Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLIII, вып. 3, 1964 г.

УДК 517.522 и 517.535.8

АЛГОРИТМ СРЕДНЕГО АРИФМЕТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО

А. М. Журавский

1. Алгоритм среднего арифметико-геометрического, введенный Гауссом, представляет замечательный пример приближения многозначной трансцендентной функции посредством алгебраической.

В работах Гаусса, опубликованных при его жизни [1], и в оставшихся посмертных материалах [2], почти не уделяется внимания сходимости алгоритма и совсем не рассматривается ветвление его членов.

Комментарии Э. Шеринга [3] и Л. Шлезингера [4] ничего к этому не прибавляют. Пробел восполняют в известной мере работы Л. Давида [5], завершающее исследование которого опубликовано в 1928 г. Однако в исследованиях Л. Давида и последовавших за ним работах [6] вопросы, связанные с алгоритмом, не получили надлежащего освещения, а некоторые его свойства и до сих пор остаются неизвестными.

Целью настоящей работы является устранение пробелов в вопросе сходимости и ветвления алгоритма арифметико-геометрического и необходимые дополнения.

2. Алгоритм среднего арифметико-геометрического определяется системой равенств

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n),\quad b_{n+1}=\sqrt{a_n b_n} \tag{1}$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots$$

и

$$a_0=a,\quad b_0=b. \tag{2}$$

Система равенств (1), (2) определяет по заданным числам a, b последовательности

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \tag{A}$$

и

$$b_0,\ b_1,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots \tag{B}$$

Возможность двоякого выбора значения квадратного корня создает бесчисленное множество последовательностей (A) и (B), и совокупность этих последовательностей имеет мощность континуума.

Среди этих последовательностей выделяется главная, при образовании которой соблюдается правило выбора значения корня, характеризуемое неравенством

$$R\left(\frac{b_{n+1}}{a_n}\right)=R\left(\sqrt{\frac{b_n}{a_n}}\right)\geqslant 0,\quad n=1,\ 2,\ \ldots\ (R),$$

где $R(z)$ — вещественная часть числа z.

Значение корня, соответствующее неравенству (R), назовем регулярным, а само неравенство — условием регулярности. Последовательности (A), (B) распадаются на два класса. К первому классу относятся последовательности, где условие регулярности (R) выбора значения корня нарушается конечное число раз. Такие последовательности будем называть регулярными. В регулярной последовательности, начиная с некоторого номера n, выбор значения корня удовлетворяет условию регулярности. Совокупность регулярных последовательностей счетная. Второй класс последовательностей (A), (B) составляют иррегулярные последовательности, где правило (R) регулярности выбора значения корня нарушается бесчисленное множество раз.

3. Если одна из величин a_k или b_k равна нулю, то последовательности (A), (B) принимают вид:

$$\begin{array}{llllllll} a_0, & a_1, & \ldots, & a_k, & a_{k+1}, & \frac{1}{2}a_{k+1}, & \ldots, & \frac{1}{2^m}a_{k+1}, \ldots \\ b_0, & b_1, & \ldots, & b_k, & 0, & 0, & & 0, \ldots \end{array}$$

откуда следует

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Выясним условия, при которых в одной из последовательностей (A) или (B) появляется член, равный нулю. Если

$$\min(|a_k|, |b_k|) = 0, \tag{3}$$

то либо

$$\min(|a_{k-1}|, |b_{k-1}|) = 0, \tag{4}$$

либо

$$a_{k-1} + b_{k-1} = 0. \tag{5}$$

При наличии (4) таким же образом заключаем, что либо

$$\min(|a_{k-2}|, |b_{k-2}|) = 0, \tag{6}$$

либо

$$a_{k-2} + b_{k-2} = 0. \tag{7}$$

Продолжение рассуждения приводит к заключению о том, что либо

$$\min(|a_0|, |b_0|) = 0, \tag{8}$$

либо при некотором значении $j<k$

$$a_j + b_j = 0. \tag{9}$$

В первом случае

$$a = 0 \text{ или } b = 0; \tag{10}$$

во втором случае при $j=0$

$$a_0 + b_0 = 0,$$

т. е.

$$a + b = 0. \tag{11}$$

При $j > 0$ из (9) следует

$$a_j^2 = b_j^2$$

и в силу (1)

$$a_{j-1} - b_{j-1} = 0. \tag{12}$$

Если $j=1$, то (12) равнозначно равенству

$$a - b = 0. \tag{13}$$

Если $j>1$, то из (12) следует

$$a_{j-1}^2 = b_{j-1}^2$$

и

$$a_{j-2} = b_{j-2}.$$

Последнее равенство при $j=2$ равнозначно (13). Если $j>2$, то повторение подобного рассуждения приводит к заключению, что

$$a = b.$$

Таким образом, появление нулей в последовательностях (A), (B) возможно лишь при условиях (10), (11), (13), т. е. когда одна из величин a или b равна 0 либо когда они оказываются равными или отличаются только по знаку. Получающиеся при этом последовательности имеют члены, которые определяются равенствами

$$\text{I } a_n = \frac{a}{2^n}, \quad b_n = 0, \quad n \geqslant 0;$$

$$\text{II } a_0 = 0, \ a_n = \frac{b}{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad b_0 = b, \quad b_n = 0, \quad n > 0;$$

