Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLIII, вып. 3, 1964 г.

УДК 519.28

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ФОРМУЛАХ ЧИСЛЕННЫХ КВАДРАТУР ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Л. С. Гандин, Р. Э. Соловейчик

Пусть имеется функция $f(\bar{x})$, являющаяся реализацией некоторой стационарной случайной функции. Требуется найти приближенное значение интеграла

$$J=\int_A^B f(\bar{x})\,d\bar{x}, \tag{1}$$

имея значения функции $f(\bar{x})$ лишь в отдельных точках отрезка (A, B). Для этой цели будем аппроксимировать интеграл J выражением

$$\tilde{J}=\sum_{i=1}^{n} p_i f(\bar{x}_i), \tag{2}$$

где абсциссы $\bar{x}_i$ и веса p_i пока неизвестны. Для их определения будем исходить из требования минимума среднего квадрата ошибки, возникающей при замене интеграла J линейной комбинацией $\tilde{J}$

$$E=\overline{(J-\tilde{J})^2}, \tag{3}$$

где черта сверху означает осреднение, понимаемое в смысле перехода к математическому ожиданию.

Для удобства будем рассматривать интеграл в пределах от —1 до 1

$$J=\int_{-1}^{1} f(x)dx, \tag{4}$$

к которому можно перейти элементарной заменой

$$\tilde{x}=\frac{1}{2}[(B+A)+(B-A)\,x], \tag{5}$$

и предположим, что среднее значение функции $f(x)$ в каждой точке равно нулю:

$$\overline{f(x)}=0.$$

Это, разумеется, не умаляет общности, так как соответствует рассмотрению отклонений функции $f(x)$ от ее математического ожидания.

В силу предположения о стационарности случайной функции ее корреляционная функция $\overline{f(x)\,f(y)}$ зависит только от расстояния $|x—y|$:

$$f(x)\,f(y) = m(0)\,\mu(|x-y|), \tag{6}$$

где $m(0)$ — дисперсия функции $f(x)$;

$\mu(\rho)$ — нормированная корреляционная функция, $\rho = |x-y|$.

Переходя в (2) к переменной x и подставляя (2) и (4) в (3), получим

$$E = \overline{\left[\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)\right]^2}.$$

Выполним здесь возведение в квадрат и используем соотношение (6), тогда, обозначая

$$\frac{E}{m(0)} = \varepsilon, \tag{7}$$

будем иметь

$$\varepsilon = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mu(|x-y|)\,dxdy - 2\sum_{i=1}^{n} p_i \int_{-1}^{1} \mu(|x-x|)\,dx + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_i p_j \mu(|x_i - x_j|). \tag{8}$$

Требование минимума величины ε приводит к условиям:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n); \tag{9}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{10}$$

Подставляя (8) в (9) и (10), получим соответственно

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \mu(|x_i - x_j|) = \int_{0}^{1+x_i} \mu(x)\,dx + \int_{0}^{1-x_i} \mu(x)\,dx \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{11}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial}{\partial x_i}\mu(|x_i - x_j|) = \mu(1+x_i) - \mu(1-x_i) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{12}$$

Выражения (11) и (12) представляют собой систему $2n$ уравнений для определения $2n$ искомых величин p_i и x_i. Если корреляционная функция $\mu(x)$ известна, то из этой системы могут быть найдены веса p_i и абсциссы x_i. Подставляя их в формулу (2), получим решение поставленной задачи.

При такой постановке задачи мы разыскивали как веса p_i, так и абсциссы x_i из требования минимизации квадрата ошибки (8). Возможны и другие варианты задачи. В частности, можно произвольным образом фиксировать абсциссы, а веса находить минимизацией выражения (8) или, наоборот, произвольно фиксировать веса, а абсциссы находить минимизацией выражения (8). Рассмотрим наиболее естественные задачи.

1. Абсциссы делят интервал интегрирования на равные части, причем концы интервала также являются точками деления. Веса подлежат определению из равенств (9).

2. Веса одинаковы и в сумме дают интервал интегрирования, т. е. нормированы. Абсциссы подлежат определению из равенств (10).

