Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLIII, вып. 3, 1964 г.

УДК 517.514

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ АНАЛИЗА

И. Константинеску

I. К. Бегл [1] формулирует определения непрерывности и производной по направлению в пространстве R^n так, чтобы они соответственно имели единую общую форму для всех n и совпадали при $n=1$ с соответствующими определениями для функций от одной переменной.

Кроме понятия непрерывности введены последовательно понятия производной, интеграла [1], сходимости [2], полунепрерывности [3], предела [4. 5], выражаемые в единой и общей форме.

Для случая R^2 в настоящей статье вводится понятие функции одной действительной переменной.

II. Пусть $f: \dot{I} \to R$ — некоторая функция, заданная на интервале $\dot{I}$ числовой прямой R. Обозначим Γ_f или $\Gamma_f(\dot{I})$ графическое изображение функции f при $x \in \dot{I}$.

Функция f, определенная на интервале $\dot{I}$, считается на нем выпуклой, если для любой пары точек A, B графика Γ_f, имеющих абсциссы x', x'' $(x''>x')$, часть графика, расположенная между A и B, находится под отрезком AB.

Этим геометрическим условиям соответствуют следующие аналитические выражения.

1. Функция $f: \dot{I} \to R$ является выпуклой, если для любой системы точек x', x'' $(x''>x')$ из интервала $\dot{I}$ и для любого числа $t \in [0,1]$ существует неравенство

$$f[tx' + (1-t)x''] \leqslant tf(x') + (1-t)f(x'').$$

2. Функция $f: \dot{I} \to R$ является выпуклой, когда для любой системы $x_1 < x_2 < x_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

3. Функция $f: \dot{I} \to R$ является выпуклой, когда

$$\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \leqslant \frac{f(x'')-f(x)}{x''-x},$$

где $x' < x < x''$.

4. Функция $f: I \to R$ является выпуклой, когда выражение

$$p_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

монотонно возрастает в интервале I для любых значений $x_0 \in I$.

III. Понятие выпуклой функции для функций нескольких переменных обобщалось в различных направлениях. Рассматривались, например, функции двух переменных такие, что любое сечение поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью, параллельной оси z, было выпуклой кривой. Такие функции субгармоничны и непрерывны. Они могут быть названы выпуклыми функциями от двух переменных [6, 7].

Рассматривались также функции, для которых плоские сечения, параллельные xz и yz, являются выпуклыми кривыми. Функция $f(x, y)$ выпукла для x при любом значении y, и наоборот. П. Монтель [8] называет такие функции дважды выпуклыми.

Выпуклые функции первой категории являются дважды выпуклыми, но обратное несправедливо.

Приведем пример, где функция [9]

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$

дважды выпукла при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, но не является выпуклой в первом смысле, так как ее пересечение с плоскостью $x = y$ дает кривую вогнутую в смежности с началом координат. П. Монтель доказывает, что дважды выпуклые функции являются субгармоническими, но обратное не имеет места [8].

Дважды выпуклая функция непрерывна на множестве переменных $[x, y]$ [9].

IV. Пусть I и J — два интервала и $I \times J$ — их произведение.

Назовем функцию $f: IJ \to R$ гиперболически дважды выпуклой по x, если для любой системы точек x', x'' $(x'' > x')$ из интервала I и для любого значения $y \in J$ существует такая точка $b \in J$, что для любого значения $t \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$f[tx' + (1-t)x'', b] - f[tx' + (1-t)x'', y] \leqslant$$
$$\leqslant t[f(x', b) - f(x', y)] + (1-t)[f(x'', b) - f(x'', y)].$$

Теорема 1. Пусть $A \in I$ и $B \in J$. Функция $f: A \times B \to R$ является дважды выпуклой по x тогда и только тогда, когда существует такое $b \in B$, что

$$E(y) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1, b) - f(x_1, y) \\ 1 & x_2 & f(x_2, b) - f(x_2, y) \\ 1 & x_3 & f(x_3, b) - f(x_3, y) \end{vmatrix} \geqslant 0 \qquad (1)$$

для любых точек $x_1 < x_2 < x_3$ из A при каком угодно значении $y \in B$.

