Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова
т. XLIII, вып. 3, 1964 г.

УДК 517.522 и 517.558

О СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА В. БОРХАРДТА

М. И. Вейнгер

Алгоритм В. Борхардта, представляющий обобщение алгоритма среднего арифметико-геометрического, впервые введен в рассмотрение Борхардтом [1, 2], а затем изучался И. Хеттнером [3].

В этих работах среднее Борхардта изучалось для действительных положительных начальных аргументов. Исследованию среднего Борхардта от комплексных начальных элементов посвящена работа Г. Гепперта [4]. Доказательство сходимости алгоритма Борхардта проводится Геппертом на основании геометрических соображений.

В настоящей статье дается аналитическое доказательство сходимости алгоритма Борхардта и рассмотрены случаи вырождения алгоритма.

В соответствии с исследованием А. М. Журавского для алгоритма среднего арифметико-геометрического[1] алгоритм Борхардта определяется системой равенств

$$\left.\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{4}(a_n + b_n + c_n + d_n);\\ b_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n b_n} + \sqrt{c_n d_n}\right);\\ c_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n c_n} + \sqrt{b_n d_n}\right);\\ d_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n d_n} + \sqrt{b_n c_n}\right)\\ & n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

и

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad c_0 = c, \quad d_0 = d,$$

где a, b, c, d — произвольные комплексные числа.

Система равенств (1) определяет по заданным числам последовательности

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots; \qquad (A)$$

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots; \qquad (B)$$

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots; \qquad (C)$$

$$d_0,\ d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_n,\ \ldots \qquad (D)$$

[1] См. в настоящем сборнике А. М. Журавский. Алгоритм среднего арифметико-геометрического.

Возможность двоякого выбора корня создает бесчисленное множество последовательностей (A), (B), (C), (D), и нетрудно видеть, что совокупность их имеет мощность континуума. Среди этих последовательностей выделяется главная, при образовании которой соблюдается правило выбора значения корня, характеризуемое неравенствами

$$\left.\begin{array}{c} R\left(\frac{\sqrt{a_nb_n}}{a_n}\right)\geqslant 0,\ R\left(\frac{\sqrt{a_nc_n}}{a_n}\right)\geqslant 0,\ R\left(\frac{\sqrt{a_nd_n}}{a_n}\right)\geqslant 0; \\ R\left(\frac{\sqrt{b_nc_n}}{b_n}\right)\geqslant 0,\ R\left(\frac{\sqrt{b_nd_n}}{b_n}\right)\geqslant 0,\ R\left(\frac{\sqrt{c_nd_n}}{c_n}\right)\geqslant 0, \\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \end{array}\right\} \qquad (R)$$

где $R(z)$ — вещественная часть числа z.

Значения корней, отвечающие неравенствам (R), назовем регулярными, а само неравенство — условием регулярности. Последовательности (A), (B), (C), (D) распадаются на два класса. К первому классу относятся последовательности, где условие регулярности (R) выбора значения корня нарушается конечное число раз. Такие последовательности будем называть регулярными. Совокупность регулярных последовательностей счетная. Второй класс составляют иррегулярные последовательности, где правило (R) регулярности выбора значения корня нарушается бесчисленное множество раз.

Докажем сходимость последовательностей (A), (B), (C), (D), если эти последовательности регулярны. Для оценки близости членов последовательностей (A) и (B), (A) и (C), (A) и (D) служит разность их общих членов:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta'_n=a_n-b_n; \\ \Delta''_n=a_n-c_n; \\ \Delta'''_n=a_n-d_n. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

В силу равенств (1), определяющих алгоритм Борхардта,

$$\Delta'_{n+1}=a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n+b_n+c_n+d_n)-$$

$$-\frac{1}{2}(\sqrt{a_nb_n}+\sqrt{c_nd_n})=\frac{1}{4}\left[(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})^2+(\sqrt{c_n}-\sqrt{d_n})^2\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}(a_n-b_n)+\frac{\sqrt{c_n}-\sqrt{d_n}}{\sqrt{c_n}+\sqrt{d_n}}(c_n-d_n)\right].$$

