Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLIII, вып. 3, 1964 г.

УДК 532.526

К РАСЧЕТУ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ, ОБТЕКАЕМЫХ БИНАРНОЙ СМЕСЬЮ ГАЗОВ

Л. А. Кулонен

В статье рассматривается решение уравнений ламинарного пограничного слоя на полубесконечном теле вращения, обтекаемом бинарной смесью газов под нулевым углом атаки. В потоке и на поверхности обтекаемого тела возможна реакция типа $X_2 \rightleftarrows 2X$.

Основные уравнения и граничные условия. Рассмотрим высокотемпературный пограничный слой на теле вращения с осью, имеющей направление скорости набегающего потока. Движение газа в этом случае является, очевидно, осесимметричным и вполне определяется картиной течения в меридиональной плоскости. Дифференциальные уравнения осесимметричного ламинарного пограничного слоя имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho u r)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v r)}{\partial y} &= 0;\\
\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right);\\
\rho u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D_{12} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right) + m_1 K_1;\\
\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} &= u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho D_{12} \Delta h \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right] + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2;\\
p &= \frac{\rho R T}{m_2}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1}\varepsilon + 1\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где x, y — координаты, отсчитываемые по дуге меридионального сечения и по нормали к поверхности соответственно;

u, v — проекции вектора средней массовой скорости на направления x и y;

$r(x)$ — расстояние от точки поверхности осесимметричного тела до оси вращения;

ρ, p — полные плотность и статическое давление смеси;

T — абсолютная температура;

ρ_1, ε — парциальная плотность и массовая концентрация „первой" компоненты смеси;

$(1 - \varepsilon)$ — массовая концентрация „второй" компоненты смеси;

μ, λ, D_{12} — коэффициенты вязкости, теплопроводности и диффузии;

$h = \varepsilon (h_1 - h_2) + h_2$ — удельная энтальпия смеси, где h_1 и h_2 — удельные энтальпии компонент,

$$\Delta h = h_1 - h_2;$$

m_1, m_2 — молекулярные веса компонент;

K_1 — абсолютная молярная скорость образования молекул первого типа;

R — универсальная газовая постоянная.

Пусть C_{p1}, C_{p2} — удельные теплоемкости компонент смеси при постоянном давлении и

$$\Delta C_p = C_{p1} - C_{p2}, \quad \theta = h + \frac{u^2}{2}.$$

Введем безразмерные переменные соотношениями

$$r' = \frac{r}{\bar{l}}, \quad x' = \frac{x}{\bar{l}}, \quad y' = \sqrt{\overline{\mathrm{Re}}}\,\frac{y}{\bar{l}};$$

$$u' = \frac{u}{\bar{u}}, \quad v' = \sqrt{\overline{\mathrm{Re}}}\,\frac{v}{\bar{u}}, \quad p' = \frac{p}{\bar{\rho}\bar{u}^2}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\bar{\rho}};$$

$$\theta' = \frac{\theta}{\bar{C}_p \bar{T}}, \quad h' = \frac{h}{\bar{C}_p \bar{T}}, \quad \Delta h' = \frac{\Delta h}{\bar{C}_p \bar{T}};$$

$$\Phi = \frac{m_1 K_1}{\bar{\rho}} \frac{\bar{l}}{\bar{u}}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\bar{\mu}}, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}},$$

где $\bar{l}$, $\bar{u}$ — характерные длина, скорость и т. д.;

$$\overline{\mathrm{Re}} = \frac{\bar{\rho}\bar{u}\bar{l}}{\bar{\mu}}.$$

Переходя к новым переменным в уравнениях (1) и опуская штрихи, получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial(\rho u r)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v r)}{\partial y} = 0;\\
&\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right);\\
&\frac{\partial p}{\partial y} = 0;\\
&\rho u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu}{Sc}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right] + \Phi;\\
&\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = (\bar{\gamma} - 1)\bar{M}^2\left[u\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] +\\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\lambda}{\overline{pr}}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\mu}{Sc}\Delta h \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

или

$$\rho u \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\lambda}{\overline{pr}}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\mu}{Sc}\Delta h \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + (\bar{\gamma} - 1)\bar{M}^2 u \mu \frac{\partial u}{\partial y}\right];$$

$$p(\bar{\gamma} - 1)\bar{M}^2 = \frac{\rho R T}{m_2}\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1}\varepsilon + 1\right);$$

$$\theta = h + \frac{(\bar{\gamma} - 1)\bar{M}^2}{2} u^2,$$

где $\overline{Pr} = \frac{\bar{C}_p \bar{\mu}}{\bar{\lambda}}$, $\bar{M} = \sqrt{\frac{\bar{u}^2}{(\bar{\gamma} - 1)\bar{C}_p \bar{T}}}$ — характерные числа Прандтля и Маха;

$\bar{\gamma} = \frac{\bar{C}_p}{\bar{C}_v}$ — отношение характерных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме;

$Sc = \frac{\mu}{\rho D_{12}}$ — число Шмидта.

При записи граничных условий для уравнений (2) будем исходить из условия полного торможения частиц газовой смеси на поверхности тела и наличия в общем случае связи между температурой и концентрацией атомов на поверхности и величинами теплового и диффузионного потоков. Таким образом, при $y=0$: $u=0$, $v=0$.

$$T_w = T_w(x) \text{ или } \lambda\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\overline{Pr}}{Sc}\Delta h\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \varphi_1(x,\ \varepsilon,\ T,\ p),$$

где φ_1 зависит от наличия источников тепла на поверхности тела;

$$\varepsilon_w = \varepsilon_w(x) \text{ или } \frac{\mu}{Sc}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \varphi_2(x,\ \varepsilon,\ T,\ p),$$

где φ_2 определяется кинетикой прямой и обратной реакций вблизи поверхности тела.

