Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLIII, вып. 3, 1964 г.

УДК 517. 512.6

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

А. М. Журавский

1. В вопросах, связанных с приближенным определением функции, встречается задача о построении приближенного выражения функции по ее средним значениям, заданным для ряда интервалов. Примером тому может служить составление уравнения кривой распределения или составление уравнения линии регрессии одной из двух случайных переменных по другой. К той же задаче приводится отыскание распределения полезного ископаемого по скважине на основании показаний, полученных в результате анализов керна, и ряд других вопросов опробования.

Часто решение должно сопровождаться указанием выражения среднего значения аппроксимируемой функции для произвольного интервала в границах аппроксимации. Среднее значение функции для заданного интервала является функцией области. Поставленные условия можно рассматривать как задачу об аппроксимации функции области по ряду ее значений, заданных в границах аппроксимации.

Среднее значение $\bar{y}_k$ функции $f(x)$ в интервале (a_k, b_k) определяется равенством

$$\bar{y}_k (b_k - a_k) = \int_{a_k}^{b_k} f(x)\, d(x). \tag{1}$$

Рассматриваемая задача состоит в определении приближенного выражения функции $f(x)$ по значениям $\bar{y}_k$, заданным для ряда промежутков (a_k, b_k), удовлетворяющих условиям

$$a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n < b_n \leqslant b. \tag{2}$$

Аппроксимируя функцию $f(x)$ полиномом

$$P(x) = e_0 + e_1 x + \ldots + e_{n-1} x^{n-1}, \tag{3}$$

определим аппроксимирующий полином по условиям

$$\int_{a_k}^{b_k} P(x)\, dx = \bar{y}_k (b_k - a_k), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Поставленные условия дают уравнения для определения коэффициентов полинома

$$p_{k,0}\, e_0 + p_{k,1}\, e_1 + \ldots + p_{k,\, n-1} e_{n-1} = y_k, \tag{5}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$p_{k,0}=1, \quad k=1, 2, \ldots, n; \tag{6}$$

$$p_{k,s}=\frac{1}{b_k-a_k}\int_{a_k}^{b_k} x^s dx=\frac{b_k^s+a_k b_k^{s-1}+\ldots+a_k^s}{s+1}, \tag{7}$$

$$k=1, 2, \ldots, n; \quad s=1, 2, \ldots, n-1.$$

Уравнения (5) имеют определенное решение, так как определитель

$$\Delta=\|p_{k,s}\|\neq 0. \tag{8}$$

В справедливости последнего нетрудно убедиться, учитывая, что

$$p_{k,s}(b_k-a_k)=\int_{a_k}^{b_k} x_k^s dx_k \tag{9}$$

и

$$\Delta\cdot\prod_{k=1}^{n}(b_k-a_k)=\left\|\int_{a_k}^{b_k} x_k^s dx_k\right\|. \tag{10}$$

В самом деле определитель правой части равенства (10)

$$\left\|\int_{a_k}^{b_k} x_k^s dx_k\right\|=\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_n}^{b_n}\left\|x_k^s\right\| dx_1\ldots dx_n>0,$$

ибо

$$\|x_k^s\|=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)>0$$

вследствие очевидных неравенств

$$a\leqslant a_1\leqslant x_1\leqslant b_1\leqslant a_2\leqslant x_2\leqslant b_2\leqslant a_3\leqslant\ldots\leqslant a_n\leqslant x_n\leqslant b_n\leqslant b.$$

Коэффициент

$$e_{s-1}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+s}\frac{\Delta_{k,s}}{\Delta}y_k, \quad s=1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

где $\Delta_{k,s}$ — определитель, полученный из определителя Δ вычеркиванием k-й строки и s-го столбца.