Обозначим

$$\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}=k'_n,\quad \frac{\sqrt{c_n}-\sqrt{d_n}}{\sqrt{c_n}+\sqrt{d_n}}=l'_n,$$

где $|k'_n|\leqslant 1$ и $|l'_n|\leqslant 1$ при выполнении условия регулярности (R). Тогда

$$|\Delta'_{n+1}|<\frac{1}{4}\{|a_n-b_n|+c_n-d_n|\}=$$

$$=\frac{1}{4}\{|\Delta'_n|+|\Delta'''_n-\Delta''_n|\}\leqslant\frac{1}{4}\{|\Delta'_n|+|\Delta''_n|+|\Delta'''_n|\}<\frac{3}{4}M_n,$$

где $M_n=\max(|\Delta'_n|,\ |\Delta''_n|\,|\Delta'''_n|)$.

Итак,

$$|\Delta'_{n+1}|<\frac{3}{4}M_n.$$

Рассуждая таким же образом, получим:

$$\left.\begin{aligned} |\Delta''_{n+1}| &< \frac{3}{4} M_n; \\ |\Delta'''_{n+1}| &< \frac{3}{4} M_n. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Если при переходе от членов последовательности с номером m к членам с номером $m+s$ соблюдается условие регулярности (R), то в силу (3):

$$\left.\begin{aligned} |\Delta'_{m+s}| &< \left(\frac{3}{4}\right)^s M_m; \\ |\Delta''_{m+s}| &< \left(\frac{3}{4}\right)^s M_m; \\ |\Delta'''_{m+s}| &< \left(\frac{3}{4}\right)^s M_m. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Неравенства (4) показывают, что для регулярных последовательностей, где s можно увеличивать неограниченно,

$$\lim_{s\to\infty} \Delta'_{m+s} = 0, \quad \lim_{s\to\infty} \Delta''_{m+s} = 0, \quad \lim_{s\to\infty} \Delta'''_{m+s} = 0$$

или

$$\lim_{n\to\infty} \Delta'_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \Delta''_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \Delta'''_n = 0 \tag{5}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0. \tag{5'}$$

Следовательно, последовательности (B), (C), (D) имеют предел, общий с последовательностью (A), если последний существует. Вопрос о сходимости последовательности (A) приводится к рассмотрению разности

$$a_{m+p} - a_m = (a_{m+1} - a_m) + (a_{m+2} - a_{m+1}) + \ldots + (a_{m+p} - a_{m+p-1}).$$

В силу соотношения (1) можно записать

$$a_{m+s+1} - a_{m+s} = \frac{1}{4}(a_{m+s} + b_{m+s} + c_{m+s} + d_{m+s}) -$$

$$- a_{m+s} = -\frac{1}{4}[(a_{m+s} - b_{m+s}) + (a_{m+s} - b_{m+s}) + (a_{m+s} - d_{m+s})] =$$

$$= -\frac{1}{4}(\Delta'_{m+s} + \Delta''_{m+s} + \Delta'''_{m+s})$$

и рассматриваемая разность может быть представлена в виде

$$a_{m+p} - a_m = -\frac{1}{4}\sum_{s=0}^{p-1}(\Delta'_{m+s} + \Delta''_{m+s} + \Delta'''_{m+s}). \tag{6}$$

Неравенство

$$|a_{m+p} - a_m| \leqslant \frac{1}{4}\sum_{s=0}^{p-1}(|\Delta'_{m+s}| + |\Delta''_{m+s}| + |\Delta'''_{m+s}|),$$

вытекающее из (6), совместно с (4) дает оценку

$$|a_{m+p} - a_m| \leqslant \frac{3}{4}\sum_{s=0}^{p-1}\left(\frac{3}{4}\right)^s M_m < 3M_m, \tag{7}$$

если при переходе от a_m к a_{m+p} соблюдается условие регулярности. В частности, для регулярной последовательности неравенство (7) выполняется при $m>m_0$, где m_0 для каждой регулярной последовательности имеет индивидуальное значение.