Требование смыкания течения в пограничном слое с внешним потоком приводит к условиям

$$\lim_{y\to\infty} u = u_0(x),\ \lim_{y\to\infty} T = T_0(x),\ \lim_{y\to\infty} \varepsilon = \varepsilon_0(x).$$

Предполагается, что функции $u_0(x)$, $T_0(x)$ и $\varepsilon_0(x)$ известны.

При решении уравнений (2) в дальнейшем используются интегральные соотношения импульсов, энергии и закон сохранения массы «первой» компоненты смеси в интегральной форме, которые могут быть получены из соответствующих дифференциальных уравнений (2) путем их однократного интегрирования поперек пограничного слоя и использования уравнения неразрывности для смеси в целом. Эти соотношения в перечисленном порядке имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
\tau_w &= \frac{d}{dx}\int_0^\infty \rho u(u_0-u)\,dy + \frac{du_0}{\partial x}\int_0^\infty (\rho_0 u_0 - \rho u)\,dy + \\
&\quad + \frac{d\ln r}{dx}\int_0^\infty \rho u(u_0-u)\,dy; \\
\left(\frac{\lambda}{\overline{Pr}}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\mu}{Sc}\Delta h\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)_{y=0} &= \frac{d}{dx}\int_0^\infty \rho u(\theta_0-\theta)\,dy + \\
&\quad + \frac{d\ln r}{dx}\int_0^\infty \rho u(\theta_0-\theta)\,dy; \\
\left(\frac{\mu}{Sc}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)\Big|_{y=0} &= \frac{d}{dx}\int_0^\infty \rho u(\varepsilon_0-\varepsilon)\,dy + \\
&+ \frac{d\ln r}{dx}\int_0^\infty \rho u(\varepsilon_0-\varepsilon)\,dy + \int_0^\infty \left(\overline{\Phi} - \rho u\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x}\right)dy,
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

где

$$\tau_w = \left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{y=0}.$$

Приближенное решение уравнений (2) должно удовлетворять интегральным соотношениям (3). Это требование оправдано очевидным физическим смыслом соотношений (3), которые выражают законы изменения количества движения, энергии и массы для элемента пограничного слоя. Известно, что интегральных соотношений, соответствующих (2), можно получить сколько угодно. Однако привлечение дополнительных интегральных соотношений необходимо лишь в случае введения большого числа искомых параметров, определяющих характеристики пограничного слоя. В дальнейшем будем рассматривать такой вариант метода последовательных приближений, когда число неизвестных параметров равно числу неизвестных функций.

Осуществим в уравнениях (2) переход к переменным Крокко, т. е. от независимых переменных x, y перейдем к независимым переменным x, $\zeta=\frac{u}{u_0}$, а в качестве искомых функций рассмотрим τ, T, ε (τ — напряжение трения). Опуская промежуточные выкладки, приведем лишь результат преобразования уравнений пограничного слоя к указанным переменным:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\tau}{\partial\zeta^2}=-u_0^3\frac{\zeta}{r}\left[\frac{\rho\mu}{\tau}\frac{dr}{dx}+r\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho\mu}{\tau}\right)\right]+u_0\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\mu}{\tau}\right);\\
&\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\zeta^2}=-\left\{\frac{\partial\varepsilon}{\partial\zeta}\left[(1-Sc)\frac{\partial\ln\tau}{\partial\zeta}-\frac{\partial\ln Sc}{\partial\zeta}+u_0\frac{\partial p}{\partial x}Sc\frac{\mu}{\tau^2}\right]-\right.\\
&\qquad\left.-u_0^3\zeta\frac{\rho\mu}{\tau^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}Sc+u_0^2\Phi\frac{\mu}{\tau^2}Sc\right\};\\
&\frac{\partial^2T}{\partial\zeta^2}=-\left\{\frac{\partial T}{\partial\zeta}\left[(1-Pr)\frac{\partial\ln\tau}{\partial\zeta}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\ln\frac{\lambda}{\mu}\right)+u_0\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mu}{\tau^2}Pr+\right.\right.\\
&\qquad\left.+\bar{P}r\frac{\mu\Delta C_p}{\lambda}\frac{1}{Sc}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\zeta}\right]-u_0^3\zeta Pr\frac{\rho\mu}{\tau^2}\frac{\partial T}{\partial x}+\\
&\qquad\left.+u_0^2\frac{\mu}{\lambda}\bar{P}r\left[\bar{\alpha}\left(u_0\zeta\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mu}{\tau^2}+1\right)-\Phi\Delta h\frac{\mu}{\tau^2}\right]\right\};\\
&\bar{\alpha}P=\frac{\rho RT}{m_2}\left(\frac{m_2-m_1}{m_1}\varepsilon+1\right),
\end{aligned}
\right\}
\qquad (4)
$$

где $\bar{\alpha}=(\bar{\gamma}-1)\bar{M}^2$;

$\Delta C_p=C_{p1}-C_{p2}$ — разность удельных теплоемкостей при постоянном давлении для обеих компонент смеси,

$$Pr=\frac{C_p\mu}{\lambda}.$$

Здесь понятие теплоемкости для реагирующей смеси введено согласно

$$C_p=\frac{\partial h}{\partial T}\Big|_{\varepsilon=\text{const};\ p=\text{const}}=\varepsilon\cdot\Delta C_p+C_{p_2}.$$

Определенное таким образом понятие теплоемкости не имеет очевидного физического смысла, поскольку концентрация ε тоже зависит от температуры.

