac{\partial T}{\partial \nu} - \frac{T}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial \nu}\right)_h,$$

где g — наблюдаемое значение силы тяжести на высоте h;

ν — направление касательной к поверхности Земли S.

Уклонения отвесных линий ξ, η получаются дифференцированием возмущающего потенциала по направлениям меридиана и первого вертикала для данной точки.

Необходимо получить систему значений высот квазигеоида над поверхностью эллипсоида Жонголовича 1952 г. [2] для ряда пунктов, равномерно распределенных на поверхности исследуемого района.

Исходными данными являются величины гравиметрических ** укло-

---

* Физическая поверхность Земли S характеризуется с помощью поверхности, полученной путем откладывания нормальных высот h от квазигеоида.

** Гравиметрические уклонения отвесных линий отличаются от астрономо-геодезических на величину угла между нормалями к поверхности относимости и поверхности референц-эллипсоида.

нений отвесных линий $\xi_{гр}$, $\eta_{гр}$ в меридиане и первом вертикале для этих пунктов. Для решения задачи использованы основные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \xi_{гр} &= \frac{\partial N}{\partial x}\,; \\ \eta_{гр} &= \frac{\partial N}{\partial y}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $\xi_{гр}$, $\eta_{гр}$ — гравиметрические уклонения отвесной линии в направлении меридиана и первого вертикала;

N — высота квазигеоида над эллипсоидом Жонголовича 1952 г.;

dx — элемент меридиана;

dy — элемент первого вертикала.

Поместим начало прямоугольной системы координат в нульпункте *0*, ось OX направим по меридиану на север, а ось OY — по параллели на восток. Область исследования σ разобьем на части системой равноотстоящих параллелей и меридианов.

Рассмотрим участок * $M_{k,i}$, $M_{k,i+1}$, $M_{k+1,i}$, $M_{k+1,i+1}$ (рис. 1).

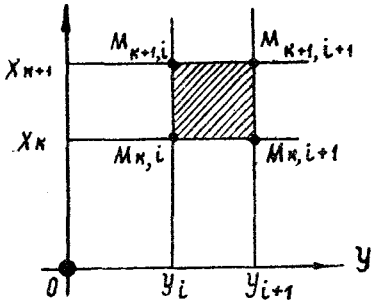


Рис. 1. Элементарный участок на поверхности эллипсоида

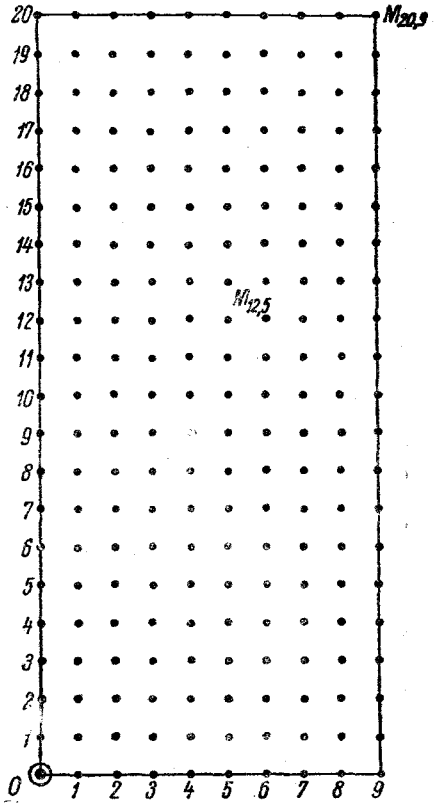


Рис. 2. Расположение точек $M_{k,i}$ в исследуемой области (k = 1, 2, 3, . . ., 20; i = 1, 2, 3, . . ., 9)

Из соотношений (1) превышение точки $M_{k+1,i+1}$ над точкой $M_{k,i}$ может быть выражено с помощью криволинейного интеграла

$$N_{k+1,i+1} - N_{k,i} = \int\limits_{(M_{k,i}\ M_{k+1,i+1})} \xi dx + \eta dy, \qquad (2)$$

где $N_{k+1,i+1} - N_{k,i} = \Delta N$ — превышение;

ξ и η — функции, заданные численно в отдельных точках области σ.

