Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLIII, вып. 3, 1964 г.

УДК 532.522

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАСПАДА НЕЗАТОПЛЕННЫХ СТРУЙ

В. Я. Бриль

В конце XIX в. исследователи указывали на внутреннюю неустойчивость свободной струи, вызванную приложенными к ее поверхности капиллярными силами [6, 7, 8 и др.]. Так, Плато установил, что начальные осесимметричные возмущения нарастают и приводят в конце концов к распаду струи только при

$$z = \frac{2\pi a}{\lambda} < 1, \tag{1}$$

где a — радиус невозмущенной струи;
λ — длина волны симметричной деформации.

Для волн, удовлетворяющих условию (1), в предположении экспоненциального закона нарастания возмущений вдоль струи

$$\alpha = \alpha_0 e^{qt}. \tag{2}$$

Инкремент q — характеристика быстроты нарастания возмущений — по Рэлею [1]

$$q^2 = \frac{T}{\rho a^3} \frac{zI_1(z)}{I_0(z)} (1 - z^2), \tag{3}$$

где T — коэффициент поверхностного натяжения;
ρ — плотность;
$I_0(z) = J_0(iz)$, $I_1(z) = iJ_0'(iz)$ } J_0 — бесселева функция нулевого порядка.

Выражение (3) достигает максимума при $z = 0{,}696$, что для воды в системе CGS дает

$$q_{\max} = \frac{8{,}3}{(2a)^{\frac{3}{2}}}. \tag{4}$$

Считая, что разрыв струи произойдет в тот момент τ, когда α достигнет значения

$$\alpha(\tau) = a, \tag{5}$$

и зная величину начального возмущения α_0, легко найти время, необходимое для распада струи,

$$\tau = \frac{1}{q} \ln \frac{a}{\alpha_0} \tag{6}$$

и длину ее монолитной части

$$L = \frac{v}{q} \ln \frac{a}{\alpha_0} \qquad (7)$$

(в предположении, что скорость струи $v = \text{const}$).

К. Вебер, развивая идеи Рэлея, получил [9] неплохое совпадение теории с результатами экспериментов А. Хенляйна [10] при низконапорных струях.

Использование современной промышленностью высоконапорных струй заставило распространить исследование процесса распада струи на область высоких давлений. Так, в 1962—1963 гг. в Ленинградском горном институте исследовался процесс распада сравнительно высоконапорных (до 70 *атм*) незатопленных водяных струй с помощью сверхскоростной (10^5 кадров в секунду) киносъемки. Эти исследования позволяют еще раз проверить приложимость результатов Рэлея к высоконапорным струям в воздухе. Например, при $p = 25$ *атм* и диаметре насадка $2a = 0{,}5$ *см* получено $L \approx 1{,}5$ *м*, в то время как из (4) и (7) с учетом $\alpha_0 < 0{,}1$ * *мм* (0,1 *мм* — разрешающая способность измерительного микроскопа МИР-12, с помощью которого исследовалась кинопленка)

$$L_{\min} > \frac{v}{q_{\max}} \approx 10 \text{ м}.$$

Аналогичная картина имеет место и для других давлений. Причиной подобного расхождения является несоответствие условий, в которых происходит развитие реальных высоконапорных струй, со схематизированными условиями Рэлея. Прежде всего это касается не учитываемого Рэлеем воздействия воздуха на струю воды.

Влияние воздуха на процесс развития струи рассматривалось неоднократно [5, 9, 11 и др.], однако закономерности, выведенные эмпирически [5], не объясняют сущности процесса, хотя и полезны для практических расчетов. Закономерности же, полученные на основе теоретических исследований, пока еще не очень хорошо согласуются с экспериментом.

Так, например, К. Вебер указывает, что по данным опыта длина сплошной части струи в связи с влиянием на нее воздуха сокращается значительно больше, чем это могло бы быть по данным теоретических исследований.

