Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLIII, вып. 3, 1964 г.

УДК 517.947

ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

В. Г. Лабазин, Г. М. Федорова

1. Решение общей бигармонической задачи по методу Г. А. Гринберга заключается в следующем [1, 2].

Пусть требуется найти функцию $W(x, y)$, удовлетворяющую в области (D) бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 W = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0 \tag{1}$$

и на контуре (C) области (D) условиям

$$\left.\begin{aligned} W|_C &= f(s), \\ \left.\frac{\partial W}{\partial \nu}\right|_C &= g(s), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где s — длина дуги контура (C);

ν — внешняя нормаль к (C).

Допустим, что известна полная система функций $\psi_n(x, y)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, гармонических и ортонормированных в (D):

$$\Delta\psi_n(x, y) = 0; \tag{3}$$

$$\iint_D \psi_n(x, y)\,\psi_k(x, y)\,d\sigma = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 1 & n = k. \end{cases} \tag{4}$$

Положим

$$\Delta W = \tag{5}$$

и будем искать U в виде ряда по функциям $\psi_n(x, y)$

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \psi_k(x, y). \tag{6}$$

В силу условия ортонормировки (4) для коэффициентов ряда (6) имеем формулы

$$a_k = \iint_D U\psi_k d\sigma.$$

Подставив сюда (5), получим

$$a_k = \iint_D \Delta W \psi_k d\sigma. \tag{7}$$

Применяя к этому равенству формулу Грина и замечая, что $\Delta\psi_k = 0$, согласно (3), получим

$$\iint\limits_D \Delta W \psi_k d\sigma = \int\limits_C \left(\psi_k \frac{\partial W}{\partial \nu} - W \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} \right) ds.$$

Таким образом, коэффициенты (7) находятся по формуле

$$a_k = \int\limits_C \left(\psi_k \frac{\partial W}{\partial \nu} - W \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} \right) ds. \tag{8}$$

Подставив в нее значения W и $\frac{\partial W}{\partial \nu}$ на контуре (C) из условий (2), получим

$$a_k = \int\limits_C \left[g(s) \psi_k - f(s) \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} \right] ds. \tag{9}$$

Итак, коэффициенты ряда (6) и, следовательно, функция U вполне определены.

Далее, как указывает Г. А. Гринберг, функция W находится из уравнения (5) решением задачи Дирихле или Неймана с использованием одного из условий (2).

2. В настоящей статье предлагается решать вторую часть задачи — определение W из (5) — непосредственно с помощью формулы Грина.

Как известно, при весьма общих предположениях относительно функции W справедливо соотношение

$$W = \frac{1}{2\pi} \int\limits_C \left[W \frac{\partial \ln r}{\partial \nu} - \ln r \frac{\partial W}{\partial \nu} \right] ds + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_D \Delta W \ln r d\sigma. \tag{10}$$

На контуре (C) значения W и $\frac{\partial W}{\partial \nu}$ заданы условиями (2). Далее, выражение $\Delta W = U$, согласно (6), тоже является известной функцией, если определены коэффициенты a_k по формулам (9). Поэтому (10) можно записать в виде

$$W = \frac{1}{2\pi} \int\limits_C \left[f(s) \frac{\partial \ln r}{\partial \nu} - g(s) \ln r \right] ds + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_D U \ln r d\sigma. \tag{11}$$

Криволинейный интеграл в (11) выражен через заданные функции $f(s)$ и $g(s)$. В двойном интеграле функция U представляется в виде ряда (6), коэффициенты которого также выражены по формулам (9) через функции $f(s)$ и $g(s)$.

Таким образом, решение бигармонической задачи дается формулой (11).

3. Применим изложенный прием к решению бигармонической задачи для круга.