Из тех же соотношений (1) следует

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}\,. \qquad (3)$$

* По малости размеров участок принимаем за плоский, прямоугольный, пренебрегаем сближением меридианов.

Равенства (3) являются условием независимости криволинейного интеграла (2) от пути интегрирования. Выберем два из возможных путей перехода от точки $M_{k,i}$ к точке $M_{k+1,i+1}$:

1) вдоль ломаной $M_{k,i}M_{k,i+1}M_{k+1,i+1}$; 2) вдоль ломаной $M_{k,i}M_{k+1,i}M_{k+1,i+1}$.

Теперь превышение ΔN может быть получено независимо по формулам:

$$\Delta N = \int\limits_{(M_{k,i}M_{k,i+1})} \xi dx + \eta dy + \int\limits_{(M_{k,i+1}M_{k+1,i+1})} \xi dx + \eta dy;$$

$$\Delta N = \int\limits_{(M_{k,i}M_{k+1,i})} \xi dx + \eta dy + \int\limits_{(M_{k+1,i}M_{k+1,i+1})} \xi dx + \eta dy. \qquad (4)$$

Переходя в (4) от криволинейных интегралов к определенным интегралам, получим:

$$\Delta N = \int\limits_{y_i}^{y_{i+1}} \eta(x_k, y)\, dy + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \xi(x, y_{i+1})\, dx;$$

$$\Delta N = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \xi(x, y_i)\, dx + \int\limits_{y_i}^{y_{i+1}} \eta(x_{k+1}, y)\, dy. \qquad (5)$$

Высота точки $M_{k+1,i+1}$ области σ над принятым нульпунктом 0 может быть получена суммированием превышений ΔN в соответствии с принятыми путями интегрирования. Подынтегральные функции ξ и η не имеют аналитического выражения, а заданы численно в точках $M_{k,i}$ области σ. Поэтому для вычисления интегралов (5) необходимы численные методы. Воспользуемся, например, известной формулой Ньютона-Котеса [3]

$$\int\limits_{z_0}^{z_0+\Delta z} f(z)\, dz = \frac{\Delta z}{2}[f(z_0) + f(z_0 + \Delta z)] + R(z), \qquad (6)$$

где

$$|R(z)| = \left|\frac{1}{12}\Delta z^3 f''(z_0 + \Delta z)\right|.$$

Вычисление интегралов (5) по формуле (6) с последующим суммированием превышений ΔN позволит получить превышения точек $M_{k,i}$ области σ над нульпунктом *0*.

Перейдем к выбору области исследования и оценке точности результатов вычислений.

Изучение материалов картографического и гравиметрического характера, а также ранее полученные результаты [4] позволяют выделить область исследования (рис. 2) между 53°15′—54°15′ по широте и 59—60° по долготе.

Область σ расположена в геологически обособленной части горного района, обеспечена необходимыми материалами гравиметрического и картографического характера, позволяющими получить исходные числовые данные для расчета. Система числовых значений функций ξ и η снята с карт гравиметрических уклонений отвесной линии в меридиане и первом вертикале [4].

В табл. 1 и 2 и на рис. 2 указаны числовые данные с интервалом по широте 3′ и долготе 6′.