Аппроксимирующий многочлен

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n}\bar{y}_k P_k(x), \tag{12}$$

где

$$P_k(x)=(-1)^k\sum_{s=1}^{n}(-1)^s\frac{\Delta_{k,s}}{\Delta}x^{s-1}. \tag{13}$$

Многочлен $\Delta\cdot P_k(x)$ образуется из определителя Δ, если в последнем заменить элементы k-й строки соответствующими степенями x так, что место $p_{k,s}$ займет x^s. Например,

$$\Delta\cdot P_1(x)=\begin{vmatrix} 1, & x, & \ldots, & x^{n-1} \\ p_{2,0}, & p_{2,1}, & \ldots, & p_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n,0}, & p_{n,1}, & \ldots, & p_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

Многочлен

$$P(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{\Delta}\begin{vmatrix} 1, & x, & \ldots, & x^{n-1}, & 0 \\ p_{1,0}, & p_{2,0}, & \ldots, & p_{1,n-1}, & \bar{y}_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n,0}, & p_{n,1}, & \ldots, & p_{n,n-1}, & \bar{y}_n \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Многочлен $P_k(x)$ — частная форма многочлена $P(x)$, соответствующая случаю, когда

$$\bar{y}_s=\begin{cases} 0, & s\neq k \\ 1, & s=k. \end{cases}$$

2. Когда размеры всех рассматриваемых промежутков одинаковы,

$$b_k-a_k=2h, \quad k=1, 2, \ldots, n, \tag{15}$$

положим

$$c_k=\frac{1}{2}(a_k+b_k), \quad k=1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Величина $p_{k,s}$, как следует из (7), определяется равенством

$$p_{k,s}=\frac{1}{2h}\int_{c_k-h}^{c_k+h}x^s dx=\frac{(c_k+h)^{s+1}-(c_k-h)^{s+1}}{2(s+1)h} \tag{17}$$

или

$$p_{k,s}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]}\frac{1}{s+1}\binom{s+1}{2i+1}c_k^{s-2i}h^{2i}. \tag{18}$$

При малых значениях h

$$p_{k,s}=c_k^s+\frac{s(s-1)}{1\cdot 2\cdot 3}c_k^{s-2}h^2+0(h^4). \tag{19}$$

Определитель

$$\Delta=\|c_k^s\|=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(c_j-c_i),$$

в чем нетрудно убедиться, используя (4). Заменяя в выражении (14) полинома $P(x)$ величины $p_{k,s}$ их выражениями из равенства (19), получаем в $k+1$-й строке определителя, выражающего $P(x)$, элементы

$$1, \quad c_k, \quad c_k^2+\frac{1}{3}h^2, \quad c_k^3+c_kh^2, \quad c_k^4+\frac{4\cdot 3}{3!}c_k^2h+0(h^4), \quad \ldots, \bar{y}_k.$$

Вычитая из элементов третьего столбца определителя соответствующие элементы первого, умноженные на $\frac{1}{3}h^2$, из элементов четвертого столбца преобразованного определителя — соответствующие элементы его второго столбца, умноженные на h^2, из элементов пятого столбца полученного определителя — соответствующие элементы третьего, умноженные на $\frac{4\cdot 3}{3!}h^2$, и т. д., получаем определитель, в $k+1$-й строке которого стоят величины

$$1, \quad c_k, \quad c_k^2, \quad c_k^3, \quad c_k^4+0(h^4), \quad \ldots, \quad c_k^{n-1}+0(h^4), \quad \bar{y}_k.$$

В первой строке определителя окажутся в результате произведенной операции элементы

$$1,\quad x,\quad x^2-\frac{1}{3}h^2,\quad x^3-xh^2,\quad x^4-\frac{4\cdot 3}{3!}x^2h^2,\ \ldots$$

$$\ldots,\ x^{n-1}-\frac{(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^2,\ 0.$$

Удерживая в элементах полученного определителя лишь члены, содержащие h с показателем, меньшим четырех, можно представить $P(x)$ в виде

$$P(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{\Delta}D(x,\ h)+h^4P_{n-1}(x,\ h), \tag{20}$$

где $D(x,\ h)$ является определителем, в $k+1$-й строке которого находятся элементы $1,\ c_k,\ c_k^2,\ c_k^3,\ \ldots,\ c_k^{n-1},\ \bar{y}_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, а первую строку образуют элементы $1,\ x,\ x^2-\frac{1}{3}h^2,\ x^3-xh^2,\ \ldots,\ x^{n-1}-\frac{(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^2,\ 0$.

