Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова т. XLIII, вып. 3, 1964 г.

УДК 519.28

О ВЕРОЯТНОСТИ ПОВТОРЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

М. Л. Вержбинский

I. В 1954 г. в соавторстве с О. В. Сармановым и Р. Э. Соловейчиком автором была поставлена следующая стохастическая задача[1]. Пусть некоторое элементарное событие (сигнал A) появляется в каждом опыте серии испытаний с вероятностью p (вообще говоря зависящей от номера опыта) и не появляется (сигнал $\overline{A}$) с вероятностью $q=1-p$. Какова вероятность того, что заданная конфигурация последовательно следующих друг за другом сигналов A и $\overline{A}$ осуществится в серии m испытаний *хотя бы один раз?*

Эта задача была решена для трех конкретных типов конфигураций в схеме Бернулли и в схеме однородной цепи Маркова.

В настоящей статье рассматриваются два обобщения вопроса.

1. Отыскивается вероятность появления заданной конфигурации сигналов в серии m испытаний ровно k раз или не более (не менее) k раз.

2. Исследуется тот же вопрос, но при условии, что исходы некоторых определенных опытов в серии n испытаний заранее известны (детерминированы).

Обе задачи решаются в схеме Бернулли. Первая — для конфигурации самого общего вида, вторая — для случая одной конкретной последовательности сигналов.

II. Пусть вероятности сигналов A и $\overline{A}$ постоянны (не зависят от номера опыта):

$$P(A)=p, \quad P(\overline{A})=q, \quad p+q=1.$$

Заданная конфигурация n сигналов представляется формой

$$\varphi_n(A, \overline{A})=A_1A_2\ldots A_n, \tag{1}$$

где A_j есть A или $\overline{A}$; $j=1, 2, \ldots, n$; $n\leqslant m$.

Будем называть частичной конфигурацией форму

$$\varphi_i=(A, \overline{A})=A_1A_2\ldots A_i, \tag{2}$$

где $i<n$.

[1] Вержбинский М. Л., Сарманов О. В., Соловейчик Р. Э. О вероятности сильно флуктуирующих величин. Зап. ЛГИ, 1954, т. XXIX, вып. 3.

Символ $\delta(A_j)$ определяется соотношением

$$\delta(A_j) = \begin{cases} 1 & \text{если } A_j = A; \\ 0 & \text{„ } A_j = \overline{A}. \end{cases} \tag{3}$$

Очевидно,

$$\delta(A_j) + \delta(\overline{A}_j) \equiv 1. \tag{4}$$

Вероятность $P(A_j)$ сигнала, стоящего на j-м месте в конфигурации (1), выражается суммой

$$P(A_j) = p\delta(A_j) + q\delta(\overline{A}_j). \tag{5}$$

Заменяя в формуле (2) сигналы A и $\overline{A}$ их вероятностями, получим

$$\varphi_i(p,\ q) = P(A_1)\,P(A_2)\ldots P(A_i), \tag{6}$$

где, согласно (5), $P(A_j) = p$ или q.

Положим для удобства

$$\varphi_0(p,\ q) = 1. \tag{7}$$

Не нарушая общности рассуждений, можно условиться, что первый сигнал в заданной конфигурации (1)

$$A = A_1. \tag{8}$$

III. $V(m,\ k)$ — событие, состоящее в появлении конфигурации $\varphi_n(A,\ \overline{A})$ в серии m испытаний равно k раз (если $A_n = A$, два соседних появления могут иметь общий граничный элемент); $P(m,\ k)$ — вероятность события $V(m,\ k)$; $V_{A_j}(m,\ k)$ — событие, состоящее в осуществлении $V(m,\ k)$ при условии, что исходом первого испытания в серии m опытов является Δ_j; $P_A(m,\ k)$ — вероятность $V_{A_j}(m,\ k)$.

Введем частные обозначения

$$P_A(m,\ k) = P_+(m,\ k) \quad \text{и} \quad P_{\overline{A}}(m,\ k) = P_-(m,\ k).$$

На основании (8) и очевидного соотношения

$$P(m,\ k) = P_+(m,\ k) + P_-(m,\ k) \tag{9}$$

получаем:

$$P_-(m,\ k) = qP(m-1,\ k); \tag{10}$$

$$P_+(m,\ k) = P(m,\ k) - qP(m-1,\ k), \tag{11}$$

откуда

$$P_{A_j}(m,\ k) = \delta(A_j)\,P_+(m,\ k) + \delta(\overline{A}_j)\,P_-(m,\ k)$$

или

$$P_{A_j}(m,\ k) = \delta(A_j)\,P(m,\ k) - q[\delta(A_j) - \delta(\overline{A}_j)]\,P(m-1,\ k). \tag{12}$$