$$\text{III } a_0 = a_1 = \ldots \ a_{k-1} = a, \ a_k = 0, \ a_{k+s} = \pm \frac{1}{2^s} ai, \ s > 0$$

$$b_0 = b_1 = \ldots \ b_{k-2} = a, \ b_{k-1} = -a, \ b_k = \pm ai, \ b_{k+s} = 0, \ s > 0;$$

$$\text{IV } a_0 = a, \ a_1 = 0, \ a_{s+1} = \pm \frac{1}{2^s} ai, \ s > 0$$

$$b_0 = -a, \ b_1 = \pm ai, \ b_{s+1} = 0, \ s > 0.$$

Во всех случаях, кроме одного,

$$\lim a_n = \lim b_n = 0.$$

Исключительным случаем является главная последовательность при $a=b$

$$a, \ a, \ \ldots, \ a, \ \ldots$$

$$a, \ a, \ \ldots, \ a, \ \ldots$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

Эта последовательность содержится в III и соответствует бесконечно большому значению k.

4. Рассмотренные частные случаи последовательностей (A), (B) дают примеры последовательностей, сходящихся к одному и тому же пределу. Для оценки близости членов последовательностей (A), (B) служит разность их общих членов

$$\Delta_n = a_n - b_n. \tag{14}$$

В силу равенств (1), определяющих алгоритм среднего арифметико-геометрического,

$$\Delta_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2 = \frac{k_n}{2}\Delta_n, \tag{15}$$

где

$$k_n = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}}. \tag{16}$$

При соблюдении условия регулярности (R)

$$|k_n| \leqslant 1 \tag{17}$$

и

$$|\Delta_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|\Delta_n|. \tag{18}$$

Если при переходе от членов последовательностей с номером m к членам последовательностей с номером $m+s$ соблюдается условие регулярности, то в силу (18)

$$|\Delta_{m+s}| \leqslant \frac{1}{2^s}|\Delta_m|. \tag{19}$$

Как следует из неравенства (19), для регулярных последовательностей, где s можно увеличивать неограниченно,

$$\lim_{s\to\infty} \Delta_{m+s} = 0 \tag{20}$$

или

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0. \tag{20'}$$

Вопрос о сходимости последовательности (A) приводится к рассмотрению разности

$$a_{m+p} - a_m = (a_{m+1} - a_m) + (a_{m+2} - a_{m+1}) + \ldots + (a_{m+p} - a_{m+p-1}).$$

Эта разность в силу соотношения

$$a_{m+s+1} - a_{m+s} = -\frac{1}{2}(a_{m+s} - b_{m+s}) = -\frac{1}{2}\Delta_{m+s}$$

может быть представлена в виде

$$a_{m+p} - a_m = -\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{p-1} \Delta_{m+s}. \tag{21}$$

Неравенство

$$|a_{m+p} - a_m| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{p-1} |\Delta_{m+s}|,$$

вытекающее из (21), совместно с (20), дает оценку

$$|a_{m+p} - a_m| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{p-1} \frac{|\Delta_m|}{2^s} < |\Delta_m|, \tag{22}$$

если при переходе от a_m к a_{m+p} соблюдается условие регулярности. В частности, для регулярной последовательности неравенство (22) выполняется при $m > m_0$, где m_0 для каждой регулярной последовательности имеет индивидуальное значение. На основании (20) и (22) для регулярной последовательности неравенство

$$|a_{m+p} - a_m| < \varepsilon \tag{23}$$

(ε — произвольно заданное положительное число) выполняется при $m > M$ (M выбрано надлежащим образом в соответствии ε; p — произвольное целое число). Неравенство (23) доказывает существование предела регулярной последовательности (A). Из соотношения

$$b_n = a_n - \Delta_n$$

в силу доказанного следует существование предела регулярной последовательности (B), причем

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n. \tag{24}$$

Регулярные последовательности (A) и (B) имеют предел, и притом общий.

5. Положим, что

$$M_n = \max(|a_n|, |b_n|). \tag{25}$$

Из равенств (1), определяющих алгоритм, следует

$$|a_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}(|a_n| + |b_n|) \leqslant M_n$$

и

$$|b_{n+1}| = \sqrt{|a_n||b_n|} \leqslant M_n,$$

откуда

$$M_{n+1} \leqslant M_n$$

и вообще

$$M_{n'} \leqslant M_n, \quad n' > n. \tag{26}$$

Неравенство (26) выполняется независимо от условия регулярности. В случае нарушения условия регулярности при переходе от n к $n+1$

$$R\left(\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left[R\left(\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right) + R\left(\sqrt{\frac{b_n}{a_n}}\right)\right] < 0 \tag{27}$$

и

$$R\left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) < 0. \tag{27'}$$

В этом случае

$$|a_{n+2}| = \frac{M_{n+1}}{2}|1 + z_n|, \tag{28}$$

где z_n — комплексное число, модуль которого не превосходит единицы, и вещественная часть отрицательна. Модуль

$$|1 + z_n| < \sqrt{2},$$

и из (28) следует, что

$$|a_{n+2}| < \frac{M_{n+1}}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{M_n}{\sqrt{2}}. \tag{29}$$