Многочлен $P_{n-1}(x,\ h)$ содержит x в степени, не превосходящей $n-1$. Определитель $D(x,\ h)$ представляется как сумма

$$D(x,\ h)=D_1(x)-\frac{h^2}{6}D_2(x), \tag{21}$$

где

$$D_1(x)=\begin{vmatrix} 1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^{n-1},\ 0 \\ 1,\ c_1,\ c_1^2,\ \ldots,\ c_1^{n-1},\ \bar{y}_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1,\ c_n,\ c_n^2,\ \ldots,\ c_n^{n-1},\ \bar{y}_n \end{vmatrix}, \tag{22}$$

$$D_2(x)=\begin{vmatrix} 0,\ 0,\ 1\cdot 2,\ \ldots,\ n(n-1)x^{n-3},\ 0 \\ 1,\ c_1,\ c_1^2,\ \ldots,\ c_1^{n-1},\ \bar{y}_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1,\ c_n,\ c_n^2,\ \ldots,c_n^{n-1},\ \bar{y}_n \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Определитель $D_1(x)$ получается из определителя, выражающего многочлен $P(x)$ при

$$p_{k,\,s}=c_k^s,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad s=0,\ 1,\ \ldots,\ (n-1).$$

Легко видеть, что

$$D_2(x)=D_1'(x). \tag{24}$$

Многочлен $P(x)$, согласно (20), (21), (24), выражается суммой

$$P(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{\Delta}D_1(x)+(-1)^n\frac{h^2}{6\Delta}D_1'(x)+h^4P_{n-1}(x,\ h). \tag{25}$$

Из (22) следует, что

$$L(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{\Delta}D_1(x)=\sum_{t=1}^{n}\bar{y}_tL_t(x), \tag{26}$$

где $L(x)$ и $L_t(x)$ получаются соответственно из $P(x)$ и $P_t(x)$ при указанной выше замене $p_{k,\,s}$ на c_k^s.

Многочлен $L_t(x)$ выражается равенством

$$L_t(x) = \frac{\varphi(x)}{(x - c_t)\,\varphi'(c_t)}, \tag{27}$$

где

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - c_i). \tag{28}$$

Равенство (27) вытекает из представления многочлена $P_t(x)$ в форме отношения определителей при замене $p_{k,s}$ на c_k^s. Многочлен $P(x)$ обращается в интерполяционный многочлен Лагранжа. В силу (14) и (26)

$$L''(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{\Delta} D_1''(x) \tag{29}$$

и из (25), (26), (29) следует, что

$$P(x) = L(x) - \frac{1}{6} h^2 L''(x) + h^4 P_{n-1}(x, h). \tag{30}$$

Как видно из равенства (30), при небольших значениях h можно пользоваться приближенным равенством

$$P(x) \approx L(x) - \frac{1}{6} h^2 L''(x). \tag{31}$$

3. Погрешность $R(x)$ приближенного равенства

$$f(x) \approx P(x) \tag{32}$$

может быть оценена на основании соотношений (4), характеризующих выбор многочлена $P(x)$. Из равенства

$$f(x) = P(x) + R(x) \tag{33}$$

следует, что

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x)\,dx = \int_{a_k}^{b_k} P(x)\,dx + \int_{a_k}^{b_k} R(x)\,dx. \tag{34}$$

Отсюда в силу (1) и (4)

$$\int_{a_k}^{b_k} R(x)\,dx = 0, \quad k = 1, 2, \ldots n. \tag{35}$$

Равенство (35) показывает, что $R(x)$ меняет свой знак в промежутке (a_k, b_k). Дальнейшее суждение об остаточном члене $R(x)$ может быть сделано в рамках ограничения класса рассматриваемых функций $f(x)$. В дальнейшем функция $f(x)$ предполагается n-кратно дифференцируемой в промежутке (a, b). В указанном классе функций при аппроксимации $f(x)$ многочленом $P(x)$ остаточный член $R(x)$ является n-кратно дифференцируемой функцией. Изменяя свой знак в промежутке (a_k, b_k), $R(x)$ обращается в нуль при некотором значении x_k в этом промежутке

$$R(x_k) = 0, \; a_k < x_k < b_k. \tag{36}$$

Остаточный член $R(x)$ может быть представлен в виде

$$R(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)\,\varphi(x). \tag{37}$$