Таблица 1

Уклонение отвесной линии в направлении меридиана ξ, *сек*

Номер линии	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	—1,6	—1,7	—1,7	—1,6	—1,5	—1,4	—1,2	—1,2	—1,3
19	—1,1	—1,1	—1,1	—1,0	—0,8	—0,6	—0,6	—0,7	—0,8
18	—0,5	—0,6	—0,6	—0,5	—0,3	—0,2	0	—0,3	—0,5
17	0	—0,1	—0,1	+0,2	+0,4	+0,5	+0,5	+0,3	0
16	+0,6	+0,5	+0,6	+0,7	+0,9	+1,1	+1,2	+1,0	+0,5
15	+1,1	+1,4	+1,5	+1,6	+2,0	+2,2	+2,0	+1,6	+1,5
14	+2,2	+2,3	+2,5	+2,6	+2,7	+2,8	+2,6	+2,2	+1,8
13	+2,5	+2,6	+2,8	+2,8	+2,7	+2,6	+2,4	+1,7	+1,3
12	+1,7	+2,0	+2,3	+2,2	+2,0	+1,8	+1,5	+1,0	+0,8
11	+1,0	+1,3	+1,4	+1,4	+1,2	+1,0	+0,7	+0,5	+0,2
10	+0,4	+0,5	+0,5	+0,5	+0,4	+0,2	—0,1	—0,4	—0,7
9	—0,2	0	0	—0,2	—0,4	—0,5	—0,8	—1,2	—1,5
8	—0,6	—0,5	—0,5	—0,7	—1,0	—1,2	—1,5	—1,7	—1,8
7	—1,0	—1,0	—1,1	—1,3	—1,5	—1,7	—1,8	—2,0	—2,3
6	—1,5	—1,5	—1,6	—1,7	—1,8	—2,0	—2,2	—2,4	—2,5
5	—1,8	—2,0	—2,0	—2,2	—2,3	—2,4	—2,5	—2,7	—2,7
4	—1,4	—2,0	—2,3	—2,3	—2,5	—2,7	—2,8	—3,0	—3,1
3	—1,5	—2,1	—2,4	—2,6	—2,8	—3,0	—3,2	—3,3	—3,4
2	—2,3	—2,5	—2,7	—2,8	—3,0	—3,2	—3,5	—3,6	—3,6
1	—2,8	—2,8	—2,8	—3,2	—3,5	—3,6	—3,6	—3,6	—3,6

Таблица 2

Уклонение отвесной линии в направлении первого вертикала η, *сек*

Номер линии	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	+1,5	+2,4	+ 3,0	+3,2	+3,2	+3,0	+3,0	+3,0	+3,0
19	+1,0	+2,0	+ 3,0	+3,0	+3,0	+3,1	+3,2	+3,2	+3,3
18	+0,6	+1,6	+ 2,4	+3,0	+3,3	+3,4	+3,6	+3,6	+3,7
17	+0,2	+1,2	+ 2,0	+3,2	+3,7	+4,0	+4,2	+4,2	+4,3
16	—0,2	+0,8	+ 1,6	+2,8	+4,0	+4,4	+4,4	+4,6	+4,6
15	—0,5	+0,3	+ 1,5	+2,4	+4,0	+4,5	+5,0	+5,2	+5,3
14	—0,7	0	+ 1,0	+2,0	+3,3	+4,4	+5,2	+5,9	+6,4
13	—0,8	—0,1	+ 0,8	+1,9	+3,2	+4,3	+5,2	+6,4	+7,2
12	—0,9	—0,1	+ 0,6	+1,8	+3,1	+4,3	+5,5	+7,0	+8,0
11	—0,9	0	+ 0,8	+2,3	+3,2	+4,5	+5,7	+7,2	+8,2
10	—0,5	+0,3	+ 1,3	+2,4	+3,4	+4,7	+6,1	+7,6	+8,2
9	—0,3	+0,6	+ 1,6	+2,6	+3,6	+5,0	+6,4	+8,0	+8,0
8	—0,1	+0,8	+ 1,9	+2,8	+3,9	+5,3	+6,6	+8,0	+8,0
7	0	+1,9	+ 2,1	+3,2	+4,1	+5,6	+7,0	+8,1	+8,1
6	+0,3	+1,3	+ 2,3	+3,3	+4,4	+5,7	+7,1	+8,1	+8,1
5	+0,3	+1,4	+ 2,4	+3,4	+4,5	+5,8	+7,2	+8,1	+8,1
4	+0,5	+1,6	+ 2,4	+3,5	+4,6	+5,8	+7,2	+8,1	+8,0
3	+0,6	+1,6	+ 2,5	+3,6	+4,6	+5,6	+6,9	+8,0	+7,5
2	+1,0	+1,9	+ 2,6	+3,6	+4,4	+5,6	+6,5	+7,0	+6,5
1	+1,6	+2,0	+ 2,6	+3,5	+4,3	+5,2	+5,8	+6,0	+5,7

