Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLIII, вып. 3, 1964 г.

УДК 532.526

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Л. А. Кулонен

Рассмотрим плоский ламинарный пограничный слой в несжимаемой жидкости при наличии продольного перепада давления. Физические характеристики жидкости примем постоянными для всех точек поля течения, а параметры потока — не зависящими от времени.

Такое течение жидкости может быть описано уравнением

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial u^2} + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho\mu}{\tau}\right) - \frac{dp}{dx}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu}{\tau}\right) = 0; \tag{1}$$

при граничных условиях

$$\left.\begin{aligned} u = 0: &\quad \frac{\partial\tau}{\partial u} = \frac{\mu}{\tau}\frac{dp}{dx}; \\ u = u_0: &\quad \tau = 0; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{dp}{dx} = -\rho u_0\frac{du_0}{dx}$;

x, y — криволинейные координаты точки (вдоль и по нормали к поверхности обтекаемого тела);
u — продольная составляющая вектора скорости;
p — давление;
ρ — плотность;
τ — напряжение трения;
μ — коэффициент вязкости;
u_0 — продольная составляющая вектора скорости на внешней границе слоя.

Совершим в (1) и (2) замену переменных

$$u = \bar{u}u_0;$$

$$dy = \frac{\sqrt{\nu Vl}}{u_0}d\bar{\eta};\quad dx = \frac{Vl}{u_0}d\bar{\xi},$$

где l — характерный размер,
V — характерная скорость;

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Переменные $\bar{u}$, ξ и η уже безразмерны.

Обозначая $t = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}$, будем иметь

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \bar{u}^2} + \frac{u_0'}{u_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{u}}\left(\frac{1-\bar{u}^2}{t}\right) + \bar{u}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{t}\right) = 0; \quad u_0' = \frac{du_0}{d\xi};$$

$$\bar{u} = 0: \quad \frac{\partial t}{\partial \bar{u}} = -\frac{1}{t} \cdot \frac{u_0'}{u_0};$$

$$\bar{u} = 1: \quad t = 0.$$

Вводя новую искомую функцию $\vartheta = t\sqrt{\xi}$, получим исходное уравнение пограничного слоя в форме

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{u}^2} + \beta(\xi)\frac{\partial}{\partial \bar{u}}\left[\frac{(1-\bar{u}^2)}{\vartheta}\right] + \frac{\bar{u}}{2\vartheta} + \bar{u}\xi\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\vartheta}\right) = 0 \tag{3}$$

и граничные условия в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{u} = 0: \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{u}} = -\frac{\beta(\xi)}{\vartheta}; \\ &\bar{u} = 1: \quad \vartheta = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где

$$\beta(\xi) = \frac{\xi u_0'}{u_0}.$$

Замечая, что абсолютная величина производных от ϑ по $\bar{u}$ неограниченно возрастает по мере приближения к точке $(\xi, 1)$, введем новые независимые переменные ξ и η согласно

$$\xi = \xi, \quad \bar{u} = f_\eta'(\eta), \tag{5}$$

так что

$$\lim_{\bar{u}\to 1} \eta = +\infty.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} + \left\{\left(-\frac{f'''}{f''}\right) + \left[-\beta(1-\bar{u}^2)f''\right]\frac{1}{\vartheta^2}\right\}\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} +$$

$$+\left[\frac{(1-4\beta)\bar{u}f''^2}{2}\right]\frac{1}{\vartheta} + \xi\bar{u}f''^2\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\vartheta}\right) = 0; \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} &\eta = 0: \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = -\frac{\beta f''}{\vartheta}; \\ &\lim_{\eta\to+\infty} \vartheta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Задачу

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} + \left(a + \frac{b}{\vartheta^2}\right)\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} + m\frac{1}{\vartheta} + k\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\vartheta}\right) = 0; \\ &\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = -\frac{\beta f''(0)}{\vartheta_w}, \quad \lim_{\eta\to+\infty} \vartheta = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $\vartheta_w = \vartheta|_{\eta=0}$; $k = k(\xi, \eta)$; $a = a(\eta)$; $b = b(\xi, \eta)$; $m = m(\xi, \eta)$ — изве-

стные функции переменных ξ и η, будем решать методом последовательных приближений.

В дальнейшем нам понадобится интегральное соотношение импульсов

$$\vartheta_w = \xi \frac{d\alpha_1}{d\xi} + \frac{\alpha_1}{2} + \beta\alpha_2, \tag{9}$$

где

$$\alpha_1 = \int_0^1 \frac{\bar{u}(1-\bar{u})}{\vartheta} d\bar{u}; \quad \alpha_2 = \int_0^1 \frac{(1-\bar{u}^2)}{\vartheta} d\bar{u}.$$

Линеаризируем задачу (8), полагая

$$\vartheta^{(n)} = \vartheta^{(n-1)} + \Delta\vartheta^{(n-1)},$$

где $\vartheta^{(n-1)}$ — известная функция ξ и η при $\frac{\Delta\vartheta^{(n-1)}}{\vartheta^{(n-1)}} \ll 1$ (n — номер приближения),

получим

$$\frac{\partial^2\Delta\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta^2} + A^{(n-1)}\frac{\partial\Delta\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta} + B^{(n-1)}\Delta\vartheta^{(n-1)} + C^{(n-1)} = kS_1^{(n-1)}\frac{\partial\Delta\vartheta^{(n-1)}}{\partial\xi};$$

$$\left.\frac{\partial\Delta\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} = \left[-\frac{\beta f''(0)}{\vartheta_w^{(n-1)}} - \left.\frac{\partial\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}\right] + \beta\frac{f''(0)}{\vartheta_w^{(n-1)^2}}\Delta\vartheta_w^{(n-1)}, \tag{10}$$

где коэффициенты $A^{(n-1)}$, $B^{(n-1)}$, $C^{(n-1)}$ и $S_1^{(n-1)}$ содержат $\frac{\partial^2\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta^2}$, $\frac{\partial\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta}$, $\vartheta^{(n-1)}$ и $\frac{\partial\vartheta^{(n-1)}}{\partial\xi}$.

