

К КИНЕМАТИЧЕСКОМУ РАСЧЕТУ НЕКОТОРЫХ РАМНЫХ СИСТЕМ

Л. Т. Кандов

Расчет плоских рамных систем с контурами в форме неправильного четырехугольника (рис. 1) по методу перемещений осложняется по ряду причин, в том числе из-за кинематического расчета. Обычно в таких случаях рекомендуется кинематическое решение графическим путем [1]. Преимущества и недостатки графических методов хорошо известны [2]. При аналитическом решении для каждого контура шарнирной схемы составляются уравнения вида [3, 4]

$$\sum_1^4 l_i \cos(l_i, x) \theta_i = 0, \quad \sum_1^4 l_i \sin(l_i, x) \theta_i = 0, \quad (1)$$

получающиеся дифференцированием известных уравнений замкнутости [5]. В этих уравнениях

l_i — длины стержней,

θ_i — малые угловые перемещения осей стержней как абсолютно твердых тел.

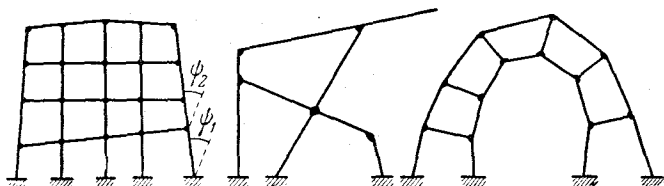


Рис. 1.

Для шарнирной схемы, например, в приведенном ниже числовом примере, необходимо составить 8 таких уравнений, образующих однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно 10 неизвестных. Весь кинематический расчет сводится к нахождению коэффициентов этой системы с достаточной степенью точности и к ее решению относительно восьми из величин θ_i , так как число степеней изменчивости шарнирной схемы равно двум.

В настоящей работе предлагается метод решения, при котором можно избежать составления и решения системы указанного вида. При небольшой степени точности вычисления этот метод можно свести к простому графоаналитическому, который дает возможность быстро определить все угловые перемещения θ_i через определенное их число, равное числу степеней изменчивости шарнирной схемы. Если требуется большая точность, тогда необходимо предварительно провести определенную вычис-

лительную работу, однако можно показать, что весь процесс решения кинематической задачи связан с меньшей затратой труда, чем при составлении и решении системы указанного выше вида с той же степенью точности. Кроме того, метод оказывается более наглядным и допускающим некоторые возможности контроля.

1. Рассмотрим один контур шарнирной схемы (рис. 2, а). Стержни контура и их длины обозначим через a, b, c, d и в дальнейшем будем пользоваться зависимостями вида

$$\theta_a = \overline{ab} \theta_b + \overline{ac} \theta_c^*, \quad (2)$$

где $\theta_a, \theta_b, \theta_c$ — малые угловые перемещения стержней a, b, c шарнирной схемы;

$\overline{ab}$ — передаточное отношение для соседних стержней a и b (т. е. отношение $\theta_a : \theta_b$ при $\theta_c = 0$);

$\overline{ac}$ — передаточное отношение для противоположных стержней a и c (т. е. отношение $\theta_a : \theta_c$ при $\theta_b = 0$).

В формуле (2) отсутствует угловое перемещение θ_d . Для обозначения этого иногда будем у передаточных отношений писать индекс (например $\overline{ac}_d$).

Так как каждое передаточное отношение обозначается тремя буквами $\overline{ac}_d, \overline{ab}_d$ и т. д., для каждого контура можно составить всего $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ передаточных отношения.

Докажем следующее утверждение: все 24 передаточных отношения можно выразить через четыре величины (рис. 2, б)

$$\lambda_A = \frac{AE}{CE}, \quad \lambda_B = \frac{BE}{DE}, \quad \lambda_C = \frac{CE}{AE}, \quad \lambda_D = \frac{DE}{BE}, \quad (3)$$

пользуясь двумя формулами

$$\overline{ab}_d = \frac{\lambda_A - \lambda_B}{1 + \lambda_A}, \quad (4)$$

$$\overline{ac}_d = \frac{1 + \lambda_B}{1 + \lambda_A}. \quad (4')$$

В самом деле, из равенства

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha_A = c^2 + d^2 - 2cd \cos \alpha_C,$$

(α_A и α_C — внутренние углы при вершинах A и C) дифференцированием по времени получаем

$$d\alpha_A = \frac{\text{пл } \triangle ABD}{\text{пл } \triangle BCD} d\alpha_C. \quad (5)$$