Система уравнений первой задачи получается из (11) подстановкой

$$x_i = \frac{2i - n - 1}{n - 1} \tag{13}$$

и имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \mu\left(\frac{2}{n-1}|i-j|\right) = \int_0^{\frac{2}{n-1}(i-1)} \mu(x)\,dx + \int_0^{\frac{2}{n-1}(n-i)} \mu(x)\,dx$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Система уравнений второй задачи получается из (12) подстановкой

$$p_i = \frac{2}{n} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{15}$$

и имеет вид

$$\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\mu(|x_i - x_j|) = \mu(1 + x_i) - \mu(1 - x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Три рассмотренные задачи в известной мере аналогичны подходам, которые приводят к трем наиболее распространенным формулам численных квадратур. Первая из этих задач соответствует формуле Гаусса, вторая — формуле Ньютона—Котеса и третья — формуле Чебышева. Однако указанная аналогия чисто внешняя. Действительно, формулы Гаусса, Ньютона—Котеса и Чебышева выведены на основании требования точного выполнения соотношения (2) для полиномов вплоть до возможно более высокой их степени. Разумеется, применительно к полиномам нет нужды в использовании этих формул. Поэтому можно считать, что в основу вывода этих формул не положено никаких соображений относительно точности результатов, получаемых с их помощью. В противоположность этому приводимые ниже формулы базируются на требовании минимизации средней квадратической ошибки результата их применения. Конкретный вид соответствующих формул существенно зависит от корреляционной функции $\mu(\rho)$. Ограничимся здесь рассмотрением случая экспоненциальной корреляционной функции

$$\mu(\rho) = e^{-a|\rho|}, \tag{17}$$

которой, как известно, можно аппроксимировать многие встречающиеся на практике корреляционные функции. Заметим, что функция (17) является корреляционной функцией марковского случайного процесса, т. е. значение случайной функции в некоторой точке ρ, рассматриваемое нами в корреляционной связи со значениями этой функции в точках $\rho_1 < \rho$ и $\rho_2 > \rho$, не будет коррелировать со значениями этой функции во всех точках, расположенных вне отрезка $[\rho_1\rho_2]$. Параметр a в формуле (17) безразмерен так же, как и аргумент ρ. Это является следствием соотношения (5).

Схема Ньютона—Котеса. Естественно начать рассмотрение с аналога схемы Ньютона—Котеса, который для корреляционной функции (17) описывается формулами наиболее простого вида. Эти формулы получаются как решение системы (14), которая после подстановки в нее корреляционной функции из (17) может быть записана следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{i-1} p_j e^{-\frac{2}{n-1}(i-j)} + p_i + \sum_{j=i+1}^{n} p_j e^{-\frac{2}{n-1}(j-i)} =$$
$$= \frac{1}{a}\left[2 - e^{-\frac{2}{n-1}(i-1)} - e^{-\frac{2}{n-1}(n-i)}\right] \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

Удобно ввести величины Δ и q соотношениями

$$\Delta = x_i - x_{i-1}; \tag{19}$$

$$q = e^{-a\Delta}, \tag{20}$$

где Δ — расстояние между двумя соседними абсциссами;
q — значение корреляционной функции для этого расстояния.

В рассматриваемом случае (см. формулу (13))

$$\Delta = \frac{2}{n-1}. \tag{21}$$

В этих обозначениях система (18) примет вид

$$\sum_{j=1}^{i-1} p_j q^{i-j} + p_i + \sum_{j=i+1}^{n} p_j q^{j-i} = \frac{1}{a}(2 - q^{i-1} - q^{n-i}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

Легко проверить непосредственной подстановкой, что решением системы (22) является

$$p_1 = p_n = \frac{1}{a}\frac{1-q}{1+q}, \quad p_i = \frac{2}{a}\frac{1-q}{1+q} \quad (i = 2, 3, \ldots, n-1). \tag{23}$$

Как видно из (23), веса для всех точек, за исключением крайних, равны между собой и вдвое превосходят веса для крайних точек. В этом отношении формула численного интегрирования, получающаяся подстановкой (23) в (2), аналогична известной формуле трапеций. Однако она отличается от формулы трапеций тем, что сумма весов не равна длине интервала интегрирования, т. е. двум.

Формула для среднего квадрата относительной ошибки метода ε может быть получена подстановкой (23) и (13) в (8) и в наших обозначениях имеет вид

$$\varepsilon = \frac{4}{a} - \frac{4}{a^2}\frac{1-q}{1+q}(n-1). \tag{24}$$

Небезынтересно поведение весов p и среднего квадрата ошибки ε при различных значениях параметра a и, в частности, в двух предельных случаях: $a=0$ и $a=+\infty$. Случай $a=0$ соответствует, очевидно, $\mu(\rho)=1$, т. е. постоянному значению случайной функции во всех точках. Случай же $a=+\infty$ соответствует отсутствию корреляции между значениями случайной функции в любых двух точках.