IV. Событие $V(m,\ k)$ разбивается на $n+1$ частных случаев по конструктивной схеме, приведенной в табл. 1.

Таблица 1

Номер частного случая	Конструкция частного случая	Вероятность частного случая
1	$V_{\overline{A}_1}(m, k)$	$\varphi_0(p, q) P_{\overline{A}_1}(m, k)$
2	$A_1 \& V_{\overline{A}_2}(m-1, k)$	$\varphi_1(p, q) P_{\overline{A}_2}(m-1, k)$
3	$A_1 \& A_2 \& V_{\overline{A}_3}(m-2, k)$	$\varphi_2(p, q) P_{\overline{A}_3}(m-2, k)$
. . .	. . . . .	. . . . .
$i+1$	$A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_i \& V_{\overline{A}_{i+1}}(m-i, k)$	$\varphi_i(p, q) P_{\overline{A}_{i+1}}(m-i, k)$
. . .	. . . . .	. . . . .
n	$A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_{n-1} \& V_{\overline{A}_n}(m-n+1, k)$	$\varphi_{n-1}(p, q) P_{\overline{A}_n}(m-n+1, k)$
$n+1$	$A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_{n-1} \& V_{\overline{A}_n}(m-n+1, k-1)$	$\varphi_{n-1}(p, q) P_{\overline{A}_n}(m-n+1, k-1)$

Суммируя вероятности частных случаев, получим полную вероятность $P(m, n)$ события $V(m, n)$. Опираясь на соотношения (4), (5), (8) и (12), после соответствующих выкладок приходим к уравнению в конечных разностях

$$P(m, k) + \sum_{i=1}^{n-1} [\varphi_i(p, q)\delta(A_{i+1}) - \varphi_{i-1}(p, q)\delta(A_i)] P(m-i, k) + [\varphi_n(p, q) - \varphi_{n-1}(p, q)\delta(A_n)] P(m-n, k) = \varphi_{n-1}(p, q)\delta(A_n) P(m-n+1, k-1) + [\varphi_n(p, q) - \varphi_{n-1}(p, q)\delta(A_n)] P(m-n, k-1). \quad (13)$$

Если положить $m-n=x$, уравнение (13) приводится к форме

$$P(x+n, k) + \sum_{i=1}^{n-1} [\varphi_i(p, q)\delta(A_{i+1}) - \varphi_{i-1}(p, q)\delta(A_i)] \times P(x+n-i, k) + [\varphi_n(p, q) - \varphi_{n-1}(p, q)\delta(A_n)] P(x, k) = \varphi_{n-1}(p, q)\delta(A_n) P(x+1, k-1) + [\varphi_n(p, q) - \varphi_{n-1}(p, q)\delta(A_n)] P(x, k-1). \quad (14)$$

V. Если функцию $P(x, k-1)$ считать известной, с помощью уравнения (14) определяется функция $P(x, k)$. Полагая последовательно $k=1, 2, \ldots$, получим систему неоднородных линейных уравнений в конечных разностях с постоянными коэффициентами. Уравнение этой системы, соответствующее $k=1$, имеет вид

$$P(x+n, 1) + \sum_{i=1}^{n-1} [\varphi_i(p, q)\delta(A_{i+1}) - \varphi_{i-1}(p, q)\delta(A_i)] P(x+n-i, 1) + [\varphi_n(p, q) - \varphi_{n-1}(p, q)\delta(A_n)] P(x, 1) = \varphi_{n-1}(p, q)\delta(A_n) P(x+1, 0) + [\varphi_n(p, q) - \varphi_{n-1}(p, q)\delta(A_n)] P(x, 0). \quad (15)$$

Для определения $P(x, 1)$ необходимо знать функцию $P(x, 0)$, выражающую вероятность события $V(x, 0)$, состоящего в том, что при x испытаниях конфигурация $\varphi_n(A, \overline{A})$ ни разу не появится ($k=0$). Уравнение для функции $P(x, 0)$ получается суммированием вероятностей

частных случаев события $V(x, 0)$. Последнее разбивается на n частных случаев в соответствии с конструктивной схемой табл. 2.

Таблица 2

Номер частного случая	Конструкция частного случая	Вероятность частного случая
1	$V_{\overline{A}_1}(m, 0)$	$\varphi_0(p, q) P_{\overline{A}_1}(m, 0)$
2	$A_1 \& V_{\overline{A}_2}(m-1, 0)$	$\varphi_1(p, q) P_{\overline{A}_2}(m-1, 0)$
3	$A_1 \& A_2 \& V_{\overline{A}_3}(m-2, 0)$	$\varphi_2(p, q) P_{\overline{A}_3}(m-2, 0)$
. . .	. . . . .	. . . . .
$i+1$	$A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_i \& V_{\overline{A}_{i+1}}(m-i, 0)$	$\varphi_i(p, q) P_{\overline{A}_{i+1}}(m-i, 0)$
. . .	. . . . .	. . . . .
n	$A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_{n-1} \& V_{\overline{A}_n}(m-n+1, 0)$	$\varphi_{n-1}(p, q) P_{\overline{A}_n}(m-n+1, 0)$

После необходимых выкладок и замены $m-n=x$ приходим к однородному линейному уравнению в конечных разностях, описывающему функцию

$$P(x+n, 0) + \sum_{i=1}^{n-1} [\varphi_i(p, q)\delta(A_{i+1}) - \varphi_{i-1}(p, q)\delta(A_i)] P(x+n-i, 0) + \\ + [\varphi_n(p, q) - \varphi_{n-1}(p, q)\delta(A_n)] P(x, 0) = 0. \quad (16)$$