Пусть ε — произвольно заданное положительное число. На основании (5) и (7) для регулярной последовательности выполняется неравенство

$$|a_{m+p}-a_m|<\varepsilon,$$
$$m>N, \tag{8}$$

где N — выбрано в соответствии с ε;

p — произвольное целое число.

Неравенство (8) доказывает существование предела регулярной последовательности (A).

Из соотношений

$$b_n=a_n-\Delta_n'$$
$$c_n=a_n-\Delta_n'';$$
$$d_n=a_n-\Delta_n'''$$

в силу доказанного следует существование пределов регулярных последовательностей (B), (C), (D), причем

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty} c_n=\lim_{n\to\infty} d_n=\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Регулярные последовательности имеют предел, и притом общий.

Докажем, что если последовательности (A), (B), (C), (D) имеют предел, отличный от нуля, то они регулярны.

Пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty} c_n=\lim_{n\to\infty} d_n=A\neq 0. \tag{9}$$

Тогда, начиная с достаточно большого n,

$$a_n=A+\varepsilon_1,\quad b_n=A+\varepsilon_2,\quad c_n=A+\varepsilon_3,\quad d_n=A+\varepsilon_4,$$
$$\sqrt{a_nb_n}=\pm A+\varepsilon',\quad \sqrt{c_nd_n}=\pm A+\varepsilon'', \tag{10}$$

где ε_1, ε_2, ε_3, ε_4. ε', ε'' сколь угодно малы.

Тогда

$$b_{n+1}=\frac{\pm A\pm A}{2}+\frac{\varepsilon'+\varepsilon''}{2}, \tag{11}$$

а, с другой стороны, учитывая (9),

$$b_{n+1}=A+\varepsilon. \tag{12}$$

Сравнивая (12) и (11), замечаем, что при извлечении корня в равенствах (10) необходимо выбирать знак плюс. Отсюда следует, что

$$\frac{\sqrt{a_nb_n}}{a_n}=1+\varepsilon^*,\quad \frac{\sqrt{c_nd_n}}{c_n}=1+\varepsilon_*,$$

где при n достаточно большом ε^* и ε_* сколь угодно малы и

$$R\left(\frac{\sqrt{a_nb_n}}{a_n}\right)>0,\quad R\left(\frac{\sqrt{c_nd_n}}{c_n}\right)>0. \tag{R'}$$

Аналогично покажем, что, начиная с достаточно большого n, знак плюс следует выбирать всегда и для $\sqrt{a_n c_n}$, $\sqrt{b_n d_n}$, $\sqrt{a_n d_n}$, $\sqrt{b_n c_n}$. Тогда при достаточно большом n

$$R\left(\frac{\sqrt{a_n c_n}}{a_n}\right) > 0, \quad R\left(\frac{\sqrt{a_n d_n}}{a_n}\right) > 0, \quad R\left(\frac{\sqrt{b_n d_n}}{b_n}\right) > 0, \quad R\left(\frac{\sqrt{b_n c_n}}{b_n}\right) > 0, \quad (R'')$$

что совместно с неравенством (R′) доказывает регулярность последовательностей.

Рассмотрим случаи вырождения алгоритма Борхардта.