Этот более ранний распад высоконапорных струй в воздухе объясняется, по-видимому, тем, что при расчетах не учитывается аэрация струи. Аэрация может быть вызвана в основном двумя причинами: 1) выделением газа, ранее абсорбированного жидкостью в связи с резким уменьшением давления в струе по выходе из насадка — *внутренней аэрацией;* 2) захватом окружающего газа поверхностью самой струи — *внешней аэрацией.*

Экспериментальное решение вопроса о том, насколько существенное влияние на процесс развития струи оказывает внутренняя аэрация, наталкивается на значительные трудности. Привлечение, например, для решения этого вопроса показаний сверхскоростных киносъемок оказывается безрезультатным, так как последние велись в неподвижных эйлеровых координатах. Для уверенности же в том, что данная воздушная каверна появилась в результате именно внутренней аэрации, необходимо проследить за ней, начиная от момента ее зарождения, т. е. вести съемки в лагранжевых координатах, используя метод следящей скоростной киносъемки.

Кроме того, поскольку любые методы, связанные с фотографированием объекта в спектре, для которого данный объект непроницаем,

* Неравенство основано на том, что на начальном участке волны не обнаружены.

позволяют судить лишь о поверхности объекта, экспериментальное исследование внутренней аэрации до момента разрушения поверхности струи — задача весьма сложная.

Более конкретные результаты удалось получить по поводу внешней аэрации.

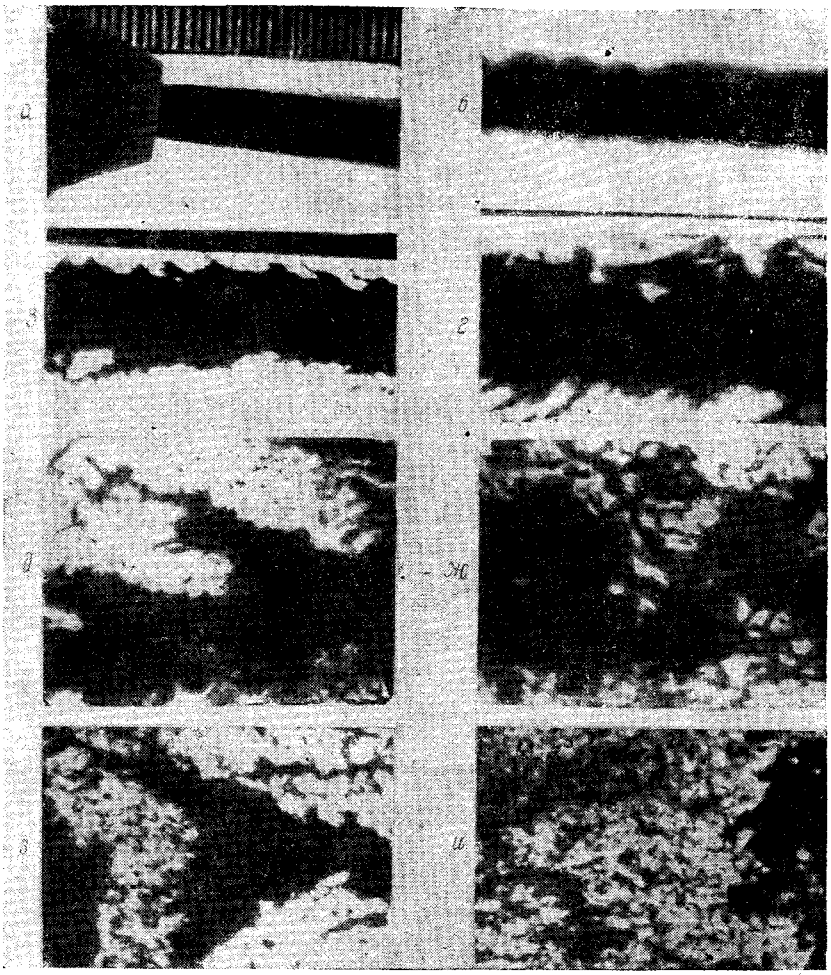


Рис. 1. Качественная картина внешней аэрации струи при диаметре выходного отверстия насадка 0,5 *см*, давлении в подающем насосе 25 *ати* и расстоянии от выходного насадка до начала фотографируемого участка струи:

а — 0 *см*; *б* — 10 *см*; *в* — 20 *см*; *г* — 40 *см*; *д* — 80 *см*; *ж* — 100 *см*; *з* — 120 *см*; *и* — 140 *см*

Расположение кадров соответствует движению струи слева направо

В согласии с ранее полученными результатами [9, 10 и др.] амплитуда волн на поверхности струи в непосредственной близости от насадка весьма мала[1] (рис. 1, *а*). На небольшом расстоянии от насадка форма волн близка к синусоидальной (рис. 1, *б*). По мере удаления от насадка амплитуда нарастает и гораздо быстрее, чем следует из (4): например, для $2a=0{,}5$ *см*

$$q_{\max_{\text{Рэл}}} \approx 23 \ \text{сек}^{-1},$$

[1] Как упоминалось, $\frac{\alpha_0}{a} < 0{,}04$.

в то время как наименьшее из наблюдаемых значений

$$q_{\min_{\text{набл}}} \approx 160 \text{ сек}^{-1}.$$

Кроме того, с ростом амплитуды становится все более заметным вызванное неравномерным сопротивлением воздуха отставание максимумов (гребней) волн от остальной части струи — образование характерных «загибов» (протуберанцев, языков) максимумов в сторону, противоположную движению струи. При этом по мере удаления от насадка размеры языков возрастают (рис. 1, *в*, *г*, *д*), в результате через некоторое время гребень сливается с основанием следующей за ним волны. Это сопровождается захватом поверхностью воздушной полости — каверны, что и является началом внешней аэрации струи (рис. 1, *в*, *г*).

Захваченная каверна сравнительно медленно начинает перемещаться от периферии к оси струи — в область больших скоростей. На наружной же поверхности продолжаются указанные выше процессы, которые заканчиваются захватом новой каверны, и таким образом постепенно тело струи изрыхляется все бо́льшим количеством медленно расширяющихся каверн (рис. 1, *ж*).

Этот процесс приводит в конце концов к разрушению стенок между кавернами (а также между наружной атмосферой и граничными кавернами) и распадению струи на отдельные более или менее крупные колонии неправильной формы, отделенные одна от другой расширяющимися прослойками воздуха (рис. 1, *з*). Это и является одной из существенных причин, ускоряющих распад высоконапорных струй.

Дальнейшее развитие струи не содержит никаких качественных скачков: крупные колонии постепенно разбиваются на все более мелкие (рис. 1, *и*).

Если считать внутреннюю аэрацию незначительной по сравнению с внешней и не учитывать мелких брызг, то на основании изложенного можно утверждать, что высоконапорная струя в своем развитии проходит три стадии: односвязную, многосвязную и несвязную. Односвязной стадии соответствует участок струи длиной $l_{\text{кр}}$ от выходного отверстия насадка до ближайшей к насадку точки M, в которой заканчивается захват поверхностью первой каверны и где, следовательно, струя теряет свою односвязность. Иными словами, в точке M начинается внешняя аэрация струи. Многосвязной стадии соответствует аэрированный участок струи от точки M до точки N, в которой расширяющиеся каверны разрывают связное тело струи на несвязную совокупность колоний. Длина этого участка $L_{\text{кр}}-l_{\text{кр}}$ ($L_{\text{кр}}$ — расстояние от выходного отверстия насадка до точки N). И, наконец, несвязной стадии соответствует участок $l > L_{\text{кр}}$. При осесимметричном распаде, который имеет место в том случае, когда струя обладает достаточно малой скоростью, получим двухстадийную картину развития: от односвязной стадии (минуя многосвязную) к несвязной, т. е.

$$l_{\text{кр}} = L_{\text{кр}} = L.$$

В остальных случаях приходится учитывать трехстадийный характер развития струй. Например, вместо определения одного параметра — длины монолитной части струи L — необходимо определять длину односвязного участка $l_{\text{кр}}$ и длину связного участка $L_{\text{кр}}$.