Легко показать, что дробь правой части равна λ_C . Таким образом,

$$d\alpha_A = \lambda_C d\alpha_C, \quad d\alpha_B = \lambda_D d\alpha_D, \quad d\alpha_C = \lambda_A d\alpha_A, \quad d\alpha_D = \lambda_B d\alpha_B. \quad (6)$$

Так как

$$d\alpha_A = \theta_b - \theta_a, \quad d\alpha_B = \theta_c - \theta_b, \quad d\alpha_C = \theta_d - \theta_c, \quad d\alpha_D = \theta_a - \theta_d, \quad (7)$$

* Формула (2) выводится ниже.

подстановкой в равенство

$$d\alpha_A + d\alpha_B + d\alpha_C + d\alpha_D = 0$$

правых частей двух последних равенств (6) и правых частей двух первых равенств (7) получаем [6]

$$\theta_a = \frac{\lambda_A - \lambda_B}{1 + \lambda_A} \theta_b + \frac{1 + \lambda_B}{1 + \lambda_A} \theta_c. \quad (2')$$

Эта формула тождественна формуле (2), так как при $\theta_c = 0$ получаем равенство (4), а при $\theta_b = 0$ — равенство (4'). Существуют всего 8 формул вида (2), содержащих 16 передаточных отношений. Остальные 8 передаточных отношений представляют собой величины, обратные отношениям для соседних стержней $\overline{ab_d}$, $\overline{bc_a}$ и т. д. Утверждение доказано.

Рассмотренные четыре величины λ_A , λ_B , λ_C , λ_D назовем диагональными отношениями. Для выпуклого четырехугольника они положительны; для параллелограмма равны единице, а для трапеции равны отношению оснований.

Передаточные отношения $\overline{ab_d}$ и $\overline{ac_d}$ связаны зависимостью $\overline{ab_d} + \overline{ac_d} = 1$. Для выпуклого четырехугольника всегда выполняются неравенства

$$\overline{ab_d} < 1, \quad \overline{ac_d} > 0$$

(первое для пары соседних, второе для пары противоположных стержней).

Если для определенной четырехугольной системы известны диагональные отношения для всех контуров, дальнейший кинематический расчет можно провести только по формулам (4) и (4'). Итак, для расчета предложенным методом надо запомнить эти две формулы. Для этого можно воспользоваться mnemonicскими правилами:

1) уменьшаемое в числителе дроби (4) — диагональное отношение, соответствующее вершине четырехугольника, расположенной в области вогнутости дуги ab (рис. 2, а), вычитаемое — диагональное отношение для соседней вершины в области выпуклости той же дуги; знаменатель равен единице плюс уменьшаемое числителя;

2) числитель дроби (4') равен единице плюс диагональное отношение, соответствующее концу дуги ac , знаменатель равен единице плюс диагональное отношение, соответствующее началу дуги ac ;

3) индекс в обозначении вида $\overline{ac_d}$ для передаточного отношения противоположных стержней a и c определяет стержень d , который расположен в области выпуклости дуги ac , поэтому по индексу в этом обозначении можно установить область выпуклости дуги ac и вместе с тем оба отношения λ_A , λ_B , которые входят в формулы (4) и (4'). Наоборот, зная область выпуклости дуги ac , можно установить индекс у обозначения $\overline{ac}$.

2. Рассмотрим произвольную цепь, состоящую из четырехугольных контуров. Часть цепи показана на рис. 3. Для четырехугольника 1 2 3 4

$$\theta_1 = \overline{12}\theta_2 + \overline{13}\theta_3. \quad (2'')$$

Отношениям $\overline{12}$ и $\overline{13}$ соответствуют в схеме дуги $\widehat{12}$ и $\widehat{13}$. Стержни 2 и 3 принадлежат другим контурам 2 5 6 7 и 3 8 9 10. Следовательно,

$$\theta_2 = \overline{27}\theta_7 + \overline{26}\theta_6 \text{ и } \theta_3 = \overline{38}\theta_8 + \overline{39}\theta_9.$$

После подстановки в (2'') получаем

$$\theta_1 = \overline{12} \cdot \overline{27}\theta_7 + \overline{12} \cdot \overline{26}\theta_6 + \overline{13} \cdot \overline{38}\theta_8 + \overline{13} \cdot \overline{39}\theta_9.$$