В основе метода расчета лежит принцип поочередного интегрирования (10) по переменной η и уравнения (9) — по переменной ξ. При этом в (10) полагаем:

$$\left.\begin{aligned} kS_1^{(n-1)}\frac{\partial\Delta\vartheta^{(n-1)}}{\partial\xi} &\equiv 0;\\ \frac{\partial^2\Delta\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta^2} + A^{(n-1)}\frac{\partial\Delta\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta} + B^{(n-1)}\Delta\vartheta^{(n-1)} + C^{(n-1)} &= 0;\\ \left.\frac{\partial\Delta\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} = \left[-\beta\frac{f''(0)}{\vartheta_w^{(n-1)}} - \left.\frac{\partial\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}\right] &+ \beta\frac{f''(0)}{\vartheta_w^{(n-1)^2}}\cdot\Delta\vartheta_w^{(n-1)};\\ \lim_{n\to+\infty}\Delta\vartheta^{(n-1)} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Пусть в результате интегрирования (11) определилась функция $\Delta\vartheta^{(n-1)}$. Следовательно,

$$\tilde{\vartheta}^{(n)*} = \vartheta^{(n-1)} + \Delta\vartheta^{(n-1)}.$$

Положим,

$$\vartheta^{(n)} = V^{(n)}(\xi)\,\tilde{\vartheta}^{(n)},$$

где $V^{(n)}(\xi)$ пока не определена.

Подчиняя функцию $\vartheta^{(n)}$ интегральному соотношению (9), полу-

---

* Значок $\sim$ означает, что $\tilde{\vartheta}^{(n)}$ является промежуточной величиной, а не окончательным результатом в n-м приближении.

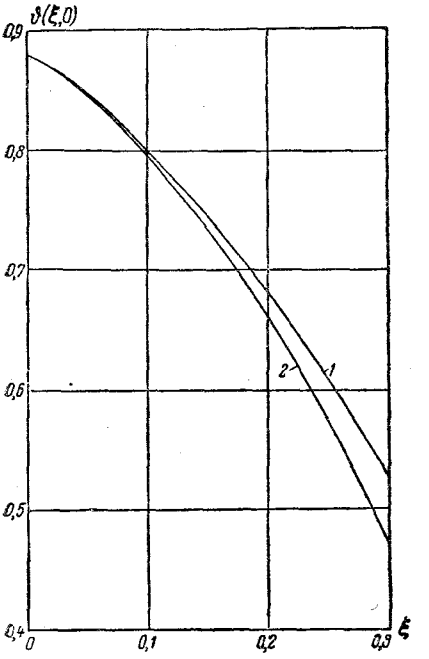
чим нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $V^{(n)}(\xi)$

$$\xi V_{\xi}^{(n)\prime} = RV^{(n)} + SV^{(n)^3}, \tag{12}$$

где

$$R = \frac{\alpha_1^{(n-1)} + 2\beta\alpha_2^{(n-1)} + 2\xi\alpha_1^{(n-1)\prime}\xi}{2\alpha_1^{(n-1)}};$$

$$S = -\frac{\widetilde{\vartheta}^{(n-1)}}{\alpha_1^{(n-1)}}.$$



Распределение поверхностного трения, рассчитанное:

1 — предлагаемым методом $\vartheta(\xi, 0) = \vartheta^{(1)}(\xi, 0)$;
2 — по Дородницыну [1] (4-е приближение)

Уравнение (12) имеет особенность при $\xi=0$, поэтому в окрестности $\xi=0$ его решение строится в виде степенного ряда по ξ

$$V^{(n)} = V_0^{(n)} + V_1^{(n)}\xi + V_2^{(n)}\xi^2 + \ldots,$$

если

$$\beta = \beta_0 + \beta_1\xi + \beta_2\xi^2 + \ldots$$

В качестве нулевого приближения $\vartheta^{(0)}$ можно взять величину

$$\vartheta^{(0)} = \frac{V^{(0)}(\xi) f''(\eta)}{\sqrt{2}},$$

где $f(\eta)$ удовлетворяет уравнению пограничного слоя при $\xi=0$

$$f''' + ff'' + 2\beta(1 - f'^2) = 0. \tag{13}$$

[1] Дородницын А. А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя. «Журнал прикл. механики и теор. физики», 1960, № 3.

Заметим, что в (5) в качестве функции $f'(\eta)$ можно взять первую производную функцию f^{η}, удовлетворяющей уравнению (13) и, конечно, соответствующим граничным условиям.

В качестве примера был произведен численный расчет конфузорной части пограничного слоя при

$$u_0 = C\sqrt{\xi}(1-\xi).$$

В этом случае

$$\beta(\xi) = \frac{1-3\xi}{2(1-\xi)}.$$

Оказалось

$$V_1^{(0)} = -0{,}6165;\ V_2^{(0)} = -0{,}5851.$$

При этом очевидно, что $V_0^{(0)} = 1$.

Уравнение (12) относительно $V^{(0)}$ проинтегрировано численно.

Затем вычислялись коэффициенты $A^{(0)}$, $B^{(0)}$, $C^{(0)}$, и уравнение (11) относительно $\Delta\vartheta^{(0)}$ интегрировалось численно поперек слоя при $\xi =$ $= 0{,}05$; 0,10; 0,15; 0,20; 0,25; 0,30.

В результате расчетов, в частности, найдено распределение напряжения трения вдоль поверхности тела (см. рисунок).