Пусть требуется найти функцию $W(\rho, \varphi)$, бигармоническую в круге радиуса a и удовлетворяющую условиям

$$\left.\begin{aligned} W|_{\rho=a} &= f(\varphi); \\ \left.\frac{\partial W}{\partial \nu}\right|_{\rho=a} &= g(\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

В качестве полной системы ортонормированных гармонических функций берем следующие:

$$\left.\begin{aligned} \psi_0 &= N_0; \\ \psi_k^{(1)} &= N_k \rho^k \cos k\varphi; \\ \psi_k^{(2)} &= N_k \rho^k \sin k\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где

$$\left.\begin{aligned} N_0^2 &= \frac{1}{\pi a^2}; \\ N_k^2 &= \frac{2(k+1)}{\pi a^{2(k+1)}}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Согласно формулам (5) и (6), ΔW имеет вид

$$\Delta W = a_0\psi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k^{(1)} + b_k\psi_k^{(2)}, \tag{15}$$

где a_0, a_k и b_k определяются формулами (9), которые в данном случае дают следующий результат:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= N_0 a \int_0^{2\pi} g(\varphi)\, d\varphi; \\ a_k &= N_k a^k \int_0^{2\pi} [ag(\varphi) - kf(\varphi)] \cos k\varphi d\varphi; \\ b_k &= N_k a^k \int_0^{2\pi} [ag(\varphi) - kf(\varphi)] \sin k\varphi d\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Используя (15) и изменяя порядок интегрирования и суммирования, находим

$$\iint_D \Delta W \ln r d\sigma = N_0 a_0 A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} N_k (a_k A_k + b_k B_k), \tag{17}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \iint_D \ln r d\sigma; \\ A_k &= \iint_D \rho^k \cos k\varphi \ln r d\sigma; \\ B_k &= \iint_D \rho^k \sin k\varphi \ln r d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

В выражениях (18) величина r есть расстояние от фиксированной точки $M_0(\rho_0, \varphi_0)$ круга до переменной точки $M(\rho, \varphi)$.

Очевидно, что

$$\ln r = \frac{1}{2} \ln [\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2].$$

Подставив это выражение в формулы (18) и вычисляя двойные интегралы, получим:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \pi a^2 \ln a - \frac{\pi}{2}(a^2 - \rho_0^2); \\ A_k &= \frac{\pi}{2} \rho_0^k \cos k\varphi_0 \left(\frac{\rho_0^2}{k+1} - \frac{a^2}{k}\right); \\ B_k &= \frac{\pi}{2} \rho_0^k \sin k\varphi_0 \left(\frac{\rho_0^2}{k+1} - \frac{a^2}{k}\right). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Далее, в формулу (17) подставим коэффициенты (16), выражения (19) и величины (14). Изменяя порядок интегрирования и суммирования, найдем

$$\iint_D \Delta W \ln r d\sigma = \left[\ln a - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho_0^2}{a^2}\right)\right] a \int_0^{2\pi} g(\varphi)\, d\varphi +$$

$$+ a \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho_0}{a}\right)^k \left[\frac{\rho_0^2}{a^2} - \frac{k+1}{k}\right] \cos k(\varphi - \varphi_0)\, d\varphi -$$

$$- \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho_0}{a}\right)^k \left[k \frac{\rho_0^2}{a^2} - (k+1)\right] \cos k(\varphi - \varphi_0)\, d\varphi.$$

Суммируя ряды, получим

$$\iint_D \Delta W \ln r d\sigma = \left[a^2 \ln a - \frac{1}{2}(a^2 - \rho_0^2)\right] \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} g(\varphi)\, d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \left\{(a^2 - \rho_0^2) \frac{-a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2}{a^2 - 2a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{2} \ln \frac{a^2 - 2a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2}{a^2}\right\} d\varphi + \int_0^{2\pi} f(\varphi) \left\{\frac{a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) - \rho_0^2}{a^2 - 2a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{a^2 - \rho_0^2}{a} \cdot \frac{(a^2\rho_0 + \rho_0^3)\cos(\varphi - \varphi_0) - 2a\rho_0^2}{[a^2 - 2a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2]^2}\right\} d\varphi. \qquad (20)$$

Переходим к вычислению криволинейного интеграла в формуле (11).

В данном случае

$$\ln r = \frac{1}{2} \ln [a^2 - 2a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2].$$

Далее находим

$$\frac{\partial \ln r}{\partial \nu} = \frac{a - \rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{a^2 - 2a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2}.$$

Используя эти выражения, получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_C \left[f(s) \frac{\partial \ln r}{\partial \nu} - g(s) \ln r\right] ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{f(\varphi) \frac{a^2 - a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{a^2 - 2a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{a}{2} g(\varphi) \ln [a^2 - 2a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2]\right\} d\varphi. \qquad (21)$$