С учетом соотношений (5) и (6) составим рабочие формулы для вычисления превышения некоторой точки $M_{k,i}$ области σ над нульпунктом Q, в соответствии с двумя принятыми путями интегрирования:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta N_{\xi\eta} &= \frac{2{,}69}{2}\sum_{k=0}^{m}\left[\xi(x_k,\ y_0)+\xi(x_{k+1},\ y_0)\right]+\\
&+\frac{3{,}18}{2}\sum_{i=0}^{n}\left[\eta(x_m,\ y_i)+\eta(x_m,\ y_{i+1})\right]+\sum_{(m)}R_\xi+\sum_{(n)}R_\eta;\\
\Delta N_{\eta\xi} &= \frac{3{,}18}{2}\sum_{i=0}^{n}\left[\eta(x_0,\ y_i)+\eta(x_0,\ y_{i+1})\right]+\\
&+\frac{2{,}69}{2}\sum_{k=0}^{m}\left[\xi(x_k,\ y_n)+\xi(x_{k+1}y_n)\right]+\sum_{(m)}R_\xi+\sum_{(n)}R_\eta;\\
&k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m \text{ и } i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

По формуле (7) в табл. 3, 4 рассчитаны относительные высоты квазигеоида для отдельных пунктов области σ (с тем же интервалом, что и в табл. 1, 2).

Точность расчетов можно определить сравнением двух схем вычислений (табл. 3, 4). Совпадение числовых значений лежит в границах ± 21 *см* *.

Таблица 3

Относительная высота квазигеоида по первой схеме вычисления $\Delta N_{\xi\eta}$, *см*

20	306	308	301	291	289	278	254	251	235
19	302	304	297	287	286	275	252	249	232
18	300	301	295	285	284	274	251	248	230
17	300	301	294	285	284	274	252	248	229
16	300	301	295	286	286	276	254	250	230
15	304	303	298	289	290	280	260	254	233
14	309	308	303	296	296	287	266	259	237
13	315	315	310	303	303	294	273	264	241
12	322	321	317	310	309	300	278	268	244
11	326	325	322	315	313	304	281	270	245
10	328	327	324	317	315	306	282	270	244
9	328	327	324	317	315	306	281	268	241
8	327	327	324	316	306	304	278	264	237
7	325	325	322	313	303	300	274	259	231
6	322	322	318	309	299	285	269	253	225
5	318	317	313	304	293	279	263	246	218
4	314	312	307	298	287	272	256	238	210
3	310	306	301	291	280	264	248	230	201
2	303	300	294	284	272	256	239	221	192
1	300*	297	290	280	268	252	235	216	187
Номер линии	1	2	3	4	5	6	7	8	9

* Нульпункт с условной высотой 300 *см*.

Есть другой путь определения точности результатов. Принимая погрешность расчета по формулам (7)

$$\varepsilon = \left|\sum_{(m)}R_\xi+\sum_{(n)}R_\eta\right| < \left|\sum_{(m)}R_\xi\right|+\left|\sum_{(n)}R_\eta\right|,$$

* Для точки $M_{6,9}$, например ,(см. рис. 2 и табл. 3 и 4).