Функция

$$\Phi(u)=f(u)-P(u)-(u-x_1)\ \ldots\ (u-x_n)\varphi(x) \tag{38}$$

показывает, что в силу (23) и (36)

$$\Phi(u)=0$$

при $u=x$, $u=x_k$, $k=1, 2, \ldots, n$.

Указанные значения x_k, согласно (2), (36), лежат в промежутке (a, b), в котором рассматривается аппроксимация и где поэтому фиксируется x. Обращение $\Phi(u)$ в нуль $n+1$ раз в промежутке (a, b) влечет за собой равенство

$$\Phi^{(n)}(x_*)=0, \quad a<x_*<b. \tag{39}$$

Как следует из (38) и (39),

$$f^{(n)}(x_*)-n!\varphi(x)=0, \tag{40}$$

ибо

$$P^{(n)}(u)=0.$$

Равенство (40) показывает, что

$$\varphi(x)=\frac{f^{(n)}_{x_*}}{n!}.$$

Таким образом, в классе n-кратно дифференцируемых функций остаточный член представим в виде

$$R(x)=\frac{(x-x_1)\ \ldots\ (x-x_n)}{n!}f^{(n)}(x_*). \tag{41}$$

Отметим, что x_* зависит от x и изменяется вместе с x, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ от x не зависят и остаются постоянными.

Равенство (41) позволяет получить оценку $|R(x)|$ при известной верхней границе M абсолютной величины $f^{(n)}(x)$ в промежутке (a, b). Неравенство

$$|f^{(n)}(x_*)|\leqslant M$$

совместно с очевидными неравенствами

$$|x-x_k|<b-a, \quad k=1, 2, \ldots, n$$

показывает, что

$$|R(x)|<\frac{(b-a)^n}{n!}M. \tag{42}$$

Оценка, доставляемая неравенством (42), может быть улучшена, если учесть, что значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обычно равномерно распределяются в промежутке (a, b). В этом случае для значений x_i, x_k, расположенных симметрично относительно середины c промежутка (a, b), справедливо неравенство

$$|(x-x_i)(x-x_k)|<\frac{(b-a)^2}{4}, \tag{43}$$

из которого следует, что при симметричном распределении значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ относительно середины интервала (a, b)

$$|(x-x_1)(x-x_2)\ \ldots\ (x-x_n)|<\frac{(b-a)^n}{2^n}.$$

Оценка $|R(x)|$ дается в этом случае неравенством

$$|R(x)|<\frac{(b-a)^n}{2^n n!}M. \tag{44}$$

4. Приближенное выражение среднего значения $\overline{y(u,\ v)}$ функции $f(x)$ в промежутке (u, v) может быть получено из приближенного представления функции $f(x)$ многочленом $P(x)$.

Среднее значение

$$\overline{y(u,\ v)} = \frac{1}{v-u}\int_u^v f(x)\,dx, \quad a \leqslant u < v \leqslant b. \tag{45}$$

Согласно (32),

$$\overline{y(u,\ v)} \approx \frac{1}{v-u}\int_u^v P(x)\,dx. \tag{46}$$

Из (14)

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v P(x)\,dx = \frac{(-1)^{n-1}}{\Delta}\begin{vmatrix} \overline{x_0(u,\ v)}, & \overline{x_1(u,\ v)}, & \ldots, & \overline{x_{n-1}(u,\ v)}, & 0 \\ p_{1,0}, & p_{1,1}, & \ldots, & p_{1,n-1}, & \bar{y}_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n,0}, & p_{n,1}, & \ldots, & p_{n,n-1}, & \bar{y}_n \end{vmatrix}, \tag{47}$$

где

$$\overline{x_s(u,\ v)} = \frac{1}{v-u}\int_u^v x^s dx = \frac{v^{s+1}-u^{s+1}}{(s+1)(v-u)}. \tag{48}$$