Подставив (20) и (21) в формулу (11), получим решение бигармонической задачи для круга в виде

$$W(\rho_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(a^2 - \rho_0^2)^2}{a} \int_0^{2\pi} \left\{f(\varphi) \frac{a - \rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{[a^2 - 2a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2]^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} g(\varphi) \frac{1}{a^2 - 2a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2}\right\} d\varphi. \qquad (22)$$

В качестве примера рассмотрим бигармоническую задачу для круга со следующими граничными условиями:

$$W\Big|_C = a^2, \quad \frac{\partial W}{\partial \nu}\Big|_C = 2a.$$

Полагая в (22) $f(\varphi) = a^2$, $g(\varphi) = 2a$ и вычисляя интеграл, найдем

$$W(\rho_0, \varphi_0) = \rho_0^2.$$

4. Аналогичным приемом может быть получено решение бигармонической задачи для полукруговой области.

Пусть дана полукруговая область (D) (рис. 1), $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ и $0 \leqslant \rho \leqslant a$. Требуется найти бигармоническую функцию $W(\rho, \varphi)$, удовлетворяющую на контуре (C) области (D) условиям:

$$W|_C = f(s) = \begin{cases} f_1(\rho) \text{ на } C_1; \\ f_2(\varphi) \text{ на } C_2; \\ f_3(\rho) \text{ на } C_3; \end{cases} \tag{23}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \nu}\Big|_C = g(s) = \begin{cases} g_1(\rho) \text{ на } C_1; \\ g_2(\varphi) \text{ на } C_2; \\ g_3(\rho) \text{ на } C_3, \end{cases} \tag{24}$$

где

$$C_1 : \varphi = 0 \quad 0 \leqslant \rho \leqslant a;$$
$$C_2 : \rho = a \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi;$$
$$C_3 : \varphi = \pi \quad 0 \leqslant \rho \leqslant a.$$

В качестве полной системы гармонических функций, ортонормированных в полукруговой области, возьмем следующие функции:

$$\left.\begin{aligned} \psi_0 &= N_0; \\ \psi_k &= N_k \rho^k \cos k\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

где

$$\left.\begin{aligned} N_0^2 &= \frac{2}{\pi a^2}; \\ N_k^2 &= \frac{4(k+1)}{\pi a^{2(k+1)}}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Аналогично (17) имеем

$$\iint_D \Delta W \ln r \, d\sigma = N_0 a_0 A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} N_k a_k A_k, \tag{27}$$

где величины a_0, a_k, A_0, A_k определяются равенствами:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= N_0 \int_0^a [g_1(\rho) + g_3(\rho)] \, d\rho + N_0 a \int_0^{\pi} g_2(\varphi) \, d\varphi; \\ a_k &= N_k \int_0^a \rho^k [g_1(\rho) + (-1)^k g_3(\rho)] \, d\rho + \\ &+ N_k a^k \int_0^{\pi} [a g_2(\varphi) - k f_2(\varphi)] \cos k\varphi \, d\varphi; \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{\pi}{2} a^2 \ln a - \frac{\pi}{4}(a^2 - \rho_0^2); \\ A_k &= \frac{1}{2} \int_0^{\rho_0} \rho^{k+1} \left[J_k^{(C)}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \cos k\varphi_0 - J_k^{(s)}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \sin k\varphi_0 \right] d\rho + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\rho_0}^{a} \rho^{k+1} \left[J_k^{(C)}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \cos k\varphi_0 - J_k^{(s)}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \sin k\varphi_0 \right] d\rho. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Величины $J_k^{(C)}$, $J_k^{(s)}$ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} J_k^{(C)}(p) &= \int_0^{\pi} \ln(1 - 2p\cos t + p^2)\cos kt\,dt = -\pi\frac{p^k}{k}; \\ J_k^{(s)}(p) &= \int_0^{\pi} \ln(1 - 2p\cos t + p^2)\sin kt\,dt. \\ & (p^2 < 1) \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Далее находим криволинейный интеграл в формуле (11)

$$\int_C \left[f(s)\frac{\partial \ln r}{\partial \nu} - g(s)\ln r\right] ds =$$

$$= \int_0^a \left\{\rho_0 \sin\varphi_0 \left[\frac{f_1(\rho)}{\rho_0^2 - 2\rho_0\rho\cos\varphi_0 + \rho^2} + \frac{f_3(\rho)}{\rho_0^2 + 2\rho_0\rho\cos\varphi_0 + \rho^2}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left[g_1(\rho)\ln(\rho_0^2 - 2\rho_0\rho\cos\varphi_0 + \rho^2) + g_3(\rho)\ln(\rho_0^2 + 2\rho_0\rho\cos\varphi_0 + \rho^2)\right]\right\} d\rho +$$

$$+ \int_0^{\pi} \left\{f_2(\varphi)\frac{a - \rho_0\cos(\varphi - \varphi_0)}{a^2 - 2a\rho_0\cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} g_2(\varphi)\ln[a^2 - 2a\rho_0\cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2]\right\} a\,d\varphi. \tag{31}$$