Коэффициенты в левых частях уравнений (14) и (16) совпадают. Положив

$$P(x, -1) = 0, \quad (17)$$

получим *полную рекурсивную систему* конечно-разностных линейных уравнений, описывающих функции $P(x, k)$ при $k=1, 2, \ldots$,

$$P(x+n, k) + \sum_{i=1}^{n-1} [\varphi_i(p, q)\delta(A_{i+1}) - \varphi_{i-1}(p, q)\delta(A_i)] \times \\ \times P(x+n-i, k) + [\varphi_n(p, q) - \varphi_{n-1}(p, q)\delta(A_n)] P(x, k) = \\ = \varphi_{n-1}(p, q)\delta(A_n) P(x+1, k-1) + [\varphi_n(p, q) - \varphi_{n-1}(p, q)\delta(A_n)] \times \\ \times P(x, k-1), \quad (18)$$

где $k=0, 1, 2, \ldots$

Начальное уравнение полной системы, т. е. уравнение, соответствующее $k=0$, однородное.

Характеристическое уравнение системы (18) имеет вид

$$\lambda^n + \sum_{i=1}^{n-1} [\varphi_i(p, q)\delta(A_{i+1}) - \varphi_{i-1}(p, q)\delta(A_i)] \lambda^{n-i} + \\ + [\varphi_n(p, q) - \varphi_{n-1}(p, q)\delta(A_n)] = 0. \quad (19)$$

VI. Для получения решения полной рекурсивной системы необходимо располагать начальными условиями. Естественные начальные условия, вытекающие из стохастического смысла функции $P(x, k)$, выражаются равенствами:

1) для $k=0$ (начальное уравнение)

$$P(0, 0) = P(1, 0) = P(2, 0) = \ldots = P(n-1, 0) = 1; \quad (20)$$

2) для $x=0, 1, \ldots, n-1$

$$P(0, k) = P(1, k) = P(2, k) = \ldots = P(n-1, k) = 0. \quad (21)$$

Однако для каждого фиксированного значения $k \geqslant 1$ соотношения (21) не исчерпывают всех случаев, когда функция $P(x, k)$ á priori равна нулю. Выполняются более общие условия

$$P(0, k) = P(1, k) = P(2, k) = \ldots = P(n-1, k) = P(n, k) = \ldots = \\ = P[(k(n-1), k] = 0^*. \qquad (22)$$

Легко показать, что вероятность $P(x, \leqslant k)$ события $V(x, \leqslant k)$, состоящего в появлении конфигурации $\varphi_n(A, \bar{A})$ при их испытаниях, *не более чем k раз* описывается той же полной рекурсивной системой (18). Начальные условия при любом $k \geqslant 0$

$$P(0, \leqslant k) = P(1, \leqslant k) = \ldots = P(n-1, \leqslant k) = 1. \qquad (23)$$

Эти условия не могут быть расширены [в смысле соотношений (22)].

Определив вероятность события $V(x, \leqslant k)$, легко найти вероятность события $V(x, \geqslant k)$, состоящего в том, что при испытаниях конфигурация $\varphi_n(A, \bar{A})$ появится *не менее k раз*. Действительно, вероятности $P(x, \leqslant k)$ и $P(x, \geqslant k)$ событий $V(x, \leqslant k)$ и $V(x, \geqslant k)$ связаны очевидным соотношением

$$P(x, \leqslant k) + P(x, \geqslant k+1) = 1. \qquad (24)$$

VII. Пусть $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ — линейно независимые частные решения начального уравнения полной рекурсивной системы (18). Так как начальное уравнение однородно, эти решения находятся с помощью характеристического уравнения (19). Тогда

$$P(x, 0) = P(x, \leqslant 0) = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(0)} u_i(x), \qquad (25)$$

где $C_i^{(0)}$ определены из начальных условий (20) или начальных условий (23) при $k = 0$ и выражаются в виде дробей

$$C_i^{(0)} = \frac{\begin{vmatrix} u_1(0) \ldots u_{i-1}(0)\, 1\, u_{i+1}(0) \ldots u_n(0) \\ u_1(1) \ldots u_{i-1}(1)\, u_{i+1}(1) \ldots u_n(1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1(n-1) \ldots u_{i-1}(n-1)\, 1\, u_{i+1}(n-1) \ldots u_n(n-1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1(0) \ldots u_{i-1}(0)\, u_i(0)\, u_{i+1}(0) \ldots u_n(0) \\ u_1(1) \ldots u_{i-1}(1)\, u_i(1)\, u_{i+1}(1) \ldots u_n(1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1(n-1) \ldots u_{i-1}(n-1)\, u_i(n-1)\, u_{i+1}(n-1) \ldots u_n(n-1) \end{vmatrix}}. \qquad (26)$$