Для b_{n+2} имеет место неравенство

$$|b_{n+2}| = \sqrt{|a_{n+1}||b_{n+1}|} \leqslant M_{n+1} \leqslant M_n. \tag{30}$$

Неравенства (29) и (30) выполняются независимо от удовлетворения условия регулярности при переходе от $n+1$ к $n+2$. При указанных условиях справедливо неравенство

$$|a_{n+3}| \leqslant \frac{1}{2}[|a_{n+2}| + |b_{n+2}|] < KM_n, \tag{31}$$

где

$$K = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}8,$$

и неравенство

$$|b_{n+3}| = \sqrt{|a_{n+2}||b_{n+2}|} < \frac{1}{\sqrt[4]{2}} M_n. \tag{32}$$

Из (31) и (32)

$$M_{n+3} < KM_n. \tag{33}$$

Вообще при

$$n' \geqslant n+3,$$

согласно (26),

$$M_{n'} \leqslant M_{n+3} < KM_n. \tag{34}$$

Положим теперь, что последовательности (A), (B) иррегулярны и нарушение регулярности происходит на местах с номерами

$$n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots \tag{35}$$

при переходе от n_k к n_{k+1} ($k = 0, 1, \ldots$). Можно при этом предположить

$$n_{k+1} \geqslant n_k + 3, \tag{36}$$

ибо в противном случае в последовательности (35) номера n_{k+1}, не удовлетворяющие условию (36), могут быть опущены. При этих условиях

$$M_{n_{k+1}} < KM_{n_k},$$

откуда

$$M_{n_{k+p}} < K^p M_{n_k}, \tag{37}$$

и, в частности,

$$M_{n_s} < K^s M_{n_0}. \tag{38}$$

Если номер $n > n_s$, то, согласно (26),

$$M_n < K^s M_{n_0}. \tag{39}$$

Неравенство (39) показывает, что

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0.$$

Таким образом, для иррегулярных последовательностей

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{40}$$

6. Если для иррегулярных последовательностей пределом является нуль, каковы бы ни были начальные значения a и b, то в случае регулярной последовательности нуль может быть пределом лишь в отмеченных выше исключительных случаях. К такому заключению приводит рассмотрение изменения величины

$$m_n = \min(|a_n|, |b_n|) \tag{41}$$

в условиях регулярности.

При переходе от n-х членов последовательностей (A), (B) к $n+1$-м в условиях регулярности

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{a_n b_n}\left[p_n \cos\frac{\omega_n}{2} + iq_n \sin\frac{\omega_n}{2}\right], \tag{42}$$

где

$$p_n = \left|\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right| + \left|\sqrt{\frac{b_n}{a_n}}\right|, \quad q_n = \left|\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right| - \left|\sqrt{\frac{b_n}{a_n}}\right|$$

и

$$\frac{a_n}{b_n} = \left|\frac{a_n}{b_n}\right| e^{i\omega_n}, \quad |\omega_n| < \pi. \tag{43}$$

Из (42) следует, что

$$|a_{n+1}| \geqslant \sqrt{|a_n||b_n|}\cos\frac{\omega_n}{2} \geqslant m_n\cos\frac{\omega_n}{2}. \tag{44}$$

Наряду с (44) имеет место неравенство

$$|b_{n+1}| = \sqrt{|a_n|\,|b_n|} \geqslant m_n. \tag{45}$$

Неравенства (44) и (45) приводят к заключению

$$m_{n+1} \geqslant m_n\cos\frac{\omega_n}{2}. \tag{46}$$

Из (42) следует

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(p_n\cos\frac{\omega_n}{2} + iq_n\sin\frac{\omega_n}{2}\right)$$

или

$$\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right| e^{i\omega_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(p_n\cos\frac{\omega_n}{2} + iq_n\sin\frac{\omega_n}{2}\right). \tag{47}$$

Как следует из равенства (47),

$$\operatorname{tg}\omega_{n+1} = \frac{q_n}{p_n}\operatorname{tg}\omega_n. \tag{48}$$

Из равенства (48) вытекает неравенство

$$|\operatorname{tg}\omega_{n+1}| < \left|\operatorname{tg}\frac{\omega_n}{2}\right| \tag{49}$$

или

$$|\omega_{n+1}| < \frac{|\omega_n|}{2}. \tag{50}$$

При соблюдении условия регулярности перехода от n-х членов к $n+p$-м имеет место, согласно (46), неравенство

$$m_{n+p} \geqslant m_n\cos\frac{\omega_n}{2}\cos\frac{\omega_{n+1}}{2}\ldots\cos\frac{\omega_{n+p-1}}{2}. \tag{51}$$

При тех же условиях выполняются неравенства

$$|\omega_{n+s}| < \frac{|\omega_n|}{2^s},\quad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ p. \tag{52}$$

Неравенства (51) и (52) позволяют сделать заключение:

$$m_{n+p} \geqslant m_n\cos\frac{\omega_n}{2}\cos\frac{\omega_n}{2^2}\ldots\cos\frac{\omega_n}{2^p}. \tag{53}$$

Приняв во внимание, что

$$\prod_{s=1}^{p}\cos\frac{\omega_n}{2^s} \geqslant \prod_{s=1}^{\infty}\cos\frac{\omega_n}{2^s} = \frac{\sin\omega_n}{\omega_n},$$