При $a=0$ получаем из (23)

$$p_1 = p_n = \frac{1}{n-1}, \quad p_i = \frac{2}{n-1} \quad (i = 2, 3, \ldots, n-1), \tag{25}$$

т. е. обычную формулу трапеций, а из (24)

$$\varepsilon = 0.$$

Последнее совершенно очевидно, поскольку применительно к постоянной величине формула трапеций дает точный результат. При $a=+\infty$, согласно (23) и (24), все веса p, а также средний квадрат ε обращаются в нуль, что на первый взгляд представляется менее очевидным. Однако этот факт легко объяснить тем, что интеграл от полностью некоррелированной функции, среднее значение которой в каждой точке равно нулю, обращается в нуль, поэтому и в этом случае получается точный результат.

Поскольку средний квадрат ошибки неотрицателен, а при значениях $a=0$ и $a=+\infty$ обращается в нуль, то при некотором значении a вели-

чина ε имеет максимум. Легко показать, что этот максимум единственный, причем соответствующее значение q удовлетворяет уравнению

$$\ln q = -\frac{4(1-q^2)}{1+6q+q^2}$$

и приближенно равно 0,04. Соответственно максимальное значение ε при заданном n

$$\varepsilon = \frac{1{,}06}{n-1}.$$

Схема Чебышева. Перейдем к рассмотрению аналога схемы Чебышева. Система уравнений для определения абсцисс в этой схеме получается из (16) подстановкой корреляционной функции (17):

$$-\sum_{j=1}^{i-1} e^{-a(x_i-x_j)} + \sum_{j=i+1}^{n} e^{-a(x_j-x_i)} = \frac{n}{2a}\left[e^{-a(1+x_i)} - e^{-a(1-x_i)}\right]$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{26}$$

Этой системе удовлетворяют значения абсцисс

$$x_i = \frac{2i-n-1}{2}\Delta, \tag{27}$$

где Δ по-прежнему определена соотношением (19) и удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$\frac{e^{-a}}{a} = \frac{2q^{\frac{n+1}{2}}}{n(1-q)}, \tag{28}$$

а q связано с Δ формулой (20).

Как видно из (27), абсциссы в этом случае также являются равноотстоящими, с той только разницей, что крайние точки промежутка интегрирования не входят в их число. В этом случае

$$\varepsilon = -\frac{4}{a} - \frac{2}{a^2} + \frac{4}{n}\frac{1+q}{1-q} + \frac{8}{n^2}\frac{q}{(1-q)^2}. \tag{29}$$

В предельном случае постоянства случайной функции ($a=0$) получаем из уравнения (28)

$$\Delta = \frac{2}{n}. \tag{30}$$

Таким образом, расстояния от концов промежутка интегрирования до ближайших абсцисс вдвое меньше расстояния между соседними абсциссами. Согласно (29),

$$\varepsilon = 0.$$

В другом предельном случае некоррелированной случайной функции (29) дает

$$\Delta = \frac{2}{n+1}, \tag{31}$$

так что расстояние от концов промежутка до ближайших абсцисс совпадает с расстоянием между соседними абсциссами. Как видно из (29), в этом случае

$$\varepsilon = \frac{4}{n}, \tag{32}$$

что соответствует обычной формуле для среднего квадрата из независимых значений некоторой случайной величины.

Схема Гаусса. Обращаясь к общему случаю, необходимо решить систему (11), (12) после подстановки в нее корреляционной функции (17):

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=1}^{i-1} p_j e^{-a(x_i-x_j)} + p_i + \sum_{j=i+1}^{a} p_j e^{-a(x_j-x_i)} = \\ = \frac{1}{a}\left[2 - e^{-a(1+x_i)} - e^{-a(1-x_i)}\right] \\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n);\\ -\sum_{=1}^{i-1} p_j e^{-a(x_i-x_j)} + \sum_{j=i+1}^{n} p_j e^{-a(x_j-x_i)} = \\ = \frac{1}{a}\left[e^{-a(1+x_i)} - e^{-a(1-x_i)}\right].\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Решение системы (33) может быть записано в виде

$$p_i = \frac{2}{a}\frac{1-q}{1+q} \qquad (34)$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

$$x_i = \frac{2i-n-1}{2}\Delta, \qquad (35)$$

где Δ определяется формулой (19) и удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$e^{-a} = \frac{2q^{\frac{n+1}{2}}}{1+q}, \qquad (36)$$

а q по-прежнему связано с Δ формулой (20).