Применяя метод Лагранжа, находим частное решение неоднородного уравнения полной рекурсивной системы (18) ($k \geqslant 1$)

$$f_{(k)}(x) = \varphi_{n-1}(p, q)\, \delta(A_n) \sum_{t=0}^{x-1} \Phi(t; x) P(t+1, k-1) + \\ + [\varphi_n(p, q) - \varphi_{n-1}(p, q)\, \delta(A_n)] \sum_{t=0}^{x-1} \Phi(t; x) P(t, k-1), \qquad (27)$$

где

$$\Phi(t; x) = \frac{\begin{vmatrix} u_1(t+1) \ldots u_n(t+1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1(t+n-1) \ldots u_n(t+n-1) \\ u_1(x) \ldots u_n(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1(t+1) \ldots u_n(t+1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1(t+n-1) \ldots u_n(t+n-1) \\ u_1(t+n) \ldots u_n(t+n) \end{vmatrix}}. \qquad (28)$$

* Предполагается, что два соседних появления $\varphi_n(A, \bar{A})$ могут иметь общий граничный элемент.

Полученное частное решение $f_{(k)}(x)$ представляет искомую функцию $P(x, k)$, так как удовлетворяет начальным условиям (21). Действительно, если $1 \leqslant x \leqslant n-1$, то при $t=0, 1, 2, \ldots, x-1$ одна из первых $n-1$ строк определителя в числителе (28) совпадает с последней строкой. Поэтому для любого $x \leqslant n-1$ каждое слагаемое правой части (27) равно нулю, откуда

$$f_{(k)}(0) = f_{(k)}(1) = \ldots = f_{(k)}(n-1) = 0.$$

Таким образом,

$$P(x, k) = f_{(k)}(x). \tag{29}$$

Далее, обращаем внимание на то, что функция $\Phi(t; x)$ обращается в нуль при t, пробегающем значения

$$x-n+1, \; x-n+2, \; \ldots, \; x-2, \; x-1.$$

Учитывая это обстоятельство, расширенные начальные условия (22), а также начальные условия (20), путем суммирования по частям правой части (27) приходим к окончательным рекуррентным соотношениям для функции $P(x, k)$:

$$P(x, 1) = \varphi_n(p, q) \sum_{t=0}^{n-1} \Phi(t; x) - \varphi_{n-1}(p, q)\,\delta(A_n)\,\Phi(n-1; x) + \\ + \sum_{t=0}^{x-n+1} \{\varphi_{n-1}(p, q)\,\delta(A_n)\,\Phi(t-1; x) + [\varphi_n(p, q) - \\ - \varphi_{n-1}(p, q)\,\delta(A_n)]\,\Phi(t; x)\}\,P(t, 0); \tag{30}$$

$$P(x, k) = \sum_{t=(k-1)(n-1)+1}^{x-n+1} \{\varphi_{n-1}(p, q)\,\delta(A_n)\,\Phi(t-1; x) + \\ + [\varphi_n(p, q) - \varphi_{n-1}(p, q)\,\delta(A_n)]\,\Phi(t; x)\}\,P(t, k-1). \quad (k > 1) \tag{31}$$

Формулы (25), (30) и (31) позволяют в принципе вычислить вероятности $P(x, k)$ для любых x и k.

VIII. Функция

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i(x) + f_{(k)}(x) \tag{32}$$

переходит в вероятность $P(x \leqslant k)$, если ее подчинить начальным условиям (23) и определить отсюда значения постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Преобразуем $f_{(k)}(x)$ [формула (27), где $P(x, k)$ заменена на $P(x, \leqslant k)$] путем суммирования по частям:

$$f_{(k)}(x) = [\varphi_n(p, q) - \varphi_{n-1}(p, q)\,\delta(A_n)]\,\Phi(0; x)\,P(0, \leqslant k-1) + \\ + \sum_{t=1}^{x-n+1} \{\varphi_{n-1}(p, q)\,\delta(A_n)\,\Phi(t-1; x) + [\varphi_n(p, q) - \\ - \varphi_{n-1}(p, q)\,\delta(A_n)]\,\Phi(t; x)\,P\}(t, \leqslant k-1)^*. \tag{33}$$

Так как справедливы утверждения о том, что, во-первых, при $x=0, 1, 2, \ldots, n-1$ сумма в правой части (33) пуста; во-вторых, $\Phi(0, 1) = \Phi(0, 2) = \ldots = \Phi(0, n-1) = 0$ и, в-третьих, $\Phi(0, 0) \neq 0$, искомые

---

* При этом используется ранее установленное свойство $\Phi(t; x)$: $\Phi(x-1; x) = \Phi(x-2; x) = \ldots = \Phi(x-n+1; x) = 0$.