получаем

$$m_{n+p} \geqslant \frac{\sin\omega_n}{\omega_n}m_n,\quad p > 0. \tag{54}$$

Как следует из этого неравенства, m_{n+p} остается ограниченным снизу при неограниченном возрастании p, и поэтому для регулярной последовательности

$$\lim_{p\to\infty} a_{n+p} = \lim b_{n+p} \geqslant \frac{\sin\omega_n}{\omega_n}m_n. \tag{55}$$

Этот предел отличен от нуля при условии

$$|\omega_n| < \pi.$$

Если

$$|\omega_n| = \pi$$

и

$$a_n \neq -b_n,$$

то

$$a_{n+1} \neq 0$$

и

$$|\omega_{n+1}| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

В этом случае неравенство (55) может быть заменено неравенством

$$\lim_{p\to\infty} a_{n+p} = \lim_{p\to\infty} b_{n+p} \geqslant \frac{\sin\omega_{n+1}}{\omega_{n+1}} m_{n+1}, \tag{56}$$

из которого следует, что в последнем случае предел регулярной последовательности отличен от нуля.

7. Предел регулярной последовательности для исходных значений a и b будет в дальнейшем обозначаться знаком

$$\mathfrak{M}(a,\ b) = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n, \tag{57}$$

предел главной последовательности — знаком

$$M(a,\ b) = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{58}$$

Пределы последовательностей алгоритма среднего арифметико-геометрического являются функцией величин a и b. Функция $\mathfrak{M}(a,\ b)$ бесконечно многозначна и имеет счетное число ветвей.

Функцию $\mathfrak{M}(a,\ b)$ естественно назвать функцией среднего арифметико-геометрического. Она может обращаться в нуль лишь при

$$a = 0,\ b = 0,\ a \pm b = 0. \tag{59}$$

При этом главная ветвь $M(a,\ b)$ обращается в нуль только при

$$a = 0,\ b = 0,\ a + b = 0.$$

При $a = b$ главная ветвь

$$M(a,\ b) = a. \tag{60}$$

Если рассматривать значения функции $\mathfrak{M}(a,\ b)$ при фиксированных значениях величин a и b, то все значения $\mathfrak{M}(a,\ b)$, соответствующие регулярным последовательностям, где условие регулярности нарушено достаточно большое число раз, удовлетворяют неравенству

$$|\mathfrak{M}(a,\ b)| < \varepsilon, \tag{61}$$

где ε — заданное положительное число.

Число σ нарушений условия регулярности в последовательности, приводящей к неравенству (61), зависит от ε. Из равенства (39) следует, что

$$|\mathfrak{M}(a,\ b)| < K^s M,$$

если

$$3s < \sigma.$$

При

$$\sigma > 3\,\frac{\ln(\varepsilon : M)}{\ln K} \tag{62}$$

неравенство (61) удовлетворяется. Для любой ветви $\mathfrak{M}(a, b)$ оно выполняется, когда

$$m = \min(|a|, |b|)$$

будет достаточно мало при фиксированном

$$M = \mathrm{Max}(|a|, |b|).$$

В самом деле, при

$$M \leqslant \varepsilon \tag{63}$$

неравенство (61) является следствием (26). Если же неравенство (63) не выполняется, т. е.

$$M > \varepsilon,$$

то можно воспользоваться неравенствами

$$|a_n| < \frac{M}{2^n} + m^{\frac{1}{2^{n-1}}} M^{1-\frac{1}{2^{n-1}}} \tag{64}$$

и

$$|b_n| \leqslant m^{\frac{1}{2^n}} M^{1-\frac{1}{2^n}}, \tag{65}$$

справедливость которых, начиная с $n=1$, проверяется переходом от n к $n+1$.

Выбрав определенное значение n, удовлетворяющее условию

$$M : \varepsilon < 2^{n-1}, \tag{66}$$

и назначив столь малое значение m, чтобы удовлетворялось неравенство

$$m < M\left(\frac{\varepsilon}{M\sqrt{2}}\right)^{2^n}, \tag{67}$$

выводим из неравенства (64)

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2M} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

и из (65)

$$|b_n| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \varepsilon.$$

Полученные неравенства показывают, что, согласно (26), должно выполняться неравенство (61). Из неравенств (66) и (67) нетрудно вывести, что неравенство (61) выполняется при

$$m < \omega(M, \varepsilon), \tag{68}$$

где

$$\omega(M, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left(\frac{\varepsilon}{M\sqrt{2}}\right)^{\frac{4M}{\varepsilon}-1}.$$

Действительно, наименьшее значение n, удовлетворяющее (66), определяется равенством

$$n = \left[\ln \frac{2M}{\varepsilon} : \ln 2\right] + 1, \tag{69}$$

где знак $[x]$ обозначает целую часть числа x. При выборе n, согласно (69),

$$2^n = \frac{2M}{\varepsilon}\theta, \quad 1 < \theta \leqslant 2$$

Л Г У
Библиотека

и

$$m < M\left(\frac{\varepsilon}{M\sqrt{2}}\right)^{\frac{2M}{\varepsilon}\,6}. \tag{70}$$