Таким образом, и в общей схеме абсциссы оказываются равноотстоящими друг от друга, а веса для этой схемы все одинаковы. Для ε в этом случае получаем выражение

$$\varepsilon = \frac{4}{a} - \frac{4n}{a^2}\frac{1-q}{1+q} - \frac{2}{a^2}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^2. \qquad (37)$$

При $a=0$

$$\left.\begin{aligned}\Delta &= \frac{2}{n}\\ p_i &= \frac{2}{n}\\ \varepsilon &= 0.\end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

так что веса нормированы, а абсциссы такие же, как и в схеме Чебышева для этого предельного случая. При $a=\infty$

$$\Delta = \frac{2}{n+1};$$

$$p_i = 0;$$

$$\varepsilon = 0.$$

Расположение абсцисс и в этом случае такое же, как в соответствующем предельном случае схемы Чебышева.

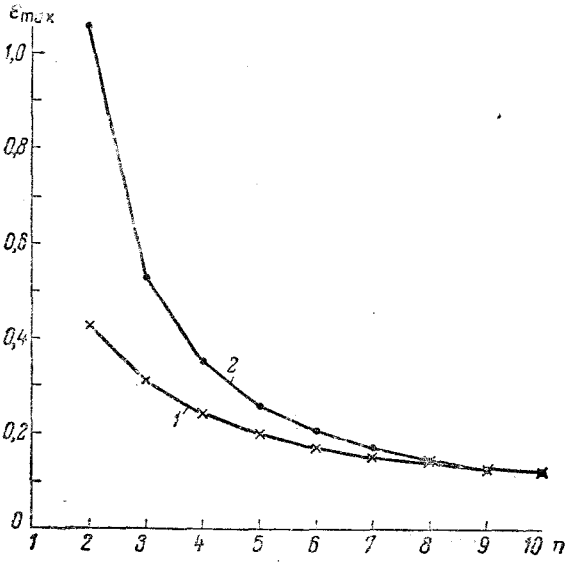
Так же как и в схеме Ньютона—Котеса, величина ε, рассматриваемая как функция от a при фиксированном n, имеет один максимум, положение которого определяется здесь уравнением

$$\ln\frac{1+q}{2q^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{2n(1-q^2)+(1-q)^2}{1+6q+q^2}.$$

Как видно из этого уравнения, q нельзя выразить в виде явной функции n. Это верно и в отношении ε. Вместе с тем при неограниченном возрастании n получаем уравнение

$$\ln q = -\frac{4(1-q^2)}{1+6q+q^2},$$

которое полностью совпадает с соответствующим уравнением в схеме Ньютона—Котеса. Предельный вид зависимости максимального ε от n при больших n оказывается также совпадающим с соответствующей зависимостью в схеме Ньютона—Котеса. Численные подсчеты показывают, что различия в значениях максимальных ε и отвечающих им q в схемах Гаусса и Ньютона—Котеса существенны лишь для сравнительно не-



Зависимость квадрата максимальной ошибки ε оптимальных формул численных квадратур от числа ординат n:
1 — по схеме Гаусса; *2* — по схеме Ньютона — Котеса

больших n. Результаты этих подсчетов приведены на рисунке. Естественно, что при малых n схема Гаусса дает меньшие значения максимального ε, чем схема Ньютона—Котеса.

Однако обе указанные схемы дают существенно меньшее значение максимального ε по сравнению со схемой Чебышева, для которой максимальной является величина ε для некоррелированной функции $(q)=0$, т. е. $\varepsilon=\frac{4}{n}$. Этот факт легко объясняется нормированностью весов в схеме Чебышева, которая приводит к тем менее точной аппроксимации интеграла, чем менее коррелирована функция. В противоположность этому для двух других рассматриваемых схем при стремлении корреляционной связи к нулю результат аппроксимации стремится к точному значению интеграла.