Преобразование соотношений (3) к новым переменным сводится к введению новой искомой функции τ и вместо переменной

интегрирования y_1 — новой переменной ζ. В результате получим:

$$\left.\begin{aligned}
\tau_w = \frac{d}{dx}\left[u_0^3\int_0^1 \frac{\rho\mu}{\tau}\zeta(1-\zeta)\,d\zeta\right] + u_0^2\frac{du_0}{dx}\int_0^1(\rho_0-\rho\zeta)\frac{\mu}{\tau}\,d\zeta + \\
+ \frac{d\ln r}{dx}u_0^2\int_0^1\frac{\rho\mu}{\tau}(1-\zeta)\,d\zeta; \\
\frac{\tau}{\mu}\left(\frac{\lambda}{Pr}\frac{\partial T}{\partial\zeta}+\frac{\mu}{Sc}\Delta h\frac{\partial\varepsilon}{\partial\zeta}\right)\Big|_{\zeta=0} = u_0\frac{d}{dx}\left[u_0^2\int_0^1\frac{\rho\mu}{\tau}\zeta(\theta_0-\theta)\,d\zeta\right] + \\
+ \frac{d\ln r}{dx}u_0^3\int_0^1\frac{\rho\mu}{\tau}\zeta(\theta_0-\theta)\,d\zeta; \\
\frac{\tau}{\mu}\left(\frac{\mu}{Sc}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\zeta}\right)\Big|_{\zeta=0} = u_0\frac{d}{dx}\left[u_0^2\int_0^1\frac{\rho\mu}{\tau}\zeta(\varepsilon_0-\varepsilon)\,d\zeta\right] + \\
+ \frac{d\ln r}{dx}u_0^3\int_0^1\frac{\rho\mu}{\tau}\zeta(\varepsilon_0-\varepsilon)\,d\zeta + \\
+ u_0^3\int_0^1\frac{\mu}{\tau}\left(\frac{\Phi}{u_0}-\rho\zeta\frac{d\varepsilon_0}{dx}\right)d\zeta.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Совершенно аналогично можно перейти к новым переменным и в граничных условиях. Причем граничные условия для функции τ будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\tau}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=0} = u_0\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mu}{\tau}\Big|_{\zeta=0}; \\
\tau|_{\zeta=0} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

О возможности численного решения задачи с помощью метода прямых

Построение решения системы уравнений (4), когда исходной является передняя критическая точка. Предположим, что все гидродинамические величины, характеризующие внешний поток, в малой окрестности передней критической точки можно аппроксимировать выражениями вида:

$$\left.\begin{aligned}
u_0 = u_0^{(1)}x^m + u_0^{(2)}x^{2m} + u_0^{(3)}x^{3m} + \ldots; \\
\rho_0 = \rho_0^{(0)} + \rho_0^{(1)}x^m + \rho_0^{(2)}x^{2m} + \ldots; \\
\varepsilon = \varepsilon_0^{(0)} + \varepsilon_0^{(1)}x^m + \varepsilon_0^{(2)}x^{2m} + \ldots; \\
T = T_0^{(0)} + T_0^{(1)}x^m + T_0^{(2)}x^{2m} + \ldots,
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

где $m = \frac{1}{N}$;

N — целое положительное число.

Во внешнем потоке выполняется условие

$$\rho_0 u_0\frac{du_0}{dx} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial p}{\partial x} = x^{2m-1}(p^{(0)} + p^{(1)}x^m + \ldots),$$

где коэффициенты $p^{(i)}$ могут быть выражены через коэффициенты $\rho_0^{(i)}$ и $u_0^{(i)}$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots)$.

Найдем решение системы уравнений (4) в окрестности $x=0$ в виде следующих рядов:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= x^{\frac{3m-1}{2}}(\tau^{(0)} + \tau^{(1)}x^m + \tau^{(2)}x^{2m} + \ldots); \\ \varepsilon &= \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}x^m + \varepsilon^{(2)}x^{2m} + \ldots; \\ T &= T^{(0)} + T^{(1)}x^m + T^{(2)}x^{2m} + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Из уравнения состояния следует, что и

$$\rho = \rho^{(0)} + \rho^{(1)}x^m + \rho^{(2)}x^{2m} + \ldots,$$

где коэффициенты $\rho^{(i)}$ могут быть выражены через коэффициенты

$$p^{(i)},\ \varepsilon^{(i)},\ T^{(i)}\ (i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Считаем, что коэффициенты рядов (8) зависят только от ζ. Кроме искомых неизвестных функций в систему уравнений (4) входят также величины, зависимость которых от температуры и концентрации известна. Разложив любую из этих функций $F(\varepsilon, T)$ в ряд

$$F(\varepsilon,\ T) = \sum_{i,\ k=0}^{\infty} \frac{1}{i!\ k!} \frac{\partial^{i+k}F(\varepsilon,\ T)}{\partial\varepsilon^i \partial T^k}\Bigg|_{\substack{\varepsilon=\varepsilon^{(0)} \\ T=T^{(0)}}} \cdot (\varepsilon - \varepsilon^{(0)})^i (T - T^{(0)})^k$$

и подставив сюда ряды для ε и T, получим разложение функции $F(\varepsilon, T)$ в ряд типа (8). Кроме того, в уравнение количества движения входит множителем при одном из слагаемых член $\frac{x}{r}\frac{dr}{dx}$. Если тело вблизи передней критической точки имеет строго коническую форму, то $\frac{x}{r}\frac{dr}{dx} \equiv 1$.

В случае сферически затупленного тела $\frac{x}{r}\frac{dr}{dx} \approx 1$ с точностью до x^2.

Соотношение $\frac{x}{r}\frac{dr}{dx} \approx 1$ может быть принято в тех случаях, когда кривизна меридионального профиля вблизи $x=0$ невелика.