Равенства (46), (47) позволяют получить приближенную величину среднего значения $\overline{y(u, v)}$ функции в заданном промежутке (u, v) по ее средним значениям $\bar{y}_k$, заданным в промежутках (a_k, b_k). Выражение погрешности $R(u, v)$ приближенного равенства (46) в силу (45) дается равенством

$$R(u,\ v) = \overline{y(u,\ v)} - \frac{1}{v-u}\int_u^v P(x)\,dx = \frac{1}{v-u}\int_u^v (f(x) - P(x))\,dx.$$

Последнее, согласно (23), представляется в виде

$$R(u,\ v) = \frac{1}{v-u}\int_u^v R(x)\,dx = R(x^*), \tag{49}$$

где

$$u < x^* < v.$$

Из (41) и (49) следует

$$R(u,\ v) = \frac{(x^*-x_1)\ldots(x^*-x_n)}{n!} f^{(n)}(x_*^*), \tag{50}$$

причем

$$a < x_*^* < b.$$

По условиям выбора аппроксимации

$$R(a_k,\ b_k) = 0,$$

откуда видно, что x^* в правой части (49) является в этом случае значением аргумента, при котором $R(x)$ обращается в нуль в промежутке (a_k, b_k), т. е.

$$x^* = x_k.$$

Множитель $x^* - x_k$ обращается в нуль, когда интервал (u, v) совпадает с (a_k, b_k).

Полученное выражение погрешности аппроксимации, доставляемой приближением (46), позволяет оценить погрешность неравенством

$$|R(u, v)| < \frac{(b-a)^n}{n!} M. \tag{51}$$

При симметричном расположении значений x_k относительно середины интервала (a, b) оценка погрешности уточняется неравенством

$$|R(u, v)| < \frac{(b-a)^n}{2^n n!} M. \tag{52}$$

В частном случае, когда интервалы (a_k, b_k) характеризуются условиями (15), (16), интересно рассмотреть функцию Стеклова

$$F(w) = \frac{1}{2h} \int_{w-h}^{w+h} f(x)\, dx. \tag{53}$$

Ее приближенное выражение доставляет правая часть равенства (47), где $p_{k,s}$ дается равенством (18), а

$$\overline{x_s(w-h,\ w+h)} = \frac{(w+h)^{s+1} - (w-h)^{s+1}}{2(s+1)h}$$

или

$$\overline{x_s(w-h,\ w+h)} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \frac{1}{s+1} \binom{s+1}{2i+1} w^{s-2i} h^{2i}. \tag{54}$$

В рассматриваемом случае правая часть равенства (47) может быть значительно преобразована. Определитель Δ, как указано выше, выражается равенством

$$\Delta = \| c_k^s \| = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (c_j - c_i).$$

Производя во втором определителе правой части равенства (47) преобразования, указанные для аналогичного случая в разделе 2, приходим к следующему приближенному равенству:

$$F(w) \approx \frac{(-1)^{n-1}}{\Delta} \begin{vmatrix} 1, & w, & \ldots, & w^{n-1}, & 0 \\ 1, & c_1, & \ldots, & c_1^{n-1}, & \bar{y}_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & c_n, & \ldots, & c_n, & \bar{y}_n \end{vmatrix} \tag{55}$$

или

$$F(w) \approx \sum_{t=1}^{n} \bar{y}_t L_t(w) = L(w), \tag{56}$$

где $L_t(w)$ определяется равенством (27).

Равенство (56) показывает, что функция Стеклова аппроксимируется в рассматриваемом случае интерполирующим полиномом Лагранжа. Этот результат получается непосредственно, если заметить, что в рассматриваемом случае

$$F(c_k) = \bar{y}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Выражение погрешности приближенного равенства (56) дается, согласно (50), равенством

$$R(w-h,\ w+h)=\frac{(w^*-w_1)\ldots(w^*-w_n)}{n!}\ f^{(n)}(w_*^*),\qquad(57)$$

где

$$|w^*-w|<h,\ |w_k-c_k|<h,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

и

$$a<w_*^*<b.$$

Множитель w^*-w_k в выражении погрешности обращается в нуль при $w=c_k$. В рассматриваемом случае выражение погрешности может быть представлено и в иной форме:

$$R(w-h,\ w+h)=\frac{(w-c_1)\ldots(w-c_n)}{n!}F^{(n)}(w_*),\qquad(58)$$

где $a+h<w_*<b-h$ как остаточный член в интерполяционной формуле Лагранжа для функции $F(w)$.