Нормированные схемы. Приведенные выше рассуждения создают впечатление, что схемы с нормировкой весов нецелесообразны. Однако в действительности схемы с ненормированными весами можно использовать лишь при известном математическом ожидании рассматриваемой случайной функции. Практически же часто приходится иметь дело со случайными функциями, математическое ожидание которых неизвестно. При вычислении интегралов от таких функций можно использовать только схемы с нормированными весами. Поэтому интересно рассмот-

реть варианты схем Ньютона—Котеса и Гаусса, полученные при дополнительном условии нормировки весов, которое приводит к задачам на условный минимум. Формулы для этих схем получаются аналогично предыдущему, с тем лишь исключением, что вместо ε подлежит минимизации величина

$$\varepsilon' = \varepsilon + 2\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 2\right),$$

где 2λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Не останавливаясь на выкладках, приводим окончательные результаты.

1. Нормированная схема Ньютона — Котеса:

$$p_1 = p_n = \frac{1}{n-(n-2)q}\left[2 - \frac{(n-2)(1-q)}{a}\right]; \qquad (39)$$

$$p_i = \frac{2}{n-(n-2)q}(1-q)\left(1+\frac{1}{a}\right) \quad (i=2,\ 3,\ \ldots,\ n-1); \qquad (40)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{n-(n-2)q}\left\{4(1+q) + \frac{4[2-n(1-q)]}{a} - \frac{4(n-1)(1-q)}{a^2}\right\}, \qquad (41)$$

где использованы обозначения (19), (20) и (21).

Рассматривая те же предельные случаи постоянства случайной функции ($a=0$) и ее некоррелированности ($a=+\infty$), легко показать следующее.

При $a=0$ веса (39) и (40) переходят в (25), т. е. соответствуют формуле трапеций, а (41) дает $\varepsilon=0$. Таким образом, этот предельный случай совпадает с аналогичным предельным случаем ненормированной схемы Ньютона—Котеса, что вполне естественно, так как в предельном случае $a=0$ ненормированной схемы Ньютона—Котеса веса оказываются ненормированными.

При $a=\infty$ веса (39) и (40) переходят в (15), т. е. соответствуют обычной формуле прямоугольников, а (41) переходит в (32).

2. Нормированная схема Гаусса. Формулы этой схемы полностью совпадают с формулами схемы Чебышева. Следовательно, применительно к принятой корреляционной функции (17) абсциссы схемы Чебышева, найденные из системы (16), автоматически удовлетворяют также системе (11), в которой $p_i = \frac{2}{n}$. Разумеется, этот факт имеет место отнюдь не для любой корреляционной функции.

Обобщенная схема Ньютона—Котеса. Часто встречается необходимость в вычислении интеграла от случайной функции, распространенного по интервалу более широкому, чем тот, в отдельных точках которого известны значения случайной функции. Три приведенные выше схемы могут быть обобщены на этот случай. Ограничимся рассмотрением таких обобщений при наиболее естественном предположении о симметричном расположении интервала интегрирования относительно интервала, содержащего точки, в которых известна случайная функция. В качестве интервала интегрирования по-прежнему рассмотрим отрезок $[-1,1]$, а интервал задания случайной функции обозначим $[-\alpha, \alpha]$. $(\alpha \leqslant 1)$.

Наиболее просто это обобщение проводится для схемы Ньютона—Котеса. Соответствующая система уравнений отличается от (18) лишь тем, что в нее вместо $\Delta = \frac{2}{n-1}$ входит величина

$$\Delta' = \frac{2\alpha}{n-1}. \qquad (42)$$

Решение этой системы имеет следующий вид:

$$p_1 = p_n = \frac{1}{a}\left[\frac{2}{1+q} - e^{-n(1-\alpha)}\right]; \tag{43}$$

$$p_i = \frac{2}{a}\,\frac{1-q}{1+q} \quad (i = 2, 3, \ldots, n-1), \tag{44}$$

где величина q определяется равенством

$$q = e^{-a\Delta'}. \tag{45}$$

Средний квадрат относительной ошибки дается функцией

$$\varepsilon = \frac{4}{a} - \frac{4}{a^2}\,\frac{1-q}{1+q}(n-1) - \frac{2}{a^2}\left[1 - e^{-a(1-\alpha)}\right]\left[3 - e^{-a(1-\alpha)}\right]. \tag{46}$$

Разумеется, эти формулы при $\alpha = 1$ переходят в соответствующие формулы схемы Ньютона—Котеса, в которой крайние веса вдвое меньше промежуточных. По мере уменьшения α отношение крайних весов к промежуточным возрастает. При некотором значении α это отношение равно единице, так что при этом α рассматриваемая схема совпадает со схемой Гаусса. При дальнейшем уменьшении α это отношение весов неограниченно возрастает.