Итак, разлагая все функции, входящие в уравнения системы (4), в ряды типа (8), подставляя их в эти уравнения, собирая вместе члены при одинаковых степенях x^m и последовательно приравнивая их нулю, получим последовательность систем обыкновенных дифференциальных уравнений для определения нулевых, первых и т. д. коэффициентов.

Граничные условия для указанных систем уравнений получаются аналогично путем разложения в ряды граничных условий для системы (4).

Выпишем, например, систему нелинейных уравнений для определения нулевых коэффициентов рядов (8).

1. Уравнение количества движения

$$\frac{d^2\tau^{(0)}}{d\zeta^2} + \frac{3}{2}(1-m)\zeta u_0^{(1)3}\frac{(\rho\mu)^{(0)}}{\tau^{(0)}} - u_0^{(1)}p^{(0)}\frac{d}{d\zeta}\left[\frac{\mu^{(0)}}{\tau^{(0)}}\right] = 0.$$

2. Уравнение диффузии

$$\frac{d^2\varepsilon^{(0)}}{d\zeta^2}+\frac{d\varepsilon^{(0)}}{d\zeta}\left[\frac{d\ln\tau^{(0)}}{d\zeta}(1-Sc^{(0)})-\frac{d\ln Sc^{(0)}}{d\zeta}+u_0^{(1)}p^{(0)}\frac{\mu^{(0)}}{[\tau^{(0)}]^2}Sc^{(0)}\right]+X=0,$$

где

$$X=[u_0^{(1)}]^2\Phi^{(0)}\frac{\mu^{(0)}}{[\tau^{(0)}]^2}x^{1-m}\cdot Sc^{(0)};$$

$$1-m=\frac{N-1}{N}.$$

Скорость реакции войдет в уравнение лишь в случае $N=1$, т. е. в случае тупоносого тела.

3. Уравнение энергии

$$\frac{d^2T^{(0)}}{d\zeta^2}+\frac{dT^{(0)}}{d\zeta}\left[\frac{d\ln\tau^{(0)}}{d\zeta}(1-Pr^{(0)})+\frac{d}{d\zeta}\left(\ln\frac{\lambda^{(0)}}{\mu^{(0)}}\right)+\right.$$

$$\left.+u_0^{(1)}p^{(0)}\frac{\mu^{(0)}}{[\tau^{(0)}]^2}Pr^{(0)}+\bar{P}r\frac{\mu^{(0)}\Delta C_p}{\lambda^{(0)}}\frac{1}{Sc^{(0)}}\frac{d\varepsilon}{d\zeta}\right]-\Upsilon=0;$$

$$\Upsilon=u_0^{(1)2}\frac{\mu^{(0)2}\bar{P}r\Delta h^{(0)}\Phi^{(0)}x^{1-m}}{\lambda^{(0)}\tau^{(0)2}}.$$

Υ, так же как и X, войдет в уравнение энергии лишь в случае тупоносого тела.

Разобьем промежуток x на n равных отрезков длиной Δx и допустим, что мы нашли приближенные значения τ, T, ε в интервале $[0, \Delta x]$ указанным выше способом. Тогда, зная значение любой функции и ее производной по x в точках $x=0$ и $x=\Delta x$, можно выразить через эти величины и значение функции при $x=2\Delta x$ производную по x при $x=2\Delta x$ с помощью формулы

$$\left.\frac{\partial F(x,\zeta)}{\partial x}\right|_{x=x_0+\Delta x}=\frac{2}{\Delta x}F(x_0+\Delta x,\zeta)-$$

$$-\left[\frac{4}{\Delta x}F(x_0,\zeta)-\frac{2}{\Delta x}F(x_0-\Delta x,\zeta)-\left.\frac{\partial F(x,\zeta)}{\partial x}\right|_{x=x_0-\Delta x}\right]+0(\Delta x^3). \quad (9)$$

Произведя такую замену при $x=2\Delta x$ в системе уравнений (4), получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих $\tau(2\Delta x, \zeta)$, $T(2\Delta x, \zeta)$, $\varepsilon(2\Delta x, \zeta)$. Аналогично можно найти распределение трения, температуры и концентрации при $x=3\Delta x$, $x=4\Delta x$ и т. д.

Предположим, поток не тормозится вблизи передней критической точки, что имеет место, например, при сверхзвуковом обтекании клина или конуса с присоединенной ударной волной. Пусть величины внешнего потока представимы следующими выражениями:

$$\left.\begin{aligned}u_0&=u_0^{(0)}+u_0^{(1)}x^{2m}+u_0^{(2)}x^{2m}+\ldots;\\ \rho_0&=\rho_0^{(0)}+\rho_0^{(1)}x^m+\rho_0^{(2)}x^{2m}+\ldots;\\ T_0&=T_0^{(0)}+T_0^{(1)}x^m+T_0^{(2)}x^{2m}+\ldots\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Тогда

$$\frac{\partial p}{\partial x}=x^{m-1}(p^{(0)}+p^{(1)}x^m+\ldots),$$

поскольку

$$\rho_0u_0\frac{du_0}{dx}=-\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Функции T и ε нужно искать в виде таких же рядов, как и в предыдущем случае. Трение τ ищем в виде

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{x}}(\tau^{(0)} + \tau^{(1)}x^m + \tau^{(2)}x^{2m} + \dots).$$

Дальнейшее построение решения по методу прямых производится аналогично предыдущему случаю.

Построение решения уравнений ламинарного пограничного слоя с помощью асимптотических решений ($x \to \infty$). Установление химического равновесия в реагирующей смеси газов зависит от температуры, давления, скорости движения, градиентов температуры и концентрации, а кроме того, от каталитической активности поверхности обтекаемого тела.