Подставив (27) и (31) в формулу (11), получим решение задачи в виде ряда, коэффициенты которого определяются формулами (28), (29), (30). Суммирование этого ряда затруднено громоздким выражением интеграла $J_k^{(s)}(p)$.

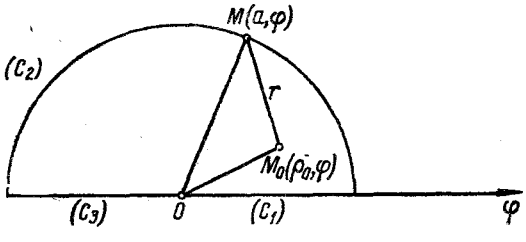


Рис. 1

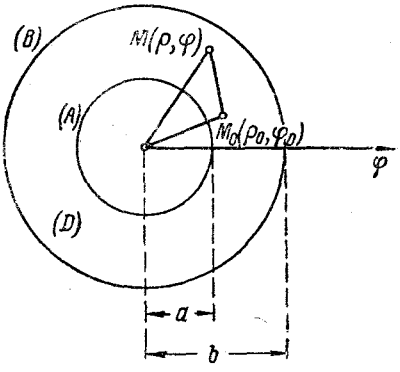


Рис. 2

5. Рассмотрим бигармоническую задачу для области, ограниченной концентрическими окружностями.

В этом случае область (D) представляет собой кольцо, внутренний радиус которого равен a, внешний b (рис. 2). Контур (C) состоит из двух кривых: внутренней окружности (A) и внешней (B).

Требуется найти бигармоническую функцию $W(\rho, \varphi)$, удовлетворяющую на контуре $(C) = (A) + (B)$ условиям:

$$\left.\begin{aligned} & W|_A = f_A(\varphi), \quad W|_B = f_B(\varphi); \\ & \frac{\partial W}{\partial \nu}\Big|_A = g_A(\varphi), \quad \frac{\partial W}{\partial \nu}\Big|_B = g_B(\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

В качестве исходной системы функций, ортонормальных в кольце, возьмем функции (13) со следующими нормирующими множителями:

$$\left.\begin{aligned} N_0^2 &= \frac{1}{\pi (b^2 - a^2)}; \\ N_k^2 &= \frac{2 (k+1)}{\pi [b^{2(k+1)} - a^{2(k+1)}]}. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Двойной интеграл

$$\iint_D \Delta W \ln r d\sigma$$

находится в виде ряда (17)

$$\iint_D \Delta W \ln r d\sigma = N_0 a_0 A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} N_k^2 (a_k A_k + b_k B_k),$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= N_0 \int_0^{2\pi} [b g_B(\varphi) - a g_A(\varphi)]\, d\varphi; \\ a_k &= N_k \int_0^{2\pi} \{b^k [b g_B(\varphi) - k f_B(\varphi)] - a^k [a g_A(\varphi) + k f_A(\varphi)]\} \cos k\varphi d\varphi; \\ b_k &= N_k \int_0^{2\pi} \{b^k [b g_B(\varphi) - k f_B(\varphi)] - a^k [a g_A(\varphi) + k f_A(\varphi)]\} \sin k\varphi d\varphi; \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \pi (b^2 \ln b - a^2 \ln \rho_0) - \frac{\pi}{2} (b^2 - \rho_0^2); \\ A_k &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{\rho_0^k} \cdot \frac{a^{2(k+1)}}{k (k+1)} + \rho_0^k \left(\frac{\rho_0^2}{k+1} - \frac{b^2}{k}\right)\right] \cos k\varphi_0; \\ B_k &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{\rho_0^k} \cdot \frac{a^{2(k+1)}}{k (k+1)} + \rho_0^k \left(\frac{\rho_0^2}{k+1} - \frac{b^2}{k}\right)\right] \sin k\varphi_0. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Вычисляя криволинейный интеграл формулы (11), получим

$$\int_C \left[f(s) \frac{\partial \ln r}{\partial \nu} - g(s) \ln r\right] ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{f_B(\varphi) \frac{b^2 - b\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{b^2 - 2b\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2} + f_A(\varphi) \frac{a^2 - a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{a^2 - 2a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2} - \right.$$

$$- \frac{b}{2} g_B(\varphi) \ln [b^2 - 2b\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2] +$$

$$\left. + \frac{a}{2} g_A(\varphi) \ln [a^2 - 2a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2]\right\} d\varphi.$$