Интересен и такой предельный случай, при котором интервал интегрирования неограниченно возрастает, а интервал задания случайной функции остается постоянным. В этом случае, очевидно, надо считать, что α стремится к нулю, a — к бесконечности, а произведение их остается постоянным. Тогда из (43) и (44) видно, что отношение крайних весов к промежуточным, возрастая, стремится к конечному пределу

$$\frac{p_1}{p_i} \to \frac{1}{1-q},$$

большему единицы.

Обобщенная схема Чебышева. Поскольку в схеме Чебышева абсциссы являются искомыми величинами, обобщение этой схемы в рассматриваемом направлении получается из несколько иных соображений.

Представим, что мы начинаем уменьшать отрезок, в который могут попадать абсциссы x_i, оставляя неизменным интервал интегрирования. Очевидно, что пока концы отрезка не дошли до точек x_1 и x_n простой схемы Чебышева, расположение оптимальных абсцисс не претерпит никаких изменений. Действительно, в простой схеме Чебышева мы нашли абсциссы, используя которые, получаем оптимальную аппроксимацию интеграла по интервалу [—1,1]. Если теперь интервал, в котором могут находиться абсциссы, сужать, то, пока все найденные абсциссы будут находиться внутри этого суженного интервала, естественно, значения в них по-прежнему будут давать оптимальную аппроксимацию рассматриваемого интеграла. Лишь при дальнейшем сужении интервала абсцисс схема претерпит изменения. Имея в виду именно на столько суженный интервал, естественно считать, что крайние абсциссы совпадают с его концами:

$$x_1 = -\alpha, \quad x_n = \alpha. \tag{47}$$

Остальные абсциссы подлежат определению из системы (26) с той только разницей, что индекс i принимает значения 2, 3,..., n—1. Решение такой системы приводит к значениям абсцисс

$$x_i = \frac{2i-n-1}{2}\,\Delta'; \quad (i = 2, 3, \ldots, n-1), \tag{48}$$

где Δ' удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$\frac{n}{2a}\,e^{-a}=\frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{1-q}-e^{-a\alpha}, \tag{49}$$

q по-прежнему связано с Δ' равенством (45). Формула для ε в этом случае сравнительно громоздка:

$$\begin{aligned}\varepsilon=&-\frac{4}{a}-\frac{2}{a^2}(1-e^{2a})+\frac{4}{n^2}(1+e^{-2a\alpha})+\\&+\frac{4}{n}\,e^{-a\alpha}\frac{3q^{\frac{3-n}{2}}-2q^{\frac{n-1}{2}}}{1-q}+\frac{4}{n^2}\,e^{a\alpha}\frac{q^{\frac{n-1}{2}}}{1-q}+\\&+\frac{4}{n^2}\left[\frac{2(n-2)q}{1-q}-\frac{q-q^{n-1}}{(1-q)^2}\right]+\frac{4(n-2)}{n^2}.\end{aligned} \tag{50}$$

Подчеркнем, что эти формулы переходят в соответствующие формулы простой схемы Чебышева не при $\alpha=1$, а при $\alpha=x_n$, где x_n — наибольшая абсцисса простой схемы Чебышева. Как следует из приведенного выше рассуждения, это значение является наибольшим из значений, для которых имеет смысл обобщенная схема Чебышева.

Заметим, что в этой схеме не все абсциссы являются равноотстоящими. Именно, все абсциссы, кроме крайних, удалены одна от другой на одинаковое расстояние Δ, крайние же абсциссы отстоят от соседних с ними на расстоянии

$$x_2-x_1=x_n-x_{n-1}=\alpha-\frac{n-3}{2}\Delta,$$

которое вообще меньше Δ и равно ему лишь в упомянутом предельном случае.