С удалением от передней критической точки потоки диффузии и тепла убывают. Поэтому на некотором удалении от передней критической точки в случае достаточно высокого давления установится химическое равновесие. Строго говоря, химическое равновесие установится на бесконечно большом удалении от передней критической точки, а практически — на конечном расстоянии.

Итак, предположим, что: 1) на некотором удалении от передней критической точки граничные условия на стенке и внешней границе слоя не зависят от продольной координаты x; 2) на этом же расстоянии концентрация во внешнем потоке и в пограничном слое принимает равновесное значение; 3) из соображений удобства будем считать, что равновесие достигается не на конечном, а на бесконечном расстоянии от передней критической точки; 4) форма обтекаемого тела известна, и на достаточно большом удалении от критической точки оно имеет форму либо цилиндра, либо конуса.

При всех этих предположениях при $x \to \infty$ система уравнений (4) имеет решение, зависящее от одной переменной ζ.

Пусть ε_p, T_p, τ_p — равновесное решение системы (4).

Введем вместо трения функцию $\hat{\tau} = \tau\sqrt{x}$. Перейдем от переменной x к переменной $z = \frac{1}{x}$.

Пусть $x_0 \left(z_0 = \frac{1}{x_0}\right)$ — какое-то конечное значение x.

Функции $u_0 = f_1(x)$, $\frac{x}{r}\frac{dr}{dx} = f_2(x)$, $\frac{\partial p}{\partial x} = f_3(x)$ нам известны.

Кроме того, в уравнения входят члены $x\frac{\partial \hat{\tau}}{\partial x}$, $x\frac{\partial T}{\partial x}$, $x\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$.

Легко видеть, что

$$x\frac{\partial \hat{\tau}}{\partial x} = -z\frac{\partial \hat{\tau}}{\partial z}, \quad x\frac{\partial T}{\partial x} = -z\frac{\partial T}{\partial x}, \quad x\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -z\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}.$$

Если отклонение от химического равновесия при $z = z_0$ невелико, то приближенно можно принять

$$-z\frac{\partial T}{\partial z} \approx -z\frac{T - T_p}{z} = T_p - T.$$

Таким образом, при фиксированном значении $z = z_0$ получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $\hat{\tau}(z_0, \zeta)$, $T(z_0, \zeta)$, $\varepsilon(z_0, \zeta)$.

Имея решение в точках $z = 0$ и $z = z_0$, исключим производные по z при $z = 2z_0$ с помощью формулы типа (9). Имея решения в точках $z = z_0$ и $z = 2z_0$, можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения решения в точке $z = 3z_0$ и т. д.

До сих пор рассматривался случай непроницаемой стенки. Покажем, как можно решить задачу о ламинарном пограничном слое на полубесконечном теле с распределенным отсосом в реагирующей смеси газов, если построение решения вести в направлении убывающих значений $x(x>0)$, используя асимптотическое решение.

Перейдем от независимых переменных x, y к новым независимым переменным $\xi=e^{-x}$, y. Если $0\leqslant x\leqslant\infty$, то $1\geqslant\xi\geqslant 0$. В переменных ξ, y система (1) запишется так:

$$\left.\begin{aligned}
&-\xi\frac{\partial(\rho u r)}{\partial\xi}+\frac{\partial(\rho v r)}{\partial y}=0;\\
&-\rho u\xi\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}+\rho v\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D_{12}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right)+m_1K_1;\\
&-\rho u\xi\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=\xi\frac{\partial p}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right);\\
&-\rho u\xi\frac{\partial h}{\partial\xi}+\rho v\frac{\partial h}{\partial y}=-u\xi\frac{\partial p}{\partial\xi}+\\
&+\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda\frac{\partial T}{\partial y}+\rho D_{12}\Delta h\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right]+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2;\\
&p=\frac{\rho RT}{m_2}\left(\frac{m_2-m_1}{m_1}\varepsilon+1\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

Предположим, что искомые функции u, ε, v, T в окрестности $\xi=0$ можно разложить в ряды вида:

$$\left.\begin{aligned}
u&=u^{(0)}(y)+u^{(1)}(y)\xi+u^{(2)}(y)\xi^2+\ldots;\\
v&=\vartheta^{(0)}(y)+v^{(1)}(y)\xi+v^{(2)}(y)\xi^2+\ldots;\\
\varepsilon&=\varepsilon^{(0)}(y)+\varepsilon^{(1)}(y)\xi+\varepsilon^{(2)}(y)\xi^2+\ldots;\\
\rho&=\rho^{(0)}(y)+\rho^{(1)}(y)\xi+\rho^{(2)}(y)\xi^2+\ldots;\\
T&=T^{(0)}(y)+T^{(1)}(y)\xi+T^{(2)}(y)\xi^2+\ldots
\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

Будем при этом считать, что и граничные условия, и функцию $r=r(\xi)$ в окрестности $\xi=0$ также можно представить выражениями типа (12). Подставляя ряды (12) в систему уравнений (11), получим для определения нулевых коэффициентов рядов (12) систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений.

Решение этой системы является асимптотическим решением уравнений ламинарного пограничного слоя с отсосом.

Для определения первых коэффициентов рядов (12) имеем систему обыкновенных линейных однородных уравнений. Ограничиваясь нахождением первых или вторых коэффициентов рядов (12), получим приближенное решение системы (11) в малом промежутке $[0, \Delta\xi]$.

Построить решение при других значениях ξ можно, как и прежде, методом прямых.