Продолжив этот процесс, получим последовательно суммы, в которых будут произведения из трех, четырех, пяти и т. д. множителей. Эти множи-

тели будут величинами двух видов: $\overline{ab}$ и $\overline{ac}$. Легко заметить, что каждому произведению этих величин соответствует последовательность дуг (путь), которая проходит через соседние контуры. На рис. 3 можно увидеть начало четырех из этих путей: $1-2-6-$, $1-2-7-$, $1-3-8-$, $1-3-9-$. Если угловое перемещение каждого стержня можно выразить через угловое перемещение одного стержня, тогда все пути будут вести к этому стержню или к нескольким неврашающимся стержням. Это случай системы с одной степенью неизменяемости.

Если число степеней изменяемости системы конечно, угловое перемещение стержня может быть выражено через угловые перемещения определенного числа n стержней. В таком случае все пути ведут к этим n стержням или к неврашающимся стержням.

Обозначим угловые перемещения этих n стержней через $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$. Тогда перемещение некоторого стержня

$$\theta_r = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m \overline{ri}_{(k)} \right) \theta_i, \quad (8)$$

где каждая величина $\overline{ri}_{(k)}$ — произведение отношений вида $\overline{ab}$ и $\overline{ac}$ и изображается как путь из дуг, ведущий от стержня r к стержню i ; для каждой пары стержней (начальный и конечный) существует определенное число m таких путей. Обозначим сумму в скобках формулы (8) через $\overline{ri}$. Тогда

$$\theta_r = \sum_{i=1}^n \overline{ri} \theta_i. \quad (9)$$

3. Для расчета сложных рамных систем со смещающимися узлами и произвольной конфигурацией в последнее время рекомендуется дополнительное уравнение

$$\sum_1^p P_i \delta_i - \sum_1^q M_k \psi_k = 0, \quad (10)$$

где первая сумма выражает работу всех внешних сил на виртуальном перемещении шарнирной схемы;

M_k — сумма двух концевых моментов k -го стержня;

ψ_k — виртуальное угловое перемещение стержня шарнирной схемы.

Это уравнение встречается в работе Н. В. Корноухова [4], в ряде работ Н. К. Снитко (например, [7]). Оно относится к исследованию состояния рамных систем, несмотря на то, что выражает сумму работ сил, действующих на раму, на виртуальном перемещении шарнирной схемы.

Уравнение (10) имеет следующие недостатки: 1) не представлено в конечном виде, поэтому проектиранту всегда необходимо добиваться подходящим методом исключения величин δ_i и ψ_k ; при сложных системах и нагрузках это не всегда легко; 2) при каждом виртуальном перемещении системы со многими степенями свободы необходимо снова вычислять в сумме $\sum P_i \delta_i$ величины δ_i .

Укажем метод, который дает возможность исключить величины ψ и δ и получить дополнительное уравнение (10) в конечном виде, т. е. уравнение типа основных. Для этого рассмотрим последовательность стержней (цепь стержней), принадлежащую определенной шарнирной схеме, имеющей по меньшей мере одну неподвижную точку T (рис. 4).

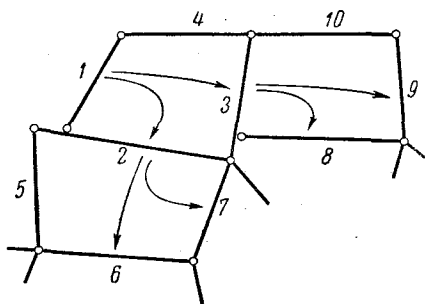


Рис. 3.

Поскольку система плоская, сразу можно перейти к скалярному равенству

$$\sum_{i=1}^n f_{ig} \theta_i = 0 \quad (f_{gg} = 0),$$

где f_{ig} — площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}_i$ и $\vec{a}_g$.