Обобщенная схема Гаусса. Соображения, высказанные в начале предыдущего пункта, остаются в силе также для обобщенной схемы Гаусса. Поэтому нужно задать крайние абсциссы равенствами (47) и определять остальные абсциссы и все веса из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{i-1}p_j e^{-a(x_i-x_j)}+p_i+\sum_{j=i+1}^{n}p_j e^{-a(x_j-x_i)}=\\&=\frac{1}{a}\left[2-e^{-a(1+x_i)}-e^{-a(1-x_i)}\right]\quad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n);\\&-\sum_{j=1}^{i-1}p_j e^{-a(x_i-x_j)}+\sum_{j=i+1}^{n}p_j e^{-a(x_j-x_i)}=\\&=\frac{1}{a}\left[e^{-a(1+x_i)}-e^{-a(1-x_i)}\right]\quad(i=2,\ 3,\ \ldots,\ n-1),\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

которая отличается от системы (33) лишь отсутствием первого и последнего уравнений второй группы. Легко проверить непосредственной подстановкой, что решения системы (51) даются формулами обобщенной схемы Ньютона—Котеса. Так что соответствующие формулы численного интегрирования при рассматриваемой корреляционной функции (17) полностью совпадают с формулой численного интегрирования в обобщенной схеме Ньютона—Котеса. Следовательно, абсциссы и веса обобщенной схемы Ньютона—Котеса автоматически удовлетворяют второй группе уравнений системы (51).

Заметим, что обобщенная схема Гаусса имеет смысл лишь при $\alpha\leqslant x_n$, где x_n — наибольшая абсцисса простой схемы Гаусса. Этому значению α, как уже указывалось, соответствуют равенства всех весов. При

значениях $\alpha > x_n$ формула численного интегрирования сохраняет свой смысл только как формула обобщенной схемы Ньютона—Котеса. Что касается подхода Гаусса, то при $\alpha > x_n$ он осуществляется уже не обобщенной, а простой схемой Гаусса.

Обобщенные нормированные схемы. Обобщенные схемы Ньютона—Котеса и Гаусса можно рассматривать также в нормированном варианте, подобно тому, как это было сделано выше для простых схем. Для этого нужно только потребовать, чтобы сумма весов равнялась двум. Соответствующие формулы оказываются одинаковыми для обобщенных нормированных схем Ньютона—Котеса и Гаусса и имеют вид:

$$p_1 = p_n = \frac{1}{n-(n-2)\,q} - \frac{n-2}{a}\,\frac{1-q}{n-(n-2)\,q}\,e^{-a(1-\alpha)}; \qquad (52)$$

$$p_i = \frac{2(1-q)}{n-(n-2)\,q}\left[1 + \frac{1}{a}\,e^{-a(1-\alpha)}\right] \quad (i = 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1); \qquad (53)$$

$$\varepsilon = \frac{4(1+q)}{n-(n-2)\,q} - \frac{4}{a} - \frac{2}{a^2} + \frac{1}{n-(n-2)\,q} \times$$

$$\times \left\{\frac{8}{a}(1+q)\,e^{-a(1-\alpha)} + \frac{2}{a^2}\,[2 - n(1-q)]\,e^{-2a(1-\alpha)}\right\}, \qquad (54)$$

где использованы обозначения (42), (45) и (48). Применительно к этим схемам остаются в силе замечания, сделанные в конце предыдущего пункта.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все приведенные выше оптимальные формулы численных квадратур для стационарных случайных функций имеют место при двух существенных ограничениях: во-первых, они относятся к случаю экспоненциальной корреляционной функции; во-вторых, ими представляется одномерный интеграл, и притом распространенный по прямой. Оба эти ограничения не принципиальны и при необходимости могут быть сняты.

В связи с первым ограничением заметим, что уравнения (11) и (12) верны при любой корреляционной функции. Решение этих систем уравнений может быть проведено при конкретном задании вида корреляционной функции, в крайнем случае, численными методами. Что касается криволинейных и кратных интегралов, то наиболее естественным обобщением изложенной задачи является нахождение оптимальных формул численных квадратур для однородных изотропных случайных функций нескольких координат.

Легко видеть, впрочем, что предположение о стационарности также не обязательно для вывода оптимальных формул численных квадратур для случайных функций. Мы ограничились рассмотрением этого случая лишь потому, что стационарные случайные функции наиболее часто встречаются в приложениях.

Возможны различные обобщения рассмотренной задачи и в других направлениях. В частности, представляет определенный интерес задача о построении оптимальных формул численных квадратур, когда значения случайной функции в отдельных точках известны с ошибками.