Метод последовательных приближений

Основная система уравнений метода последовательных приближений. Интегрируя уравнения (4) по ζ дважды при граничных условиях

$$\left.\frac{\partial\tau}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0}=u_0\frac{\partial p}{\partial x}\left.\frac{\mu}{\tau}\right|_{\zeta=0};\quad \varepsilon|_{\zeta=0}=\varepsilon_w(x);\quad T|_{\zeta=0}=T_w(x);$$

$$\tau|_{\zeta=1}=0;\quad \varepsilon|_{\zeta=1}=\varepsilon_0(x);\quad T|_{\zeta=1}=T_0(x),$$

получим основную систему уравнений метода последовательных приближений:

$$\left.\begin{aligned}
\tau &= \int_{\zeta}^{1}\int_{0}^{\zeta}\left[u_0^3\frac{\zeta}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\rho\mu}{\tau}\right) - u_0\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\mu}{\tau}\right)\right]d\zeta d\zeta;\\
\varepsilon &= K(x,\ \zeta) + [K(x,\ 0) + \varepsilon_0 - \varepsilon_\omega](\zeta - 1) + \varepsilon_0;\\
T &= L(x,\ \zeta) + [L(x,\ 0) + T_0 - T_\omega](\zeta - 1) + T_0,
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

где

$$K(x,\ \zeta) = \int_{1}^{\zeta}\int_{0}^{\zeta}\left\{\frac{\partial\varepsilon}{\partial\zeta}\left[(1 - Sc)\frac{\partial\ln\tau}{\partial\zeta} - \frac{\partial\ln Sc}{\partial\zeta} + u_0\frac{\partial p}{\partial x}Sc\frac{\mu}{\tau^2}\right] - \right.$$

$$\left. - u_0^3\zeta Sc\frac{\rho\mu}{\tau^2}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \Phi Sc\frac{\mu}{\tau^2}u_0^2\right\}d\zeta d\zeta;$$

$$L(x,\ \zeta) = -\int_{1}^{\zeta}\int_{0}^{\zeta}\left\{\frac{\partial T}{\partial\zeta}\left[(1 - Pr)\frac{\partial\ln\tau}{\partial\zeta} + \frac{\partial}{\partial\zeta}\ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \right.\right.$$

$$+ u_0\frac{\partial p}{\partial x}Pr\frac{\mu}{\tau^2} + \bar{P}r\frac{\mu\Delta C_p}{\lambda}\cdot\frac{1}{Se}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial\zeta}\Big] - u_0^3\zeta Pr\frac{\rho\mu}{\tau^2}\frac{\partial T}{\partial x} +$$

$$\left.\left. + u_0^2\frac{\mu}{\lambda}\left[\bar{\alpha}\left(u_0\zeta\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mu}{\tau^2} + 1\right) - \Phi\Delta h\frac{\mu}{\tau^2}\right]\right\}d\zeta d\zeta.$$

Подынтегральные выражения в правых частях вычисляются на основании предыдущего приближения.

Если приближенное решение системы (4) представлено в виде:

$$\left.\begin{aligned}
\tau &= \tau\left[x,\ \zeta;\ A,\ B,\ C;\ \frac{dA}{dx},\ \frac{dB}{dx},\ \frac{dC}{dx};\ \ldots;\ \frac{d^nA}{dx^n},\ \frac{d^nB}{dx^n},\ \frac{d^nC}{dx^n}\right];\\
\varepsilon &= \varepsilon\left[x,\ \zeta;\ A,\ B,\ C;\ \frac{dA}{dx},\ \frac{dB}{dx},\ \frac{dC}{dx};\ \ldots;\ \frac{d^nA}{dx^n},\ \frac{d^nB}{dx^n},\ \frac{d^nC}{dx^n}\right];\\
T &= T\left[x,\ \zeta;\ A,\ B,\ C;\ \frac{dA}{dx},\ \frac{dB}{dx},\ \frac{dC}{dx};\ \ldots;\ \frac{d^nA}{dx^n},\ \frac{d^nB}{dx^n},\ \frac{d^nC}{dx^n}\right],
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

где A, B, C — неопределенные функции x, то решение в виде (14) необходимо подчинить условиям (5). Это даст возможность найти функции $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ как результат интегрирования системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений.

Выбор начального приближения и схема метода последовательных приближений. Как известно, точка $\zeta = 1$ является особой для уравнений пограничного слоя в том смысле, что при этом значении ζ обращаются в бесконечность все производные по ζ от τ, T, ε. Поэтому необходимо учесть особый характер поведения интегральных кривых вблизи внешней границы слоя. Существенные свойства интегральных кривых в окрестности особой точки для случая сжимаемой жидкости выясним на примерах плоской пластинки[1] и конуса в предположении отсутствия продольного градиента давления. В этих случаях при некоторых упрощающих предположениях относительно физических свойств газа и числах $Pr = \text{const} \neq 1$, $Sc = \text{const} \neq 1$ удается проинтегрировать уравнения количества движения, энергии и диффузии вблизи внешней границы слоя независимо друг от друга.

---

[1] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Гостехтеориздат, 1957.

Предположим, что пограничный слой является «замороженным» и что

$$\varphi=\frac{\rho\mu}{\overline{\rho\mu}}=1;\quad \frac{\lambda}{\mu}=\text{const}=1;\quad Pr=\text{const};$$

$$\Delta C_p=0;\quad Sc=\text{const}.$$

Тогда, считая $\overset{\wedge}{\tau}=\tau\sqrt{x}=f(\zeta)$; $\left(\overset{\wedge}{\tau}=\frac{\tau\sqrt{x}}{\sqrt{3}}=f(\zeta)\text{ в случае конуса}\right)$; $T=T(\zeta)$; $\varepsilon=\varepsilon(\zeta)$, будем иметь следующую систему уравнений пограничного слоя пластинки или конуса:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\overset{\wedge}{\tau}}{d\zeta^2}+\frac{\zeta}{2\overset{\wedge}{\tau}}=0;\\&\frac{d^2T}{d\zeta^2}+\frac{d\ln\overset{\wedge}{\tau}^{(1-pr)}}{d\zeta}\frac{dT}{d\zeta}+\overline{\alpha}\,\overline{Pr}=0;\\&\frac{d^2\varepsilon}{d\zeta^2}+\frac{d\ln\overset{\wedge}{\tau}^{(1-Sc)}}{d\zeta}\frac{d\varepsilon}{d\zeta}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