Площадь положительна, если эти два вектора вместе с ортом нормали к плоскости системы образуют правую тройку. Теперь можно легко выразить одно из перемещений, например θ_a , через остальные $n - 2$. Имеем

$$\theta_a = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{a}_{ig} \theta_i, \quad (13)$$

где

$$\bar{a}_{ig} = \frac{f_{ig}}{f_{ga}} \quad \left(\sum_{i=1}^{n-1} \bar{a}_{ig} = 1 \right). \quad (14)$$

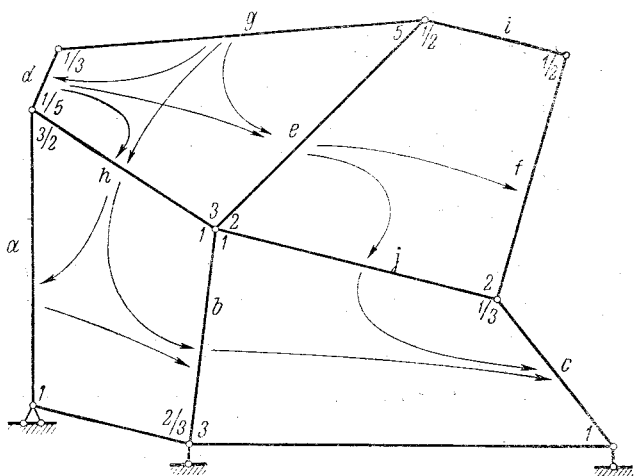


Рис. 5.

Формулы (13) и (14) представляют собой обобщение формул (2), (4) и (4') для произвольного n -угольного контура.

Пример. На рис. 5 изображена шарнирная система сложной рамы с двумя степенями изменяемости. Предположим, для четырех контуров рамы известны все диагональные отношения, которые написаны в углах каждого контура. Все угловые перемещения можно выразить через два из них. Например, выразим формулой (9) угловое перемещение θ_g через θ_c и θ_s , т. е. получим числовые значения коэффициентов $\overline{gf}$ и $\overline{gc}$

$$\theta_g = \overline{gf} \theta_f + \overline{gc} \theta_c. \quad (9')$$

По формулам (8), (4) и (4') получаем

$$\overline{gf} = \overline{ge} \overline{ef}_i = \frac{5-3}{1+5} \cdot \frac{1+2}{1+2} = \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} \overline{gc} &= \overline{gc}_{(1)} + \overline{gc}_{(2)} = \overline{ge} \overline{ej} \overline{jc} + \overline{ga} \overline{hb} \overline{bc}_j = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

Для контроля выразим θ_g через θ_d и θ_a , а затем θ_d и θ_a через θ_f и θ_c . В результате получим опять равенство (9'). В самом деле,

$$\begin{aligned}\theta_g &= \bar{g}d\theta_d + \bar{g}a\theta_a = \\ &= \bar{g}d [\bar{d}e_g \bar{e}f_i \theta_f + (\bar{d}e_g \bar{e}j \bar{j}c + \bar{d}h \bar{h}b \bar{b}c_j) \theta_c] + \\ &\quad + \bar{g}h_c \bar{h}a \bar{a}b \bar{b}c \theta_c = \\ &= \frac{1}{10} \left\{ \frac{10}{3} \cdot 10f + \left[\frac{10}{3} \cdot 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \right] \theta_c \right\} + \\ &\quad + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} \theta_c = \frac{1}{3} \theta_f + \frac{1}{18} \theta_c.\end{aligned}$$

Можно составить множество таких контрольных равенств, соответствующих разным путям, составленным из дуг, проведенных на шарнирной схеме. Этот контроль решения относится не только к самому кинематическому расчету, но и к предварительной работе по определению диагональных отношений.

Составим теперь два дополнительных уравнения метода перемещений вида (12) для двух виртуальных перемещений системы:

$$\psi_c \neq 0, \quad \psi_f = 0 \quad \text{и} \quad \psi_c = 0, \quad \psi_f \neq 0.$$

Из равенства

$$M_a^* \psi_a + M_b^* \psi_b + \dots + M_j^* \psi_j = 0$$

Рис. 6.

для первого виртуального перемещения, пользуясь формулой (9), получаем

$$\bar{a}cM_a^* + \bar{b}cM_b^* + M_c^* + \bar{d}cM_d^* + \bar{e}cM_e^* + \bar{g}cM_g^* + \bar{h}cM_h^* + \bar{i}cM_i^* + \bar{j}cM_j^* = 0.$$

После учета численных значений коэффициентов по формуле (8) это уравнение примет вид

$$\frac{5}{12} M_a^* + \frac{1}{2} M_b^* + M_c^* - \frac{7}{36} M_d^* + \frac{1}{18} M_g^* + \frac{1}{12} M_h^* - M_i^* - \frac{1}{2} M_j^* = 0.$$