Принимая во внимание

$$F^{(n)}_{(w_*)}=\frac{f^{(n-1)}(w_*+h)-f^{(n-1)}(w_*-h)}{2h}=f^{(n)}(w_{**}),$$

где $a<w_*-h<w_{**}<w_*+h<b$,
можно представить выражение остаточного члена равенством

$$R(w-h,\ w+h)=\frac{(w-c_1)\ldots(w-c_n)}{n!}f^{(n)}(w_{**}).\qquad(59)$$

5. Полученные результаты можно выразить в несколько иной форме, рассматривая вместо среднего значения $\overline{y(u,\ v)}$ функцию интервала

$$Y(u,\ v)=\int_u^v f(x)\,dx,\qquad(60)$$

связанную со средним значением соотношением

$$Y(u,\ v)=(v-u)\,\overline{y(u,\ v)}.\qquad(61)$$

Параболическая аппроксимация значения $Y(u,\ v)$ по заданным значениям

$$Y(a_k,\ b_k)=Y_k,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\qquad(62)$$

где $a\leqslant a_1<b_1\leqslant a_2<b_2\leqslant\ldots\leqslant a_n<b_n\leqslant b$ доставляется приближенным равенством

$$Y(u,\ v)\approx\frac{(-1)^{n-1}}{\Delta_*}\begin{vmatrix} X_0(u,\ v), & X_1(u,\ v), & \ldots, & X_{n-1}(u,\ v), & 0\\ P_{1,0}, & P_{1,1}, & \ldots, & P_{1,n-1}, & Y_1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ P_{n,0}, & P_{n,1}, & \ldots, & P_{n,n-1}, & Y_n \end{vmatrix},\qquad(63)$$

в котором

$$X_s(u,\ v)=(v-u)\,\overline{x_s(u,\ v)},\ s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\qquad(64)$$

и

$$P_{k,s}=(b_k-a_k)\,p_{k,s},\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.\qquad(65)$$

Величина

$$\Delta_* = \| P_{k,s} \| \tag{66}$$

связана с Δ соотношением

$$\Delta_* = \Delta \cdot \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \tag{67}$$

и

$$Y_k = (b_k - a_k)\, \bar{y}_k. \tag{68}$$

Равенство (63) непосредственно следует из (46), (47) при замене в правой части последнего равенства величин $x_s(u, v)$, $p_{k,s}$, $\bar{y}_k$ и Δ их выражениями через $X_s(u, v)$, $P_{k,s}$, Y_k, Δ_*.

Равенство (63) может быть представлено в виде

$$Y(u, v) \approx \sum_{k=1}^{n} Y_k P_k(u, v), \tag{69}$$

где

$$P_k(u, v) = (-1)^k \sum_{s=1}^{n} (-1)^s \frac{\Delta^*_{k,s}}{\Delta_*} X_{s-1}(u, v). \tag{70}$$

В частном случае, когда

$$a_k = c_k - h,\ b_k = c_k + h,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

величина

$$Y(w - h, w + h) \approx \sum_{k=1}^{n} Y_k L_k(w), \tag{71}$$

как то следует из (56).

Среднее значение $\overline{y(u, v)}$ функции $y = f(x)$ в промежутке (u, v) является функцией интервала. Средние значения $\overline{y(u, v)}$ вместе с $Y(u, v)$ являются примером функции области.

Полученные равенства (69), (71) показывают, как в рамках параболической аппроксимации может быть трактована задача интерполирования для функции линейной области. Параболическое интерполирование функции многомерной области будет рассмотрено в дальнейших исследованиях.