В окрестности $\zeta=1$ первое уравнение может быть заменено приближенным

$$\frac{d^2\overset{\wedge}{\tau}}{d\zeta^2}+\frac{1}{2\overset{\wedge}{\tau}}=0.$$

Интегрируя его один раз по ζ, будем иметь

$$\overset{\wedge}{\tau}=L_\tau e^{\left(-\frac{d\overset{\wedge}{\tau}}{d\zeta}\right)^2}.\qquad(16)$$

Из уравнений энергии и диффузии (15) получим:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dT}{d\zeta}=\frac{dT}{d\zeta}\Big|_{\zeta=0}\left[\frac{\overset{\wedge}{\tau}(0)}{\overset{\wedge}{\tau}(\zeta)}\right]^{(1-Pr)}-\frac{\overline{\alpha}\,\overline{Pr}}{\overset{\wedge}{\tau}(\zeta)^{1-Pr}}\int_0^\zeta\left[\overset{\wedge}{\tau}(\zeta)\right]^{1-Pr}d\zeta;\\&\frac{d\varepsilon}{d\zeta}=\frac{d\varepsilon}{d\zeta}\Big|_{\zeta=0}\left[\frac{\overset{\wedge}{\tau}(0)}{\overset{\wedge}{\tau}(\zeta)}\right]^{1-Sc}.\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

Величину интеграла $\int_0^\zeta\overset{\wedge}{\tau}^{(1-Pr)}d\zeta$ в первом из соотношений (17) заменим в окрестности $\zeta=1$ интегралом в пределах от нуля до единицы. Обозначив $\frac{d\overset{\wedge}{\tau}}{d\zeta}=-\eta$, вместо (16) и (17) получим:

$$\left.\begin{aligned}&d\zeta=2L_{\overset{\wedge}{\tau}}e^{-\eta^2}d\eta;\\&\overset{\wedge}{\tau}=L_{\overset{\wedge}{\tau}}e^{-\eta^2};\\&\frac{dT}{dS}=L_T\overset{\wedge}{\tau}^{(Pr-1)};\\&\frac{d\varepsilon}{d\zeta}=L_\varepsilon\overset{\wedge}{\tau}^{(Sc-1)}.\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

Произведя интегрирование дифференциальных соотношений (18), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
&\zeta = 1 - 2L_{\hat{\tau}} \int_{\eta}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta;\\
&\hat{\tau} = L_{\hat{\tau}} e^{-\eta^2};\\
&T = 1 + \overline{L}_T \int_{\eta}^{\infty} e^{-Pr\eta^2} d\eta;\\
&\varepsilon = \varepsilon_0 + \overline{L}_\varepsilon \int_{\eta}^{\infty} e^{-Sc\eta^2} d\eta.
\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Таким образом, в окрестности особой точки может быть получено параметрическое представление интегральных кривых уравнений (15) в форме, исключающей явное представление $\hat{\tau}$, T, ε как функции переменной ζ. Производные от $\hat{\tau}$ по ζ обращаются в точке $\zeta=1$ в бесконечность. В отношении функций T и ε это утверждение верно лишь для $Pr \neq 1$, $Sc \neq 1$.

Рассмотрим вопрос о выборе начального приближения.

Имея в виду асимптотические представления (19), введем вспомогательную переменную z соотношением

$$\zeta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{z}^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

Начальные приближения для τ, T, ε возьмем в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\tau^{(0)} = \left.\frac{\partial \tau}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0} (\zeta - 1) + A(x) e^{-z^2};\\
&T^{(0)} = T_0 + \left[T_w - T_0 - B(x) \int_0^{\infty} e^{-Pr_0 z^2} dz - \frac{\gamma_0 - 1}{2} M_0^2 T_0\right] \times\\
&\qquad \times (1 - \zeta) + B(x) \int_z^{\infty} e^{-Pr_0 z^2} dz;\\
&\varepsilon^{(0)} = \varepsilon_0 + \left[\varepsilon_w - \varepsilon_0 - C(x) \int_0^{\infty} e^{-Sc_0 z^2} dz\right](1 - \zeta) + C(x) \int_z^{\infty} e^{-Sc_0 z^2} dz,
\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ — пока неизвестные функции.

Начальное приближение в форме (20), как легко видеть, удовлетворяет граничным условиям для τ, T, ε.

Введение в начальное приближение для ε и T слагаемых, содержащих множитель $(1-\zeta)$, не нарушает асимптотического поведения этих функций, определяемого соотношениями (19), в окрестности $\zeta=1$, поскольку их порядок не превышает порядка последних членов.

Идея метода заключается в том, что семейства функций τ, T, ε, зависящие от трех параметров A, B, C, уточняются методом последовательных приближений. При этом величины A, B, C остаются неопределенными функциями x до тех пор, пока процесс не будет оборван на определенном этапе.

Если ограничиться приближением с номером n, то искомые функции $\tau^{(n)}$, $\varepsilon^{(n)}$ и $T^{(n)}$ должны удовлетворять интегральным соотношениям (5).

В результате придем к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$. Найденные зависимости $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ выделяют из семейств $\tau^{(n)}$, $\varepsilon^{(n)}$, $T^{(n)}$ те функции, которые являются приближенными решениями уравнений пограничного слоя.