значения постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ определяются из линейной системы

$$\left.\begin{aligned} &C_1u_1(0)+C_2u_2(0)+\ldots+C_nu_n(0)= \\ &\quad=1-[\varphi_n(p,\ q)-\varphi_{n-1}(p,\ q)\delta(A_n)]\,\Phi(0,\ 0) \\ &C_1u_1(1)+C_2u_2(1)+\ldots+C_nu_n(1)=1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &C_1u_1(n-1)+C_2u_2(n-1)+\ldots+C_nu_n(n-1)=1 \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Отсюда после очевидных выкладок находим

$$C_i=\frac{\begin{vmatrix} u_1(0)\ldots u_{i-1}(0)\ 1\ u_{i+1}(0)\ldots u_n(0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1(n-1)\ldots u_{i-1}(n-1)\,1\,u_{i+1}(n-1)\ldots u_n(n-1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1(0)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u_n(0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1(n-1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u_n(n-1) \end{vmatrix}}-$$

$$-(-1)^{n+i}[\varphi_n(p,\ q)-\varphi_{n-1}(p,\ q)\delta(A_n)]\times$$

$$\times\frac{\begin{vmatrix} u_1(1)\ldots u_{i-1}(1)\ u_{i+1}(1)\ldots u_n(1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1(n-1)\ldots u_{i-1}(n-1)\,u_{i+1}(n-1)\ldots u_n(n-1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1(1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u_n(1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1(n)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u_n(n) \end{vmatrix}}, \qquad (35)$$

и рекурентное соотношение для функции $P(x, \leqslant k)$ получает окончательную форму

$$P(x,\ \leqslant k)=\sum_{t=1}^{n}C_iu_i(x)+[\varphi_n(p,\ q)-\varphi_{n-1}(p,\ q)\delta(A_n)]\,\Phi(0;\ x)+$$

$$+\sum_{t=1}^{n-1}\{\varphi_{n-1}(p,q)\delta(A_n)\,\Phi(t-1;x)+[\varphi_n(p,q)-\varphi_{n-1}(p,q)\delta(A_n)]\,\Phi(t;x)\}+$$

$$+\sum_{t=n}^{x-n+1}\{\varphi_{n-1}(p,\ q)\delta(A_n)\,\Phi(t-1;\ x)+[\varphi_n(p,\ q)-$$

$$-\varphi_{n-1}(p,\ q)\delta(A_n)]\,\Phi(t;\ x)\}\,P(t,\ \leqslant k-1). \qquad (36)$$

Заметим, что для $x<2n-1$ последняя сумма пуста.

IX. Заканчивая разработку первого обобщения нашей задачи, остановимся на моментах случайной величины k [понимаемой в смысле, который она имеет при рассмотрении события $V(m,\ k)$].

Так как вероятность $P(m,\ k)$ при фиксированном m обращается в нуль, начиная с некоторого достаточно большого значения k, момент s-го порядка случайной величины k представляется функцией от m

$$M_s(m)=\sum_{k=0}^{\infty}k^sP(m,\ k). \qquad (37)$$

Умножаем уравнение (13) на k^s и суммируем по k от 0 до ∞. Принимая во внимание тождество

$$k^s=(k-1)^s+\sum_{j=0}^{s-1}C_s^j\,(k-1)^j \qquad (38)$$

и условие (17), приходим к конечно-разностному уравнению, описывающему моменты случайной величины,

$$M_s(m)+\sum_{i=1}^{n-2}[\varphi_i(p,\ q)\delta(A_{i+1})-\varphi_{i-1}(p,\ q)\delta(A_i)]\,M_s(m-i)-$$

$$-\varphi_{n-2}(p,\ q)\delta(A_{n-1})\,M_s(m-n+1)=\sum_{j=0}^{s-1}C_s^j\{\varphi_{n-1}(p,\ q)\delta(A_n)\times$$

$$\times M_j(m-n+1)+[\varphi_n(p,\ q)-\varphi_{n-1}(p,\ q)\delta(A_n)]\times$$

$$\times M_j(m-n)\,M_j(m-n)\}. \tag{39}$$

Рассмотрим конфигурацию $\varphi_n(A,\ \bar{A})$ одного специального вида. Пусть

$$\varphi_n^0(A,\ \bar{A})=\underbrace{A\bar{A}\ldots\bar{A}A}_{n-2}. \tag{40}$$

Таким образом, здесь предполагается, что

$$\delta(A_1)=\delta(A_n)=1 \text{ и } \delta(A_2)=\delta(A_3)=\ldots=\delta(A_{n-1})=0.$$

Уравнение (39) применительно к конфигурации $\varphi_n^0(A,\ \bar{A})$ упрощается:

$$M_s(m)-M_s(m-1)=\sum_{j=0}^{s-1}C_s^j\,[pq^{n-2}M_j(m-n+1)-$$

$$-pq^{n-1}M_j(m-n)]. \tag{41}$$

Из (41), в частности, легко выводится выражение математического ожидания k для случая конфигурации $\varphi_n^0(A,\ \bar{A})$

$$M_1(m)=\begin{cases}0 & \text{при } m<n\\ (m-n+1)p^2q^{n-2} & \text{при } m\geqslant n\end{cases} \tag{42}$$

Нетрудно найти и остальные моменты.

X. Второе обобщение нашей задачи проводим только для конфигурации $\varphi_n^0(A,\ \bar{A})$. При этом полная рекурсивная система должна принять вид

$$P(x+n,\ k)-P(x+n-1,\ k)+pq^{n-2}P(x+1,\ k)-$$

$$-pq^{n-1}P(x,\ k)=pq^{n-2}P(x+1,\ k-1)-pq^{n-1}P(x,\ k-1), \tag{43}$$

где $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ P(x,\ -1)=0$.