Подставив этот интеграл и интеграл (17) с коэффициентами (34) и (35) в формулу (11), найдем решение бигармонической задачи для кольца

$$W(\rho_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f_B(\varphi) F_B(\varphi) + f_A(\varphi) F_A(\varphi) -$$

$$- \frac{b}{2} g_B(\varphi) G_B(\varphi) - \frac{a}{2} g_A(\varphi) G_A(\varphi)]\, d\varphi. \tag{36}$$

Функции $F_B(\varphi)$, $F_A(\varphi)$, $G_B(\varphi)$, $G_A(\varphi)$ имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} F_B(\varphi) &= \frac{b^2 - b\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{b^2 - 2b\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2} - S_1; \\ F_A(\varphi) &= \frac{a^2 - a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{a^2 - 2a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2} - S_2; \\ G_B(\varphi) &= \ln[b^2 - 2b\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2] - \\ &\quad - 2(N_0^2 A_0 + S_3); \\ G_A(\varphi) &= -\ln[a^2 - 2a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2] + \\ &\quad + 2(N_0^2 A_0 + S_4), \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

где S_1, S_2, S_3, S_4 есть ряды вида

$$S_1 = a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^k \left(\frac{a}{\rho_0}\right)^k}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2(k+1)}} \cos k(\varphi - \varphi_0) -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho_0}{b}\right)^k}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2(k+1)}} \cos k(\varphi - \varphi_0) -$$

$$- \left(1 - \frac{\rho_0^2}{b^2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho_0}{b}\right)^k}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2(k+1)}} k \cos k(\varphi - \varphi_0);$$

$$S_2 = a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{2k} \left(\frac{a}{\rho_0}\right)^k}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2(k+1)}} \cos k(\varphi - \varphi_0) -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho_0}{b}\right)^k \left(\frac{a}{b}\right)^k}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2(k+1)}} \cos k(\varphi - \varphi_0) -$$

$$- \left(1 - \frac{\rho_0^2}{b^2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho_0}{b}\right)^k \left(\frac{a}{b}\right)^k}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2(k+1)}} k \cos k(\varphi - \varphi_0);$$

$$S_3 = a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^k \left(\frac{a}{\rho_0}\right)^k}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2(k+1)}} \frac{\cos k(\varphi - \varphi_0)}{k} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho_0}{b}\right)^k}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2(k+1)}} \frac{\cos k(\varphi - \varphi_0)}{k} -$$

$$- \left(1 - \frac{\rho_0^2}{b^2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho_0}{b}\right)^k}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2(k+1)}} \cos k(\varphi - \varphi_0);$$

$$S_4 = a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{2k}\left(\frac{a}{\rho_0}\right)^k}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2(k+1)}} \frac{\cos k(\varphi-\varphi_0)}{k} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho_0}{b}\right)^k\left(\frac{a}{b}\right)^k}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2(k+1)}} \frac{\cos k(\varphi-\varphi_0)}{k} -$$

$$-\left(1-\frac{\rho_0^2}{b^2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho_0}{b}\right)^k\left(\frac{a}{b}\right)^k}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2(k+1)}} \cos k(\varphi-\varphi_0).$$

Эти ряды аналогичны соответствующим рядам, представляющим решение задачи Дирихле для кольца. Они могут быть просуммированы при привлечении эллиптических функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г. А. О решении плоской задачи теории упругости и задачи об изгибе тонкой плиты с закрепленным контуром. ДАН СССР, т. XXVI, 1951.

2. Гринберг Г. А., Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. Метод решения общей бигармонической задачи для прямоугольной области при задании на контуре значений функции и ее нормальной производной. Прикл. матем. и механ., т. XVII, вып. 1, 1953.