оценим $|R_\xi|$ и $|R_\eta|$. В соответствии с (5), по формуле (6)

$$|R_\xi| = \left|\frac{1}{12}\Delta\varphi^3\xi''(\varphi)\right| \text{ и } |R_\eta| = \left|\frac{1}{12}\Delta\lambda^3\eta''(\lambda)\right|;$$

$$\Delta\varphi^2\xi'' = \Delta^2\xi - \Delta^3\xi + \ldots; \quad \Delta\lambda^2\eta'' = \Delta^2\eta - \Delta^3\eta + \ldots,$$

где $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$ — табличные интервалы по широте и долготе;
ξ'' и η'' — производные второго порядка;
$\Delta^2\xi$, $\Delta^3\xi$ и $\Delta^2\eta$, $\Delta^3\eta$ — разности второго и третьего порядков.

Таблица 4

Относительная высота квазигеоида по второй схеме вычисления $\Delta N_{\eta\xi}$, *см*

20	306	302	294	284	274	264	254	244	234
19	302	291	291	281	271	261	251	241	231
18	300	298	292	284	274	263	252	241	229
17	300	298	293	285	274	262	249	236	222
16	300	299	296	290	280	267	253	239	224
15	304	304	303	297	287	273	258	242	225
14	309	309	308	303	295	283	268	250	230
13	315	315	314	311	303	291	276	258	236
12	322	322	321	317	309	297	281	261	237
11	326	326	325	320	311	299	283	263	241
10	328	328	325	319	310	297	280	258	233
9	328	327	323	316	306	292	274	251	226
8	327	326	321	314	303	288	269	243	218
7	325	322	316	308	296	281	261	237	211
6	322	320	314	305	293	277	256	231	204
5	318	316	310	301	289	273	252	228	202
4	314	312	306	300	287	271	250	226	200
3	310	308	302	292	279	263	243	219	194
2	303	300	293	283	270	254	235	214	193
1	300*	297	290	280	268	252	235	216	187
Номер линии	1	2	3	4	5	6	7	8	9

* Нульпункт с условной высотой 300 *см*.

По данным табл. 1 и 2 произведены расчеты по меридианам и параллелям. Один из таких расчетов, соответствующий максимальным значениям разности $\Delta^2\xi$ и $\Delta^3\xi$, представлен в табл. 5. Получены следующие оценки:

$$|R_\xi| < 0{,}3 \text{ см}; \quad |R_\eta| < 0{,}4 \text{ см}.$$

В соответствии с характером расположения точек $M_{k,i}$ в районе исследования $m = 19$ и $n = 9$

$$\left|\sum_{(m)}\right| < 5{,}7 \text{ см}; \quad \left|\sum_{(n)}\right| < 3{,}6 \text{ см}.$$

Получаем оценку

$$|\varepsilon_{\Delta N}| < 9{,}3 \text{ см}.$$

Из двух полученных оценок погрешности вывода относительно высот квазигеоида принимаем более широкую

$$|\varepsilon_{\Delta N}| < 21 \text{ см}.$$

Таблица 5

Оценка точности вычислений по формуле (7)

Номер линии	ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	$\Delta^3\xi$*	$\Delta\varphi^3\xi''(\varphi) \approx \Delta^2\xi - \Delta^3\xi$
20	—1,5				
		—0,7			
19	—0,8		—0,2		
		—0,5		—0,4	+0,2
18	—0,3		+0,2		
		—0,7		+0,4	—0,2
17	+0,4		—0,2		
		—0,5		—0,8	+0,6
16	+0,9		+0,6		
		—1,1		+1,0	—0,4
15	+2,0		—0,4		
		—0,7		+0,3	—0,7
14	+2,7		—0,7		
		0		0	—0,7
13	+2,7		—0,7		
		+0,7		—0,6	—0,1
12	+2,0		—0,1		
		+0,8		—0,1	0
11	+1,2		0		
		+0,8		0	0
10	+0,4		0		
		+0,8		—0,2	+0,2
9	—0,4		+0,2		
		+0,6		+0,1	+0,1
8	—1,0		+0,1		
		+0,5		—0,1	+0,2
7	—1,5		+0,2		
		+0,3		+0,4	—0,2
6	—1,8		—0,2		
		+0,5		—0,5	+0,3
5	—2,3		+0,3		
		+0,2		+0,4	—0,1
4	—2,5		—0,1		
		+0,3		—0,2	+0,1
3	—2,8		+0,1		
		+0,2		+0,4	—0,3
2	—3,0		—0,3		
		+0,5			
1	—3,5				