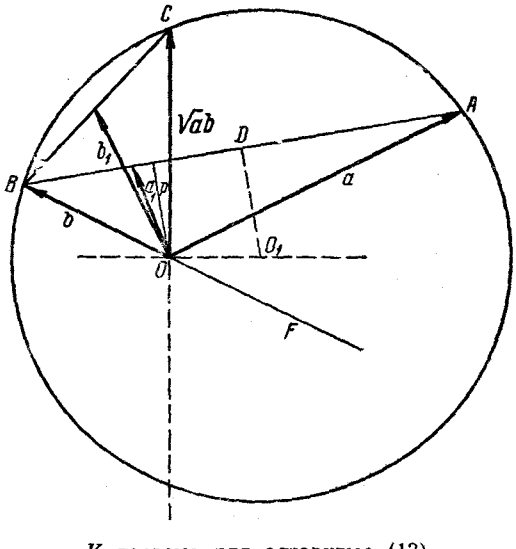
1. Если $a=b$ и $c=d$, то алгоритм Борхардта вырождается в алгоритм среднего арифметико-геометрического.

2. Если $b=c=d\neq a$, то получаем новый алгоритм, определяемый системой равенств

$$\left.\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{3b_n + a_n}{4}; \\ b_{n+1} = c_{n+1} = d_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{b_n^2} + \sqrt{a_n b_n}\right); \\ n &= 0,\ 1,\ 2\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Докажем для алгоритма (13) теорему: предел регулярной последовательности отличен от нуля. Исключение составляют случаи, когда в двух или трех последовательностях одновременно существует член, равный нулю.

Приведем доказательство на основе геометрических соображений (см. рисунок). Не нарушая общности доказательства, можно сказать, что условия (R) начинают выполняться для $n=0$ (в противном случае рассуждение велось бы, начиная с некоторого $n=k$).



К теореме для алгоритма (13)

По данным векторам a и b строим вектор $a_1 = \frac{1}{4}(a+3b)$. Для построения $\sqrt{ab}$ восстановим перпендикуляр DO_1 к отрезку AB из его середины. Проведем биссектрису OC угла AOB и биссектрису OO_1 угла AOF, смежного с углом AOB. Точку O_1 примем за центр окружности, проходящей через точки A и B. Можно доказать, что окружность пересечет биссектрису OC в точках $\pm\sqrt{ab}$. В случае выполнения условий регулярности (R) следует выбрать точку C пересечения окружности с той частью биссектрисы, которая проходит внутри угла AOB. Далее строим вектор $b_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{ab} + \sqrt{b^2}\right)$.

Обозначим расстояние от начала до прямой, соединяющей концы векторов a и b, p. Нетрудно видеть, что среднее арифметическое и среднее геометрическое векторов a и b превосходит по модулю число p. Так как все последующие операции сводятся к нахождению среднего арифметического и среднего геометрического векторов, то $\min(|a_n|, |b_n|, |c_n|, |d_n|) \geqslant p$, что и доказывает теорему.

Докажем, что предел иррегулярных последовательностей равен нулю.

Пусть

$$M_n^* = \max(|a_n|,\ |b_n|,\ |c_n|,\ |d_n|). \tag{14}$$

Из равенств (1), определяющих алгоритм, следует

$$\left.\begin{aligned} |a_{n+1}| &\leqslant \tfrac{1}{4}(|a_n| + |b_n| + |c_n| + |d_n|) \leqslant M_n^*; \\ |b_{n+1}| &\leqslant \tfrac{1}{2}(\sqrt{|a_n||b_n|} + \sqrt{|c_n||d_n|}) \leqslant M_n^*; \\ |c_{n+1}| &\leqslant \tfrac{1}{2}(\sqrt{|a_n||c_n|} + \sqrt{|b_n||d_n|}) \leqslant M_n^*; \\ |d_{n+1}| &\leqslant \tfrac{1}{2}(\sqrt{|a_n||d_n|} + \sqrt{|b_n||c_n|}) \leqslant M_n^*, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