Характеристическое уравнение системы (43)

$$\lambda^n-\lambda^{n-1}+pq^{n-2}\lambda-pq^{n-1}=0. \tag{44}$$

Решается задача о нахождении вероятностей событий $V(m,\ k)$ или $V(m,\leqslant k)$ в ранее определенном смысле, но при условии, что в серии проводимых m испытаний исходы некоторых опытов (их номера известны) детерминированы: появляется элементарное событие A.

Пусть номера опытов, в которых A à priori должно наступить, будут

$$m_1,\ m_1+m_2-1,\ m_1+m_2+m_3-2,\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{s}m_i-(s-1).$$

При этом A осуществляется в начале и конце интервалов, содержащих $m_2,\ m_3,\ \ldots,\ m_s$ испытаний (конец предыдущего и начало последующего интервалов совпадают). Событие A не наступает в начале интервала, содержащего m_1 испытаний, если $m_1>1$ (но наступает в конце

его), и не наступает в конце интервала, содержащего $m - \sum_{i=1}^{s} m_i + (s-1)$ опытов, если $m > \sum_{i=1}^{s} m_i - (s-1)$ (но наступает в его начале).

Совокупность указанных непременных наступлений A образует *детерминированную сеть* $[m_1, m_2, \ldots, m_s]$. События $V(m, k)$, $V(m, \leqslant k)$ и их вероятности в условиях детерминированной сети обозначаются соответственно символами

$V(m; [m_1, m_2, \ldots, m_s]; k)$, $V(m; [m_1, m_2, \ldots, m_s]; \leqslant k)$, $P(m; [m_1, m_2, \ldots, m_s]; k)$ и $P(m; [m_1, m_2, \ldots, m_s]; \leqslant k]$.

Для случая конфигурации $\varphi_n^0(A, \bar{A})$ вероятность $P(m; [m_1, m_2, \ldots, m_s]; k)$ выражается через $P(m, k)$ точно так же, как $P(m; [m_1, m_2, \ldots, m_s]; \leqslant k)$ через $P(m, \leqslant k)$. Поэтому достаточно изучить лишь связь между $P(m; [m_1, \ldots, m_s]; k)$ и $P(m, k)$. Заменой всех вхождений $P(m, k)$ на $P(m, \leqslant k)$ получим выражение и для вероятности $P(m; [m_1, \ldots, m_s]; \leqslant k)$.

XI. Введем частные обозначения:

$V_+(m, k)$ — событие $V(m, k)$, если исходом первого испытания явится A;

$V_-(m, k)$ — событие $V(m, k)$, если исходом первого испытания явится $\bar{A}$;

$V^+(m, k)$ — событие $V(m, k)$, если исходом последнего испытания явится A;

$V^-(m, k)$ — событие $V(m, k)$, если исходом последнего испытания явится $\bar{A}$;

$V_+^+(m, k)$ — событие $V(m, k)$, если в первом и последнем испытаниях появляется A;

$V_+^-(m, k)$ — событие $V(m, k)$, если в первом опыте появляется A, а в последнем $\bar{A}$;

$V_-^+(m, k)$ — событие $V(m, k)$, если в первом опыте появляется $\bar{A}$, а в последнем A;

$V_-^-(m, k)$ — событие $V(m, k)$, если в начале и конце серии появляется событие $\bar{A}$.

При этом наступления A и $\bar{A}$ на том или ином конце серии понимаются в стохастическом смысле, т. е. как события, имеющие соответствующие вероятности меньшие единицы, но отнюдь не детерминированные.

Для обозначения вероятностей событий V_+, V_-, V_+^-, ... будем пользоваться аналогичной символикой: $P_+(m, k)$, $P_-(m, k)$, $P_+^-(m, k)$ и т. д.

В силу постоянства вероятностей A и $\bar{A}$ в каждом опыте и соображений симметрии имеем [см. (10) и (11)]:

$$P^-(m, k) = P_-(m, k) = qP(m-1, k); \tag{45}$$

$$P^+(m, k) = P_+(m, k) = P(m, k) - qP(m-1, k). \tag{46}$$

Так как

$$V_+(m, k) = V_+^+(m, k) \vee V_+^-(m, k)$$

и

$$V_-(m, k) = V_-^+(m, k) \vee V_-^-(m, k),$$

то

$$P_+(m, k) = P_+^+(m, k) + P_+^-(m, k) \tag{47}$$

и

$$P_-(m, k) = P_-^+(m, k) + P_-^-(m, k). \tag{48}$$

Но благодаря симметрии

$$P_{+}^{-}(m,\ k) = P_{-}^{+}(m,\ k),$$

откуда

$$P_{+}(m,\ k) - P_{-}(m,\ k) = P_{+}^{+}(m,\ k) - P_{-}^{-}(m,\ k). \tag{49}$$

Структура события $V_{-}^{-}(m,\ k)$ описывается формулой

$$V_{-}^{-}(m,\ k) = \overline{A}\ \&\ V(m-2,\ k)\ \&\ \overline{A}.$$

Поэтому

$$P_{-}^{-}(m,\ k) = q^2 P(m-2,\ k). \tag{50}$$

Из соотношений (45), (46), (49) и (50) вытекает

$$P_{+}^{+}(m,\ k) = P(m,\ k) - 2qP(m-1,\ k) + q^2 P(m-2,\ k). \tag{51}$$

Из (45), (48) и (50) следует

$$P_{+}^{-}(m,\ k) = P_{-}^{+}(m,\ k) = qP(m-1,\ k) - q^2 P(m-2,\ k). \tag{52}$$

XII. Пусть $V^{\oplus}(m,\ k)$ — событие $V(m,\ k)$ при условии, что в последнем опыте серии m испытаний появляется сигнал A с вероятностью, равной единице, т. е. детерминированно.