Рассмотрим функциональную зависимость длины $l_{\text{кр}}$ — односвязной части от некоторых параметров струи. Задачу решим в цилиндрических координатах (x, r, φ).

Струю предполагаем незакрученной ($v_\varphi = 0$) и в невозмущенном состоянии представляющей круглый цилиндр радиусом a (рис. 1 — сечение поверхности струи плоскостью, проходящей через ось цилиндра).

Если v_x — осевая составляющая скорости, то скорость относительного сдвига двух точек с радиальными координатами r_i и r_j в проекции на ось x будет

$$v_x^j - v_x^i = \Delta v_x^{ij}.$$

В частности, выбрав в качестве j-й точки такую, у которой $r_j = a$, а в качестве i-й — гребень волны $r_i = a + \alpha(t)$ (α — амплитуда волны), получим скорость смещения гребня относительно узла

$$v_x(a) - v_x(a + \alpha)$$

и смещение гребня к моменту t

$$S = \int_0^t [v_x(a) - v_x(a + \alpha)]\, dt.$$

Полагая в первом приближении, что к моменту замыкания τ смещение достигает $S = \lambda$, получим

$$\lambda = \int_0^\tau [v_x(a) - v_x(a + \alpha)]\, dt. \tag{8}$$

Равенство (8) позволяет определить время замыкания τ, если известны λ, a, закон нарастания амплитуды $\alpha = \alpha(t)$ и распределение скоростей в сечении $v(r, t)$.

Длина односвязной части струи определяется равенством

$$l_{кр} = \int_0^\tau v_a(t)\, dt \tag{9}$$

($v_a(t) = v(r, t)|_{r=a}$ — скорость на поверхности струи) или в предположении, что $v_a = \text{const}$,

$$l_{кр} = v_a \tau. \tag{10}$$

Как следует из эпюр скоростей, вблизи значения $r = a$ скорость достаточно точно аппроксимируется линейной функцией r, т. е.

$$\Delta v_x^{ij} = K \Delta r_{ij},$$

и, в частности,

$$v_x(a) - v_x(a + \alpha) = K\alpha.$$

При указанном допущении из (8) получим

$$\lambda = \int_0^\tau K\alpha\, dt. \tag{11}$$

Не вдаваясь в вопрос о возможности теоретического отыскания функций $K(t)$ и $\alpha(t)$, для изменения амплитуды α во времени предположим выполненным рэлеевский закон (2).

Функция $K(t)$, как показали экспериментальные условия, является убывающей и, начиная с некоторого малого момента времени t_1, аппроксимируется законом

$$K(t) = \frac{c}{t}. \tag{12}$$

Из (11), (2) и (12)

$$\lambda = \frac{c\alpha_1}{e^{qt_1}} \int_{t_1}^{\tau} \frac{e^{qt}}{t}\, dt + S_1, \qquad (13)$$

где S_1 — смещение гребня относительно середины своего основания к моменту t_1 (рис. 2);

$\alpha = \alpha(t_1)$.

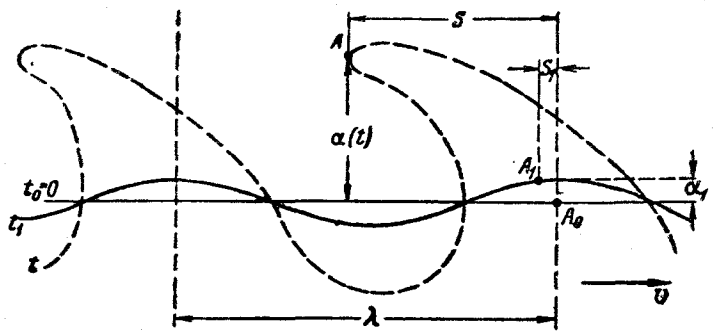


Рис. 2. Рост волн и образование «загибов»