Значение m, выбранное по условию (68), удовлетворяет неравенство (70) и равносильное неравенство (67). Полученный результат допускает дальнейшее расширение. Если при фиксированном M в регулярной последовательности m_n удовлетворяет неравенство (68), то соответствующее значение функции $\mathfrak{M}(a, b)$ этой последовательности удовлетворяет неравенство (61). В самом деле, если

$$M_n \leqslant \varepsilon,$$

то неравенство (61) следует из (26). Если же

$$M_n > \varepsilon,$$

то из неравенства

$$M \geqslant M_n$$

следует, что

$$\left(\frac{\varepsilon}{M_n\sqrt{2}}\right)^{\frac{4M_n}{\varepsilon}-1} > \left(\frac{\varepsilon}{M\sqrt{2}}\right)^{\frac{4M}{\varepsilon}-1}$$

и для m_n выполняется неравенство

$$m_n < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left(\frac{\varepsilon}{M_n\sqrt{2}}\right)^{\frac{4M_n}{\varepsilon}-1} = \omega(M_n, \varepsilon),$$

откуда

$$|\mathfrak{M}(a, b)| = |\mathfrak{M}(a_n, b_n)| < \varepsilon.$$

Малые величины членов последовательностей (A) и (B) получаются при больших перерывах между номерами членов, где последовательно нарушается условие регулярности. Пусть переход от членов с номером n к членам с номером $n+p-1$ происходит при условии регулярности, а при переходе от членов с номером $n+p-1$ к членам с номером $n+p$ условие регулярности нарушается. В этом случае

$$a_{n+p+1} = \frac{a_{n+p-1} + b_{n+p-1} - 2\sqrt{a_{n+p-1}b_{n+p-1}}}{4} = \frac{k_{n+p-1}}{4}\Delta_{n+p-1},$$

откуда, согласно (17) и (19),

$$|a_{n+p+1}| \leqslant \frac{1}{4}|\Delta_{n+p-1}| < \frac{|\Delta_n|}{2^{p+1}}. \tag{71}$$

Неравенство

$$|\Delta_n| < |a_n| + |b_n| \leqslant 2M_n \leqslant 2M$$

позволяет получить из (71) неравенство

$$|a_{n+p+1}| < \frac{M}{2^p},$$

откуда

$$m_{n+p+1} < \frac{M}{2^p}. \tag{72}$$

Если число p настолько велико, что

$$\frac{M}{2^p} \leqslant \omega(M, \varepsilon),$$

то

$$m_{n+p+1} < \omega(M, \varepsilon)$$

и

$$|\mathfrak{M}(a, b)| < \varepsilon.$$

Значения p, обеспечивающие выполнение последнего неравенства, определяются условием

$$p \geqslant \ln \frac{M}{\omega(M, \varepsilon)} : \ln 2. \tag{73}$$

Положив

$$\tau = \left[\ln \frac{M}{\omega(M, \varepsilon)} : \ln 2\right] + 1, \tag{74}$$

можно в силу сказанного утверждать, что при наличии не менее τ последовательных регулярных переходов, предшествующих нарушению регулярности, соответствующая ветвь $\mathfrak{M}(a, b)$ удовлетворяет неравенству (61). Для выполнения неравенства

$$|\mathfrak{M}(a, b)| \geqslant \varepsilon \tag{75}$$

необходимо, чтобы регулярные последовательности (A) и (B), пределом которых является $\mathfrak{M}(a, b)$, имели не больше σ нарушений регулярности, причем число регулярных переходов между двумя последовательными нарушениями регулярности или началом последовательностей и первым нарушением регулярности не должно превышать τ.

Число σ, согласно (62), определяется неравенством

$$\sigma = \left[3 \frac{\ln(\varepsilon : M)}{\ln K}\right], \tag{76}$$

а τ характеризуется равенством (74). Число подобных последовательностей не превышает

$$N = \tau^{\sigma}.$$

Таким образом, при фиксированных значениях a и b лишь конечное число ветвей $\mathfrak{M}(a, b)$ имеет значение, по модулю превосходящее заданную величину ε.

Если значения a и b остаются в некоторой области T, где

$$\max|a| \leqslant a^*, \quad \max|b| \leqslant b^*,$$

то соответствующее им число

$$M \leqslant M^*,$$

где

$$M^* = \operatorname{Max}(a^*, b^*).$$

Учитывая, что

$$\omega(M^*, \varepsilon) \leqslant \omega(M, \varepsilon),$$

нетрудно заключить, что для всех точек области T

$$\tau \leqslant \tau^*, \tag{77}$$

где

$$\tau^* = \left[\ln \frac{M^*}{\omega(M^*, \varepsilon)} : \ln 2\right] + 1.$$

Точно так же справедливо неравенство

$$\sigma \leqslant \sigma^*, \tag{78}$$

где

$$\sigma^* = \left[3 \frac{\ln(\varepsilon : M^*)}{\ln K}\right].$$

Таким образом, значения, превосходящие по модулю ε, могут в области T принимать лишь те ветви функции $\mathfrak{M}(a, b)$, для которых имеют место неравенства (77) и (78). Число таких ветвей не превосходит

$$N^* = \tau^{*\tau^*}.$$

Следовательно, лишь ограниченное число ветвей $\mathfrak{M}(a, b)$ может принимать в области T значения, превосходящие по модулю ε. Отметим, что

$$|a_n| \leqslant a_n^*, \quad |b_n| \leqslant b_n^*, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{79}$$

где a_n^* и b_n^* — члены главной последовательности среднего арифметико-геометрического, построенной для начальных значений a^* и b^*.