Вероятность события $V^{\oplus}(m,\ k)$ в соответствии с принятой нами символикой равна $P(m;\ [m];\ k)$.

Событие $V^{\oplus}(m,\ k)$ разбивается на n частных случаев по конструктивной схеме табл. 3 (знак DA символизирует детерминированное появление A).

Таблица 3

Номер частного случая	Конструкция частного случая	Вероятность частного случая
i $(i = 1, 2, \ldots, n-2)$	$V+(m-i,\ k)\ \&\ \underbrace{\overline{A}\ \&\ldots\&\ \overline{A}}_{i-1<n-2}\ \&\ DA$	$P^{+}(m-i,\ k)\,q^{i-1} = q^{i-1}P(m-i,\ k) - q^{i}P(m-i-1,\ k)$
$n-1$	$V+(m-n+1,\ k-1)\ \&\ \underbrace{\&\ \overline{A}\ \&\ldots\&\ A}_{n-2}\ \&\ DA$	$P^{+}(m-n+1,\ k-1)\,q^{n-2} = q^{n-2}P(m-n+1,\ k-1) - q^{n-1}P(m-n,\ k-1)$
n	$V^{-}(m-n+1,\ k)\ \&\ \underbrace{\overline{A}\ \&\ldots\&\ \overline{A}}_{n-2}\ \&\ DA$	$P^{-}(m-n+1,\ k)\,q^{n-2} = q^{n-1}P(m-n,\ k)$

Суммируя вероятности частных случаев, получаем вероятность события $V^{\oplus}(m,\ k)$

$$P(m;\ [m];\ k) = P(m-1,\ k) - q^{n-2}P(m-n+1,\ k) + q^{n-1}P(m-n,\ k) + q^{n-2}P(m-n+1,\ k-1) - q^{n-1}P(m-n,\ k-1). \tag{53}$$

Эта формула выражает также и вероятность события $V_{\oplus}(m,\ k)$, т. е. события $V(m,\ k)$ при условии, что сигнал A появляется в первом опыте детерминированно.

Пусть $V^{\oplus}_{\oplus}(m,\ k)$ — событие $V(m,\ k)$, если появление A в начале и конце серии m испытаний достоверно. Согласно принятой символике, вероятность события $V^{\oplus}_{\oplus}(m,\ k)$ есть $P(m;\ [1,\ m];\ k)$.

Событие $V^{\oplus}_{\oplus}(m,\ k)$ распадается на n^2-2 частных случая. В конструктивной схеме табл. 4 отмечаем их двузначными индексами вида $[i,\ j]$ и $[i,\ j]'$.

Таблица 4

Номер частного случая	Конструкция частного случая	Вероятность частного случая
$[i-1, j-1]$ $(i, j=1,$ $2,\ldots, n-2)$	$DA\,\&\,\underbrace{\overline{A}\,\&\ldots\&\,\overline{A}}_{i-1<n-2}\,\&\,V^{+}_{+}(m-i-j,\ k)\,\&$ $\&\,\underbrace{\overline{A}\,\&\ldots\&\,\overline{A}}_{j-1<n-2}\,\&\,DA$	$q^{i+j-2}P^{+}_{+}(m-i-j,\ k)$
$[n-2, j-1]$ $(j=1,2,\ldots$ $\ldots n-2)$	$DA\,\&\,\underbrace{\overline{A}\,\&\ldots\&\,\overline{A}}_{n-2}\,\&\,V^{+}_{+}(m-n+1-j,$ $k-1)\,\&\,\underbrace{\overline{A}\,\&\ldots\&\,A}_{j-1<n-2}\,\&\,DA$	$q^{n-3+j}P^{+}_{+}(m-n+1-j,\ k-1)$
$[n-2, j-1]'$ $(j=1,$ $2,\ldots, n-2)$	$DA\,\&\,\underbrace{\overline{A}\,\&\ldots\&\,\overline{A}}_{n-2}\,\&V^{+}_{-}(m-n+$ $+1-j, k)\,\&\,\underbrace{\overline{A}\,\&\ldots\&\,\overline{A}}_{j-1<n-2}\,\&\,DA$	$q^{n-3+j}P^{+}_{-}(m-n+1-j,\ k)$
$[i-1, n-2]$ $(i=1,$ $2,\ldots, n-2)$	$DA\,\&\,\underbrace{\overline{A}\,\&\ldots\&\,\overline{A}}_{i-1<n-2}\,\&V^{+}_{+}(m-n+1-i,$ $k-1)\,\&\,\underbrace{\overline{A}\,\&\ldots\&\,\overline{A}}_{n-2}\,\&\,DA$	$q^{n-3+i}P^{+}_{+}(m-n+1-i,\ k-1)$
$[i-1, n-2]'$ $(i=1,$ $2,\ldots, n-2)$	$DA\,\&\,\underbrace{\overline{A}\,\&\ldots\&\,\overline{A}}_{i-1<n-2}\,\&V^{-}_{+}(m-n+$ $+1-i, k)\,\&\,\underbrace{\overline{A}\,\&\ldots\&\,\overline{A}}_{n-2}\,\&\,DA$	$q^{n-3+i}P^{-}_{+}(m-n+1-i,\ k)$
$[n-2, n-2]$	$DA\,\&\,\underbrace{\overline{A}\,\&\ldots\&\,\overline{A}}_{n-2}\,\&\,V\,\&(m-n+2,$ $k-2)\,\&\,\underbrace{\overline{A}\,\&\ldots\&\,\overline{A}}_{n-2}\,\&\,DA$	$q^{2n-4}P^{+}_{+}(m-n+2,\ k-2)$
$[n-2, n-2]'$	$DA\,\&\,\underbrace{\overline{A}\,\&\ldots\&\,\overline{A}}_{n-2}\,\&V^{-}_{-}(m-n+2, k)\,\&$ $\&\,\underbrace{\overline{A}\,\&\ldots\&\,\overline{A}}_{n-2}\,\&\,DA$	$q^{2n-4}P^{-}_{-}(m-n+2,\ k)$