Допустим, условие (1) соблюдено. Существует такое число $t \in [0,1]$, что

$$x_2 = tx_1 + (1-t)x_3.$$

Если в определителе $E(y)$ умножим первый ряд на t и третий на $(1-t)$ и вычтем их из второго, получим

$$E(y) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1, b) - f(x_1, y) \\ 1 & x_2 & f(x_2, b) - f(x_2, y) \\ 1 & x_3 & f(x_3, b) - f(x_3, y) \end{vmatrix} = \qquad (2)$$
$$= (x_1 - x_3)\{f(x_2, b) - f(x_2, y) - t[f(x_1, b) - f(x_1, y)] -$$
$$- (1-t)[f(x_3, b) - f(x_3, y)]\}.$$

Условие (1) принимает вид

$$f(x_2,\ b)-f(x_2,\ y)\leqslant t\,[f(x_1,\ b)-f(x_1,\ y)]+$$
$$+(1-t)\,[f(x_3,\ b)-f(x_3,\ y)],$$

т. е. $f(x,\ y)$ является функцией гиперболически дважды выпуклой по x. Тождество (2) доказывает равносильность условий (1) определению гиперболически дважды выпуклой по x.

V. Введем обозначение

$$\Delta_2 f\,[x,\ y;\ x'_1y']=f(x',\ y')-f(x,\ y')-f(x',\ y)+f(x,\ y).$$

Теорема 2. Функция $f:A\times B\to R$ является гиперболически дважды выпуклой по x тогда и только тогда, когда существует такое $b\in B$, что

$$\frac{\Delta_2 f\,[x',b;\ x,\ y]}{x'-x}\leqslant\frac{\Delta_2 f\,[x'',b;\ x,\ y]}{x''-x}$$

для любого значения $x'<x<x''$ в A и $y\in B$.

Справедливость теоремы следует из

$$\frac{\Delta_2 f\,[x',\ b;\ x,\ y]}{x'-x}-\frac{\Delta_2 f\,[x'',\ b;\ x,\ y]}{x''-x}=$$
$$=-\frac{1}{(x''-x)(x'-x)}\begin{vmatrix}1 & x' & f(x',\ b)-f(x',\ y)\\ 1 & x & f(x,\ b)-f(x,\ y)\\ 1 & x'' & f(x'',\ b)-f(x'',\ y)\end{vmatrix}.$$

VI. Положим, $f:A\times B\to R$ является гиперболически дважды выпуклой функцией по y, если для любой системы точек y', y'' $(y''>y')$ из B существует точка $a\in A$ такая, что для любого $t\in[0,1]$ и при любом $x\in A$ имеет место неравенство

$$f\,[a,\ ty'+(1-t)\,y'']-f\,[x,\ ty'+(1-t)\,y'']\leqslant$$
$$\leqslant t\,[f(a,\ y')-f(x,\ y')]+(1-t)\,[f(a,\ y'')-f(x,\ y'')].$$

Аналогично случаю двойной выпуклости по x доказывается теорема 3.

Теорема 3. $f:A\times B\to R$ является гиперболически дважды выпуклой функцией по y при

$$E(x)=\begin{vmatrix}1 & y_1 & f(a,\ y_1)-f(x,\ y_1)\\ 1 & y_2 & f(a,\ y_2)-f(x,\ y_2)\\ 1 & y_3 & f(a,\ y_3)-f(x,\ y_3)\end{vmatrix}\geqslant 0$$

для любого $y_1<y_2<y_3$ из B и для любого $x\in A$.

Теорема 4. $f:A\times B\to R$ является дважды выпуклой функцией, если для любой системы точек $y'<y<y''$ из B существует такое $a\in A$, что

$$\frac{\Delta_2 f\,[a,\ y';\ x,\ y]}{y'-y}\leqslant\frac{\Delta_2 f\,[a,\ y'';\ x,\ y]}{y''-y}$$

для любого $x\in A$.

VII. Теорема 5. Если $f:A\times B\to R$ является дважды выпуклой функцией по x, она также гиперболически дважды выпукла по x.

Пусть

$$\varepsilon(y)=\begin{vmatrix}1 & x_1 & f(x_1,\ y)\\ 1 & x_2 & f(x_2,\ y)\\ 1 & x_3 & f(x_3,\ y)\end{vmatrix}.$$

Функция $f(x, y)$, будучи дважды выпуклой, непрерывна [9]. Функция $\varepsilon(y)$, будучи линейной комбинацией непрерывных функций, является тоже непрерывной и тем самым ограниченной. Пусть в точке b она достигает своего верхнего предела. Имеем, следовательно,

$$\varepsilon(y) \leqslant \varepsilon(b)$$

или

$$\varepsilon(b) - \varepsilon(y) = E(y) \geqslant 0,$$

что и доказывает теорему. Аналогично доказывается теорема 6.

Теорема 6. Функция, дважды выпуклая по y, также гиперболически дважды выпукла по y.

Теорема 7. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция по $f(x, y)$, определенная в $A \times B$, была гиперболически дважды выпуклой по x, обеспечивается существованием некоторой точки $(a, b) \in AB$, для которой

$$f(x, y) = g(x, y) + f(x, b) + f(a, y), \tag{3}$$

где $-g(x, y)$ дважды выпукла по x.