Из (79) следует, что

$$|\mathfrak{M}(a, b)| \leqslant M(a^*, b^*). \tag{80}$$

8. Функция $\mathfrak{M}(a, b)$ есть однородная функция a и b, как то следует из равенств

$$\mathfrak{M}(ta, tb) = \lim_{n\to\infty} ta_n = t \lim_{n\to\infty} a_n = t\mathfrak{M}(a, b). \tag{81}$$

Изучение ее в силу соотношения

$$\mathfrak{M}(a, b) = a\mathfrak{M}\left(1, \frac{b}{a}\right) \tag{82}$$

приводится к исследованию функции

$$\mathfrak{M}(1, z) = \mathfrak{M}(z). \tag{83}$$

Функция $\mathfrak{M}(z)$ является общим пределом последовательностей (A), (B), где $a_0 = 1$ и $b_0 = z$. Члены последовательностей

$$a_n = \varphi_n(z), \quad b_n = \psi_n(z)$$

— алгебраические функции z. Функция $\varphi_n(z)$ имеет 2^{n-1} ветвей, функция $\psi_n(z)$ имеет 2^n ветвей.

Точками разветвления могут быть лишь те значения z, где $\psi_{n-1}(z)$ или $\varphi_{n-1}(z)$ обращаются в нуль. Анализ, приведенный в разделе 3, показывает, что такими значениями являются

$$z = 0, \quad z = \pm 1.$$

В области точки $z = 0$ функции $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ представляются разложениями

$$\varphi_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k} z^{\mu_{n,k}} \tag{84}$$

и

$$\psi_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{n,k} z^{\nu_{n,k}}, \tag{85}$$

где

$$\mu_{n,k} = \frac{k}{2^{n-1}}, \quad \nu_{n,k} = \frac{k}{2^n},$$

а коэффициенты

$$\alpha_{n,0} = \frac{1}{2^n}, \quad \beta_{n,1} = 2^{-n+2-2^{-n+1}} e^{2^{-n+1}\lambda\pi i}.$$

Число λ пробегает полную систему несравнимых вычетов по модулю 2^n. В области точки $z=-1$ функции $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ представляются разложениями

$$\varphi_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,k}(z+1)^{\mu_{n,k}}; \tag{86}$$

$$\psi_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{n,k}(z+1)^{\nu_{n,k}}, \tag{87}$$

где

$$\mu_{n,k}=\frac{k}{2^{n-2}},\ n>2,\quad \nu_{n,k}=\frac{k}{2^{n-1}},$$

а коэффициенты

$$\alpha_{n,0}=\pm 2^{-n+1}i,\quad n>1;\quad \alpha_{n,1}=0$$

и

$$\beta_{n,0}=0,\quad n>1;\quad \beta_{n,1}=2^{-n+3-3\cdot 2^{n-1}}ie^{\pm 2^{-n}\pi i},\ n>1.$$

В области точки $z=1$ разветвление функций $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ имеет более сложный характер. Ветви $\varphi_{n,l}(z)$ и $\psi_{n,m}(z)$ функций $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ характеризуются разложениями вида

$$\varphi_{n,l}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{n,l,k}(z-1)^{\mu_{n,l,k}},\ l=1,2,\ \ldots,\ 2^{n-1}; \tag{88}$$

$$\psi_{n,m}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{n,m,k}(z-1)^{\nu_{n,m,k}},\ m=1,2,\ \ldots,\ 2^{n}. \tag{89}$$

Для одних ветвей показатели $\mu_{n,l,k}$ и $\nu_{n,m,k}$ остаются целыми, для других они будут дробными со знаменателями 2^s, где s не превосходит $n-4$ для ветвей $\varphi_{n,l}(z)$ и $s\leqslant n-3$ для ветвей $\psi_{n,m}(z)$.

Если на плоскости комплексного переменного z провести разрезы, соединяющие бесконечно далекую точку с точками -1 и 1, и сделать разрез, соединяющий точку -1 с точкой 0, то на разрезанной плоскости ветви функций $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ будут оставаться однозначными. Такой разрез может быть сделан по вещественной оси (рис. 1).

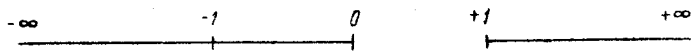


Рис. 1

Все прочие точки плоскости z являются регулярными точками функций $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$. В любой односвязной области, не содержащей внутри точек 0, -1, $+1$, ветви функций $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ однозначны.