Уточнение функций $\tau^{(n)}$, $\varepsilon^{(n)}$, $T^{(n)}$ производится следующим образом. Подставим выражения (20) в правые части (13). Тогда получим первое приближение:

$$\left.\begin{aligned} \tau^{(1)} &= f_1\left[z,\ x;\ A(x),\ B(x),\ C(x);\ \frac{dA}{dx},\ \frac{dB}{dx},\ \frac{dC}{dx}\right];\\ \varepsilon^{(1)} &= f_2\left[z,\ x;\ A(x),\ B(x),\ C(x);\ \frac{dA}{dx},\ \frac{dB}{dx},\ \frac{dC}{dx}\right];\\ T^{(1)} &= f_3\left[z,\ x;\ A(x),\ B(x),\ C(x);\ \frac{dA}{dx},\ \frac{dB}{dx},\ \frac{dC}{dx}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

При построении второго приближения указанные операции повторяются с учетом выражений (21).

Каждое приближение содержит неизвестные функции $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$. Для определения этих зависимостей, например, в первом приближении необходимо $\tau^{(1)}$, $\varepsilon^{(1)}$ и $T^{(1)}$ подчинить условиям (5), которые дадут нам систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$. Ясно, что чем выше номер приближения, тем выше порядок уравнений относительно A, B, C.

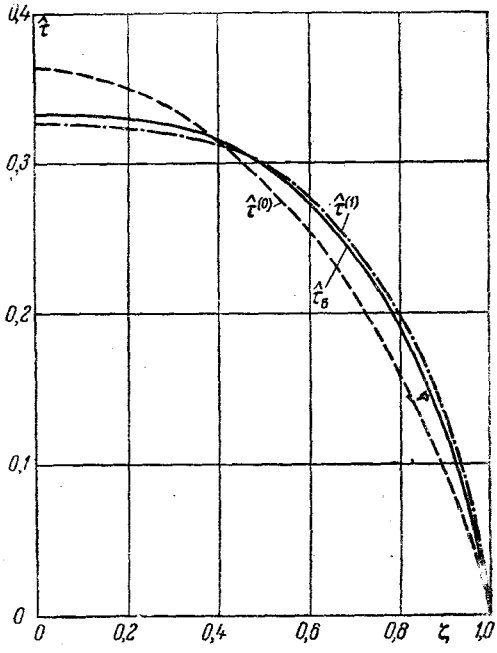


График функции $\tau\sqrt{x}=f(u)$ в первом приближении и точное решение Блязиуса ($\tau_Б$)

Определение решения этих уравнений в окрестности $x=0$ требует некоторых предположений относительно характера течения газа на внешней границе слоя в области малых значений x.

Пример расчета. Рассчитаем трение на плоской пластинке при $\rho\mu=\text{const}$. Уравнение количества движения в этом случае

$$\frac{d^2\hat{\tau}}{d\zeta^2}+\frac{\zeta}{2\hat{\tau}}=0; \qquad (22)$$

$$\hat{\tau}\big|_{\zeta=1}=0;\quad \frac{d\hat{\tau}}{d\zeta}\Big|_{\zeta=0}=0.$$

Интегральное соотношение количества движения

$$\hat{\tau}_w=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\zeta(1-\zeta)}{\hat{\tau}}\,d\zeta\ldots \qquad (23)$$

Вместо ζ вводится новая переменная z:

$$\zeta=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty e^{-z^2}dz;$$

$$d\zeta=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}dz.$$

Пусть

$$\hat{\tau}^{(0)} = Ae^{-z^2}. \tag{24}$$

Подставив (24) в (22), проинтегрировав дважды по ζ и удовлетворив граничным условиям, получим первое приближение к $\hat{\tau}$

$$\hat{\tau}^{(1)} = \int_{\zeta}^{1}\int_{0}^{\zeta} \frac{\zeta}{2\hat{\tau}^{(0)}}\, d\zeta d\zeta =$$

$$= \frac{1}{A}\frac{2}{\pi}\left\{\int_{z}^{\infty} ze^{-z^2}dz - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{z}^{\infty} e^{-z^2}\left[\int_{0}^{z}\int_{z}^{\infty} e^{-z^2}dzdz\right]dz\right\}. \tag{25}$$

Для определения A в нулевом приближении подставим (24) в (23):

$$A^{(0)2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{z}^{\infty} e^{-z^2}dz\right)\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{z}^{\infty} e^{-z^2}dz\right)dz.$$

Отсюда

$$A^{(0)} = \tau_w^{(0)}\sqrt{x} = 0{,}363.$$

Для определения A в первом приближении подставим (25) в (23):

$$\frac{1}{A^{(1)}}\frac{2}{\pi}\left\{\int_{0}^{\infty} ze^{-z^2}dz - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-z^2}\left[\int_{0}^{z}\int_{z}^{\infty} e^{-z^2}dzdz\right]dz\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{z}^{\infty} e^{-z^2}dz\right)\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{z}^{\infty} e^{-z^2}dz\right)e^{-z^2}dz}{\frac{1}{A^{(1)}}\frac{2}{\pi}\left\{\int_{z}^{\infty} ze^{-z^2}dz - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{z}^{\infty} e^{-z^2}\left[\int_{0}^{z}\int_{z}^{\infty} e^{-z^2}dzdz\right]dz\right\}}.$$

Отсюда

$$A^{(1)} = 0{,}405; \quad \tau_w^{(1)}\sqrt{x} = 0{,}327,$$

т. е. получаем очень хорошее совпадение с точным решением, соответствующим решению Блязиуса (см. рисунок). Точное решение Блязиуса дает $\tau_w\sqrt{x} = 0{,}332$.