Используя формулы (50), (51) и (52), суммируем вероятности частных случаев и получаем вероятность события $V^{\oplus}_{\oplus}(m,\ k)$

$$P(m;\ [1,\ m];\ k)=P(m-2,\ k)+2q^{n-1}P(m-n-1,\ k)-$$
$$-q^{n-2}(2-q^n)\,P(m-n,\ k)-2q^{2n-3}P(m-2n+1,\ k)+$$
$$+q^{2n-4}P(m-2n+2,\ k)-2q^{n-1}P(m-n-1,\ k-1)+$$
$$+2q^{n-2}P(m-n,\ k-1)+2q^{2n-3}P(m-2n+1,\ k-1)-$$
$$-2q^{2n-4}P(m-2n+2,\ k-1)+q^{2n-2}P(m-n,\ k-2)-$$
$$-2q^{2n-3}P(m-n+1,\ k-2)+q^{2n-4}P(m-n+2,\ k-2). \qquad (54)$$

XIII. Детерминированная сеть $[m_1, m_2, \ldots, m_s]$ разбивает всю серию m испытаний, вообще говоря, на $s+1$ частных серий, длины которых (число испытаний в серии) равны соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_s, m_{s+1}$, где $m_{s+1} = m - \sum_{i=1}^{s} m_i + s$. В частных случаях число серий может быть меньше. Пусть r — число частичных серий, на которые детерминированная сеть разбивает серию m испытаний. Возможны три случая:

1) если $m_1 \neq 1$ и $m_{s+1} \neq 1$, то $r = s+1$;
2) если $m_1 = 1$ и $m_{s+1} \neq 1$ либо $m_1 \neq 1$ и $m_{s+1} = 1$, то $r = s$;
3) если $m_1 = 1$ и $m_{s+1} = 1$, то $r = s-1$.

Пусть неотрицательные целые $k_1, k_2, \ldots, k_r$ подчинены условию

$$\sum_{j=1}^{r} k_j = k, \tag{55}$$

где k — заданное целое, также неотрицательное.

События

$$V(m_1; [m_1]; k_1),\ V(m_2; [1, m_2]; k_2),\ \ldots,\ V(m_{r-1}; [1, m_{r-1}]; k_{r-1}),$$
$$V(m_r; [m_r]; k_r) \tag{56}$$

суть события независимые, если каждое из них относится к соответствующей частичной серии. Тогда событие $V(m; [m_1, \ldots, m_s]; k)$ осуществляется только в том случае, когда одновременно наступают события (56) при всевозможных комбинациях величин $k_1, \ldots, k_r$, связанных соотношением (55). Отсюда

$$P(m; [m_1, \ldots, m_s]; k) = \sum P(m_1; [m_1]; k_1) P(m_2;$$
$$[1, m_2]; k_2) \ldots P(m_{r-1}; [1, m_{r-1}]; k_{r-1}) P(m_r; [m_r]; k_r). \tag{57}$$

Последнее выражение при желании можно представить в форме многомерной суммы. Так, например, для первого случая

$$P(m; [m_1, \ldots, m_s]; k) = \sum_{k_1=0}^{k} P(m_i; [m_1]; k_1) \sum_{k_2=0}^{k-k_1} P(m_2;$$
$$[1, m_2]; k_2) \ldots \sum_{k_s=0}^{k-k_1-\ldots-k_{s-1}} P(m_s; [1, m_s]; k_s) P(m_{s+1}; [m_{s+1}];$$
$$k - k_1 - \ldots - k_s). \tag{58}$$