Если t_1 выбрать столь малым, что соответствующее ему смещение S_1 будет пренебрежимо мало по сравнению с λ, то, отбросив S_1 из (13), получим

$$\lambda = \frac{c\alpha_1}{e^{qt_1}} \{E_i(q\tau) - E_i(qt_1)\},$$

откуда

$$\tau = \frac{1}{q} E_i^{-1} \left\{ \frac{e^{qt_1}}{c\xi_1} + E_i(qt_1) \right\}, \qquad (14)$$

где $E_i(x)$ и $E_i^{-1}(y)$ — соответственно интегральная показательная функция и функция ей обратная, а показатель крутизны волны

$$\xi_1 = \xi(t_1) = \frac{\alpha_1}{\lambda}.$$

Найдя τ из (14), можно определить длину односвязной части струи $l_{кр}$ либо с учетом падения скорости вдоль струи [2], либо, считая $v_a = \text{const}$, из (10) и (14):

$$l_{кр} = \frac{v_a}{q} E_i^{-1} \left\{ \frac{e^{qt_1}}{c\xi_1} + E_i(qt_1) \right\}. \qquad (15)$$

Поскольку рассматриваемый сравнительно гладкий начальный участок струи не испытывает существенного сопротивления воздуха, то допущение $v_a = \text{const}$ неплохо отражает действительность, поэтому расчет $l_{кр}$ по (15) дает результаты, хорошо совпадающие с наблюдаемыми.

Из формулы (15) видно, что $l_{кр}$ является функцией следующих, не зависящих от времени параметров: скорости струи на поверхности v_a, инкремента нарастания амплитуды q и коэффициента, характеризующего сопротивление воздуха c, а также показателя крутизны $\xi = \xi(t)$ в некоторый момент t_1.

В заключение приведем результат применения (15) к струе со следующими параметрами, найденными экспериментально: $v_a = 71$ *м/сек*,

$q=294$ *сек*$^{-1}$, $c=1{,}18$, а к моменту времени $t_1=0{,}00141$ *сек* (что соответствует удалению от насадка $x_1=v_a t_1=10$ *см*) показатель крутизны был $\xi_1=0{,}08$ (рис. 2).

Значения функций $E_i(x)$ и $E_i^{-1}(y)$ найдены по таблицам [3]. Расчетное $l_{кр}=90$ *см*, что отличается от среднего результата наблюдений на величину, меньшую наблюдавшегося стандартного уклонения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рэлей Д. В. Теория звука, т. II, § 359. Гостехиздат, 1955.
2. Журавский А. М. Основные задачи теории разрушения угля струей воды. Зап. ЛГИ, т. XLI, вып. 1, 1959.
3. Таблицы интегральной показательной функции. Изд-во АН СССР, 1954.
4. Трёш Г. Распыливание жидкости. «Вопросы ракетной техники». 1955, № 4 (28).
5. Витман Л. А. О расчете длины сплошной части струи жидкости при ее распаде. Сб. «Вопросы теплоотдачи и гидравлики двухфазных сред». Госэнергоиздат, 1961.
6. Plateau J. Statique expèrimentale et thèorigue des liguides soumis aux seules forces molèculaires. Paris, 1873.
7. Savart J. Ann. chimie, 1883, v. LIII, p. 337.
8. Rayleigh D. W. Phil. Mag. 1892, v. XXXIV, p. 117.
9. Weber C. Z. angew. Math. und Mech., 1931,Bd. II, H. 2.
10. Haenlein A. Forsch. Geb. Ingenieurwesens, 1931, Bd. 2, N 4.
11. Rosenhead L. Proc. Roy. Soc. A., 1932, v. 134, p. 170—192.