Из разложения (3)

$$g(x, y) = f(x, y) - f(x, b) - f(a, y).$$

Так как $-g(x, y)$ дважды выпукла, то можно написать

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(a, y) + f(x_1, b) - f(x_1, y) \\ 1 & x_2 & f(a, y) + f(x_2, b) - f(x_2, y) \\ 1 & x_3 & f(a, y) + f(x_3, b) - f(x_3, y) \end{vmatrix} \geqslant 0$$

или

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1, b) - f(x_1, y) \\ 1 & x_2 & f(x_2, b) - f(x_2, y) \\ 1 & x_3 & f(x_3, b) - f(x_3, y) \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

откуда следует, что f является дважды выпуклой по x. Возьмем наоборот тождество

$$f(x, y) = \Delta_2 f[x, y; a, b] + f(x, b) + f(a, y) - f(a, b). \tag{4}$$

Введя обозначение

$$H(x, y) = -\Delta_2 f[x, y; a, b],$$

получаем

$$H(x', y) - H(x, y) = -\Delta_2 f[x', y; a, b] + \Delta_2 f[x, y; a, b]$$

или

$$H(x', y) - H(x, y) = -f(x', y) - f(a, b) + f(a, y) + f(x', b) + f(x, y) + f(a, b) - f(a, y) - f(x, b),$$

откуда следует

$$H(x', y) - H(x, y) = \Delta_2 f[x', b; x, y].$$

Таким же образом устанавливается

$$H(x'', y) - H(x, y) = \Delta_2 f[x'', b; x, y].$$

Из двойной гиперболической выпуклости функции f следует

$$\frac{\Delta_2 f[x', b; x, y]}{x' - x} \leqslant \frac{\Delta_2 f[x'', b; x, y]}{x'' - x},$$

т. е.

$$\frac{H(x', y)-H(x, y)}{x'-x} \leqslant \frac{H(x'', y)-H(x, y)}{x''-x}.$$

Следовательно, $H(x, y)$ является дважды выпуклой функцией по x. Но тогда и

$$-g(x, y)=H(x, y)+f(a, b)$$

дважды выпукла по x.

Из выражения (4)

$$f(x, y)=g(x, y)+f(x, b)+f(a, y),$$

где g дважды выпукла по x.

Теорема 8. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $f(x, y)$, определенная по $A\times B$, была гиперболически дважды выпуклой по y, определяется существованием точки $(a, b)\in A\times B$, для которой

$$f(x, y)=g(x, y)+f(x, b)+f(a, y),$$

где $g(x, y)$ дважды выпукла по y.

VIII. Используя разложение, вытекающее из теорем 7 и 8, и свойства гиперболически непрерывных функций [10, 11], можно легко доказать теоремы 9, 10, 11.

Теорема 9. Если $f: A\times B\to R$ является гиперболически дважды выпуклой функцией по x или y, она гиперболически непрерывна.

Теорема 10. Чтобы семейство функций $\{f(x, y)\}$, равно ограниченных и гиперболически дважды выпуклых по x или y в $A\times B$, было компактным, достаточно, чтобы множество $\{f(x, b)+f(a, y)\}$ было полностью ограничено в $A\times B$, где (a, b) — неподвижная точка, произвольно взятая в $A\times B$.

Теорема 11. Если семейство функций $f: A\times B\to R$ гиперболически дважды выпукло по x или y, равномерно ограничено в $A\times B$ и компактно по двум направлениям, параллельным соответственно A и B и проходящим через неподвижную точку $P(a, b)\in A\times B$, то семейство компактно в $A\times B$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bögel K. J. reine und angaw. Math., 1934. v. 170, p. 197; 1935, v. 173, p. 5.
2. Nicolescu M. Bull. Math. Bucaresf, 1941.
3. Dobrescu E. Studii şi cercetări mat. Acad. RPR, 1957, N 1—2.
4. Sălăgean I. Comun. Acad. RPR, 1960. N 11.
5. Dobrescu E. Comun. Acad. RPR, 1960, N 10.
6. Blumberg H. Trans. Amer. Math. Soc. 1919, v. 20, N 1.
7. Valiron G. Proc. Phys. Soc. Iapan, 1931, N 19.
8. Montel P. J. Math. pures et appl., 1928, v. VII.
9. Montel P. Praktika de l'Acad. d'Athènes. 1931, N 6.
10. Nicolescu M. Analiza matematica, 1959, N 11.
11. Dobrescu E., Sălăgean I. Comun. Acad. RPR, 1959, t. IX, N 3,5.