Риманова поверхность функции $\varphi_n(z)$ имеет 2^{n-1} лист. Она получается соединением верхнего края разреза k-го ($k=1, 2, \ldots, 2^{n-2}$) листа на участке между точками -1 и 0 с нижним краем разреза $k+1$-го листа на том же участке и соединением верхнего края разреза k-го листа на участке от точки -1 до бесконечности с нижним краем разреза $k+3$-го листа на том же участке. Верхний край последнего листа соединяется с нижним краем первого листа на участке от точки 0 до точки -1. На участке от точки -1 до бесконечности верхний край последнего оставшегося листа соединяется с нижним краем второго. На участке от точки 1 до бесконечности соединение краев разреза производится несколько более сложно. Если разложение ветви $\varphi_{n,l}(z)$ в области точки 1 происходит по целым степеням $z-1$, то верхний и нижний края соответствующего ей листа соединяются и разрез на этом листе

уничтожается. Ветви, которым соответствуют разложения по степеням $(z-1)^{2^{-s}}$, объединяются в группы по 2^s членов. Соответствующие им листы соединяются так, что верхний край разреза листа k-го члена группы соединяется с нижним краем разреза листа $k+1$-го члена и верхний край разреза листа последнего члена группы соединяется с нижним краем разреза листа первого члена группы.

В области точки *1* связанными оказываются только отдельные группы листов римановой поверхности. Ряд ветвей функции $\varphi_n(z)$, которым соответствует склеенный лист, остается регулярным в области точки *1*. К их числу принадлежит главная ветвь. Строение римановой поверхности показывает, что переход от одной ветви $\varphi_n(z)$ к любой другой ее ветви может быть реализован путем соответствующего числа обходов точки 0. Риманова поверхность функции $\psi_n(z)$, содержащая 2^n листов, имеет аналогичный характер.

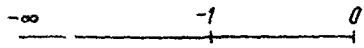


Рис. 2

9. Функция среднего арифметико-геометрического

$$\mathfrak{M}(z)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(z)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(z) \qquad (90)$$

может быть представлена в виде бесконечного ряда

$$\mathfrak{M}(z)=\varphi_0(z)+\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(z)-\varphi_{k-1}(z)]. \qquad (91)$$

В замкнутой односвязной области D плоскости z, не содержащей точек 0, $+1$, -1, члены ряда — однозначные аналитические функции z — не имеют особых точек.

Пусть, начиная с номера n, при составлении последовательности значений $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ условие регулярности выполнено. В силу (19)

$$|\varphi_{n+s+1}(z)-\varphi_{n+s}(z)|=\frac{1}{2}|\psi_{n+s}(z)-\varphi_{n+s}(z)|<\frac{1}{2^{s+1}}|\psi_n(z)-\varphi_n(z)|$$

и, согласно (26),

$$|\psi_n(z)-\varphi_n(z)|\leqslant 2M_n^*(z)\leqslant 2M^*(z),$$

где

$$M_n^*(z)=\operatorname{Max}(|\psi_n(z)|,\ |\varphi_n(z)|)$$

и

$$M^*(z)=\operatorname{Max}(1,\ |z|).$$

Таким образом,

$$|\varphi_{n+s+1}(z)-\varphi_{n+s}(z)|<\frac{M^*(z)}{2^s}<\frac{M_D}{2^s},\quad s=0,\ 1,\ \ldots, \qquad (92)$$

где M_D обозначает наибольшее значение $M^*(z)$ в области D. Неравенство (92) показывает, что ряд (91) сходится равномерно в области D и его сумма является однозначной аналитической функцией z в области D, не имеющей особых точек. Функция $\mathfrak{M}(z)$ бесконечно многозначна на плоскости z, но ее ветви остаются однозначными на плоскости с разрезами (см. рис. 1). Главная ветвь $M(z)$ функции $\mathfrak{M}(z)$ однозначна на плоскости с разрезом только вдоль отрицательной вещественной полуоси (рис. 2).

Риманова поверхность, соответствующая $\mathfrak{M}(z)$, получается предельным переходом из римановой поверхности, соответствующей функциям $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$. Лист римановой поверхности, соответствующей главной ветви $M(z)$, не имеет разреза от точки *1* до бесконечности и сообщается с другими листами вдоль отрицательной вещественной полуоси. Переход с одного листа римановой поверхности на любой дру-

гой ее лист может быть осуществлен в результате обхода точки 0 соответствующее число раз. То, что надлежащий обход точки 0 позволяет перевести заданную ветвь функции $\mathfrak{M}(z)$ в любую другую ее ветвь, доказывается следующим рассуждением.

Образуя последовательность функций $\omega_n(z)$, согласно равенствам

$$\omega_0(z) = z, \tag{93}$$

$$\omega_{n+1}^2(z) = \omega_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{94}$$

сопоставим с ней последовательность чисел α_n ($n = 0, 1, 2 \ldots$). Число α_n определяется равенством

$$\alpha_n = \begin{cases} 0, & R(\omega_n(z)) \geqslant 0 \\ 1, & R(\omega_n(z)) < 0. \end{cases} \tag{95}$$

Каждой бесконечной последовательности

$$\omega_0(z), \ \omega_1(z), \ \ldots, \ \omega_n(z), \ \ldots, \tag{96}$$

определяемой указанным алгоритмом, соответствует некоторое число

$$A = \alpha_0, \ \alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n \ldots,$$