откуда

$$M_{n+1}^* \leqslant M_n^*$$

и вообще

$$M_m^* \leqslant M_n^*,\ m > n. \tag{16}$$

Неравенство (16) выполняется независимо от условий регулярности (R). Пусть при переходе от члена n к $n+1$ условия регулярности нарушаются и, по крайней мере,

$$R\left(\frac{\sqrt{a_n b_n}}{a_n}\right) < 0.$$

Тогда

$$a_{n+2} = \frac{1}{4}(a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} + d_{n+1}) =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{a_n + b_n + c_n + d_n}{4} + \frac{\sqrt{a_n b_n} + \sqrt{c_n d_n}}{2} + c_{n+1} + d_{n+1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2}{2} + \frac{c_n + d_n}{2} + \sqrt{c_n d_n}\right] + c_{n+1} d_{n+1}\right\}$$

и

$$|a_{n+2}| \leqslant \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{|\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}|^2}{2} + \frac{|c_n| + |d_n|}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{|c_n||d_n|}\right] + |c_{n+1}| + |d_{n+1}|\right\}. \tag{17}$$

Оценим $|\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}| \leqslant M_n^* |1 + z_n|^2$, где z_n — комплексное число, модуль которого не превосходит единицы и вещественная часть отрицательна.

Модуль $|1 + z_n|^2 < 2$ и из (17) следует:

$$\left.\begin{aligned} |a_{n+2}| &\leqslant \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\left[M_n^* + \frac{M_n^* + M_n^*}{2} + M_n^*\right] + M_n^* + M_n^*\right\} = \frac{7}{8} M_n^*; \\ |b_{n+2}| &\leqslant M_n^*; \\ |c_{n+2}| &\leqslant M_n^*; \\ |d_{n+2}| &\leqslant M_n^*. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Неравенства (18) выполняются независимо от условий регулярности при переходе от $n+1$ к $n+2$. При указанных условиях справедливы неравенства:

$$\left.\begin{aligned} |a_{n+3}| &\leqslant \frac{1}{4}(|a_{n+2}|+|b_{n+2}|+|c_{n+2}|+|d_{n+2}|) \leqslant k'M_n^*; \\ |b_{n+3}| &\leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{|a_{n+2}||b_{n+2}|}+\sqrt{|c_{n+2}||d_{n+2}|}\right) \leqslant kM_n^*; \\ |c_{n+3}| &\leqslant kM_n^*; \\ |d_{n+3}| &\leqslant kM_n^*; \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где

$$k'=\frac{31}{32} \text{ и } k=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{31}{32}}+1\right).$$

Из (19) следует, что $M_m^* < M_{n+3}^* < kM_n^*$ и вообще при $m>n+3$, согласно (16),

$$M_m^* < M_{n+3}^* < kM_n^*. \tag{20}$$

Положим, что последовательности (A), (B), (C), (D) иррегулярны и что нарушение регулярности происходит на местах с номерами

$$n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots \tag{21}$$

при переходе от n_k к n_{k+1}. При этом можно предполагать, что

$$n_{k+1} \geqslant n_k + 3, \tag{22}$$

ибо в противном случае в последовательности (21) номера, не удовлетворяющие условию (22), могут быть опущены. При этих условиях имеет место неравенство

$$M_{n_{k+1}}^* < kM_{n_k}^*,$$

откуда

$$M_{n_{k+p}}^* < k^p M_{n_k}^* \tag{23}$$

и, в частности,

$$M_{n_s}^* < k^s M_{n_0}^*. \tag{24}$$

Если номер $n > n_s$, то, согласно (24),

$$M_n^* < k^s M_{n_0}^*. \tag{25}$$

Неравенство (25) показывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} M_n^* = 0$.

Таким образом, для иррегулярных последовательностей

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Bohrchardt W. Monatsber. Königl. Akad. Wiss., 1876, S. 611.
2. Bohrchardt W. Abhandlung. Königl. Akad. Wiss., 1878, S. 33.
3. Hettner I. J. reine und angew. Math., 1880, Bd. 89, s. 221; Bd. 112, S. 89.
4. Geppert H. J. reine und angew. Math., 1929, Bd. 161, S. 21.