Для виртуального перемещения $\psi_c = 0, \psi_f \neq 0$

$$\bar{d}fM_d^* + \bar{e}fM_e^* + \bar{g}fM_g^* + ifM_i^* = 0$$

или численно

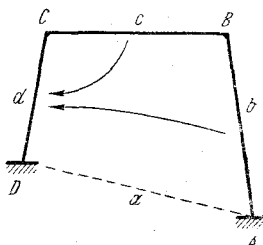
$$\frac{10}{3} M_d^* + M_e^* + \frac{1}{3} M_g^* - M_i^* = 0.$$

В качестве второго примера приведем полную систему уравнений метода перемещения для самого простого случая: рама состоит из одного контура $ABCD$ (рис. 6) с заделанными концами A и D . Применяя основное уравнение метода перемещений [7] и дополнительное уравнение (12), найдем

$$4\varphi_C (i_c + i_d) + 2\varphi_B i_c - 6 (\bar{c}di_c + i_d) \theta_d = M_{CB}^0 + M_{CD}^0$$

$$2\varphi_C i_c + 4\varphi_B (i_c + i_b) - 6 (\bar{c}di_c + \bar{b}di_b) \theta_d = M_{BC}^0 + M_{BA}^0$$

$$\begin{aligned}6 (i_d + \bar{c}di_c) \varphi_C + 6 (\bar{c}di_c + \bar{b}di_b) \varphi_B - 12 (i_d + \bar{c}d^2i_c + \bar{b}d^2i_b) \theta_d = \\ = M_d^0 + D_d + \bar{c}d (M_c^0 + D_c) + \bar{b}d (M_b^0 + D_b),\end{aligned}$$



где φ_B и φ_C — углы поворота узлов B и C ;

i_b, i_c, i_d — погонные жесткости;

M_b^0, M_c^0, M_d^0 — суммы конечных моментов при полном защемлении концов стержней рамы.

Для рамных систем с прямоугольными контурами, положив всюду коэффициенты вида $\overline{ab}$ для соседних стержней равными нулю и для противоположных стержней равными единице, получаем обычные уравнения метода перемещений.

В общем случае (рамная система произвольной конфигурации с n -угольными контурами) уравнение метода перемещений примут вид

$$4\varphi_O \sum_{\mu=1}^m i_{\mu} + 2 \sum_{\mu=1}^m \varphi_{\mu} i_{\mu} - 6 \sum_{\mu=1}^m i_{\mu} \left(\sum_{q=1}^r \overline{\mu q} \theta_q \right) = \sum_{\mu=1}^m M_{OM}^0, \quad (15)$$

$$\sum_{\kappa=1}^h i_{\kappa} (6\varphi_{\kappa} - 12 \sum_{q=1}^r \overline{\kappa q} \theta_q) \overline{\kappa s} = \sum_{\kappa=1}^h (M_{\kappa}^0 + D_{\kappa}) \overline{\kappa s} \dots, \quad (16)$$

где φ_O — поворот какого либо узла O ;

μ — номер одного из стержней, сходящихся в узел O ;

φ_m — поворот узла M в противоположном конце стержня μ ;

q — номер стержня с независимым угловым перемещением θ_q ;

r — число степеней изменяемости шарнирной схемы.

Уравнение (16) имеет место при виртуальном перемещении шарнирной схемы $\psi_1 = 0, \psi_2 = 0, \dots, \psi_s \neq 0, \dots, \psi_r = 0$.

κ — номер стержня, который получает угловое перемещение $\psi_{\kappa} \neq 0$ вместе с $\psi_s \neq 0$;

φ_{κ} — сумма поворотов узлов в концах стержня κ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович И. М. Методы расчета рам. Ч. II. Госстройиздат, 1934, стр. 15—23.
2. Рабинович И. М. Курс строительной механики стержневых систем. Ч. I. Госстройиздат, 1938, стр. 31.
3. Справочник проектировщика (расчетно-теоретический). Гос. изд-во по строит. архитектуре и стрит. материалам, 1960, стр. 278.
4. Корнухов Н. В. Прочность и устойчивость стержневых систем. Стройиздат, 1949, стр. 115, 124.
5. Зиновьев В. Аналитические методы расчета плоских механизмов. Гостехиздат, 1949, стр. 25.
6. Кандов Л. Т. Върху кинематиката на рамковите системи. Годишник на инж.-строит. ин-т, 1954, г. IV, кн. 1.
7. Снитко Н. К. Расчет рамных сооружений итерационными методами. Госстройиздат, 1962, стр. 21, 41.