записанное по двоичной системе. В дальнейшем предполагается, что число A имеет конечное число значащих цифр, т. е. что в последовательности (96), начиная с некоторого значения,

$$R(\omega_n(z)) \geqslant 0.$$

Число A позволяет составить суждение о распределении знаков $R(\omega_n(z))$ в последовательности (96). При k-кратном обходе точки 0 в положительном направлении аргумент $\omega_n(z)$ возрастает на величину $2^{-n+1}k\pi$. Если первоначальное значение аргумента z равнялось нулю и при составлении последовательности (96) выбиралось положительное значение корня, то после k-кратного обхода значение аргумента $\omega_n(z)$ становится равным величине $2^{-n+1}k\pi$ и

$$R(\omega_n(z)) \geqslant 0$$

для значений n, удовлетворяющих неравенству

$$2^{n-2} \geqslant k.$$

Представив k в виде

$$k = \sum_{s=0}^{m} k_s 2^s, \quad 0 \leqslant k_s \leqslant 1,$$

имеем

$$2^{-n+1}k\pi = \pi \left\{ \sum_{s=n}^{m} k_s 2^{s-n+1} + k_{n-1} + \frac{1}{2} k_{n-2} + \sum_{s=0}^{n-3} k_s 2^{s-n+1} \right\}. \tag{97}$$

Равенство (97) показывает, что знак $R(\omega_n(z))$ после k-кратного обхода точки 0 характеризуется величиной

$$\pi \left(k_{n-1} + \frac{1}{2} k_{n-2} \right),$$

если не все k_s равны нулю при $s < n-2$, ибо

$$0 < \pi \sum_{s=0}^{n-3} k_s 2^{s-n+1} < \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом,

$$\alpha_n \equiv k_{n-1} + k_{n-2} \ (\mathrm{Mod}\ 2). \tag{98}$$

Значение α_n для заданных значений k_n находится по табл. 1. В том же случае, когда $k_s = 0$ при $s < n-2$ значения α_n для заданных значений k_n находятся по табл. 2.

Таблица 1

k_{n-2}	k_{n-1}	
	0	1
0	0	1
1	1	0

Таблица 2

k_{n-2}	k_{n-1}	
	0	1
0	0	1
1	0	0

Имея разложение k в двоичной системе, легко найти разложение числа A. Наоборот, имея разложение числа A, можно с помощью сравнения (98) получить последовательно значения n и определить k, указывающее число обходов точки 0, в результате которых последовательность (96), соответствующая числу

$$A_0 = 0,\ 00,\ \ldots,\ 0,$$

переходит в последовательность, соответствующую данному A, и обратно. Для ограниченного числа знаков α_n число k конечно, и наоборот.

Переходя к функции $\mathfrak{M}(z)$, рассмотрим регулярные последовательности $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$, пределом которых она является. Последовательностям $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ сопоставим последовательность $\omega_n(z)$. В окрестности точки 0 члены последовательностей $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ в соответствии с разложениями (84) и (85) представляются в виде

$$\varphi_n(z) = \alpha_{n,0} + h_n(z) \tag{99}$$

и

$$\psi_n(z) = \omega_n(z)\,[|\beta_{n-1}| + g_n(z)], \tag{100}$$

где $\alpha_{n,0}$ и $\beta_{n,1}$ — указанные выше постоянные величины, а функции $h_n(z)$ и $g_n(z)$ могут быть сделаны сколь угодно малыми по модулю при $|z|$ достаточно малом. В достаточно малой окрестности D_n точки 0 аргумент $\varphi_n(z)$ как угодно близок к нулю и знак $R\left\{\frac{\psi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)}\right\}$ одинаков со знаком $R\{\omega_{n+1}(z)\}$. Если при переходе от n-х к $n+1$-м членам последовательности $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ нарушается условие регулярности, то $R\{\omega_{n+1}(z)\}$ отрицательно и

$$\alpha_{n+1} = 1.$$

Таким образом, число

$$A = \alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,$$

введенное выше, позволяет судить о нарушениях регулярности. Как показано выше, от A_0 к A можно перейти соответствующим числом обходов точки 0. Следовательно, от $M(z)$ можно перейти к $\mathfrak{M}(z)$ при надлежащем числе обходов точки 0. Любая ветвь $\mathfrak{M}(z)$ является аналитическим продолжением главной ветви $M(z)$. Последнее показывает, что от одной ветви $M(z)$ можно перейти к любой другой аналитическим продолжением.

Вопрос о связи между ветвями $M(z)$, получаемыми в результате аналитического продолжения, послужит предметом отдельного изложения.

В заключение отметим, что значения функции

$$w = \mathfrak{M}(z),$$

соответствующие заданному значению z, дают на плоскости w бесконечную систему точек w_n. Эти точки имеют только одну точку сгущения 0. В самом деле, сколь мало бы ни было заданное положительное число ε, вне круга радиуса ε может лежать, как следует из рассуждений раздела 7, лишь конечное число точек w_n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gauss C. F. Werke Bd. III, 1866, S. 332.
2. Gauss C. F. Werke. Bd. III, 1866, S. 361, 372, 375; Bd. X, 1917, s. 173.
3. Gauss C. F. Werke. Bd. III, 1866, S. 491.
4. Gauss C. F. Werke. Bd. X, 1917, S. 251.
5. Dávid L. J. reine und angew. Math., 1909, Bd. 135, S. 62; 1928, Bd. 159, S. 154 Rend. Circolo mat. Palermo, 1913, v. 35, p. 82.
6. Bèla Barna. J. reine und angew. Math., 1934, Bd. 172, S. 86; 1937, Bd. 178, S. 129.