$$\max |\Delta\varphi^2\xi''| = 0{,}7 < 1$$

$$R_\xi = \frac{1}{12}\Delta\varphi^3\xi''(\varphi)$$

$$|R_\xi| < 0{,}3.$$

* ξ — по данным табл. 1.

ВЫВОДЫ

1. Наличие густой сети вычисленных значений уклонений отвесной линии, равномерно покрывающих район исследования, позволило получить относительные высоты квазигеоида с точностью $\pm 0{,}2$ *м*.

2. Карта высот (рис. 3) показывает подъем поверхности квазигеоида в северо-западной части района исследования и понижение его поверхности на восток.

3. Предлагаемый метод расчета можно применять в любом горном или аномалийном районе.

Полученные данные можно использовать при решении задач геодезического, геофизического, картографического характера, если высоту нульпункта перевести в систему, соответствующую требованиям конкретной задачи.

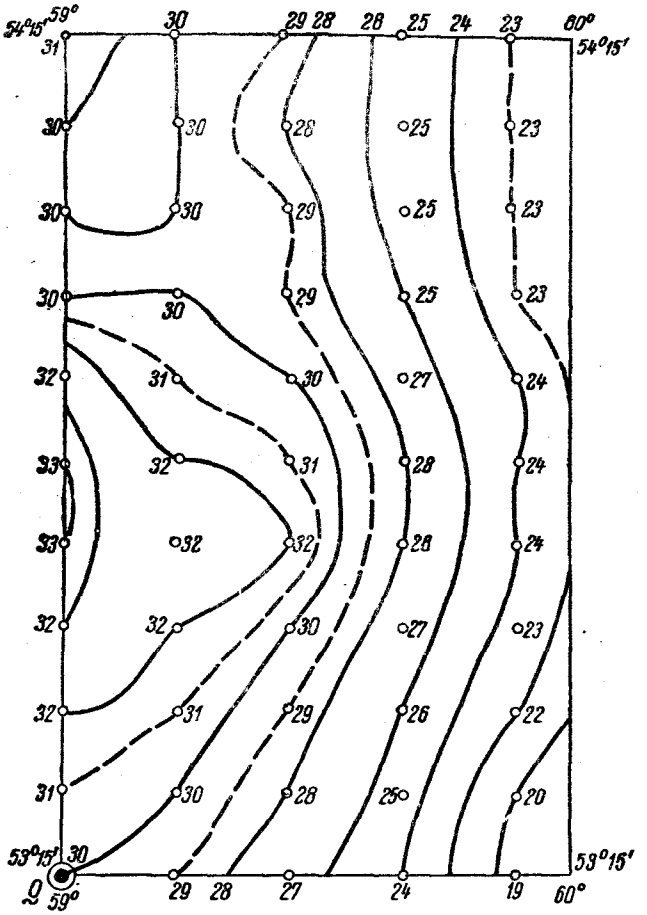


Рис. 3. Карта относительных высот (в дециметрах) квазигеоида над эллипсоидом Жонголовича 1952 г. Сечение через 20 *см*

ЛИТЕРАТУРА

1. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 131, 1960.

2. Жонголович И. Д. Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним. Тр. Ин-та теоретич. астрономии АН СССР, вып. III, 1952.

3. Уиттекер Э. и Робинсон Г. Математическая обработка результатов наблюдений. ОНТИ, 1935.

4. Кржижановская А. А. Об уклонениях отвесной линии в горном районе. Зап. ЛГИ, т. XXXVII, вып. 1, 1958.