Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLIV, вып. 3, 1964 г.

УДК 532.517.2

НОВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Л. А. Кулонен

В настоящее время имеется много численных методов расчета ламинарного пограничного слоя. Среди них особенно следует выделить метод конечных разностей, метод прямых и метод интегральных соотношений А. А. Дородницына [1].

Предлагаемый в статье новый метод численного интегрирования уравнений ламинарного пограничного слоя соединяет в себе основные идеи метода прямых и метода последовательных приближений. Он, по-видимому, свободен от некоторых существенных недостатков трех указанных выше методов. Этот метод применяется к исследованию пограничного слоя в несжимаемой и сжимаемой жидкостях. Причем в последнем случае условия течения могут осложняться теплообменом, неоднородностью состава потока и, возможно, химическими реакциями.

1. Ламинарный пограничный слой на телах вращения при наличии продольного перепада давления. Рассмотрим высокотемпературный пограничный слой на теле вращения, в котором происходят химические реакции диссоциации и рекомбинации молекул и атомов газа. Уравнения пограничного слоя и соответствующие граничные условия в безразмерных переменных Крокко имеют вид

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\tau}{\partial u^2}-\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu}{\tau}\right)+\frac{u}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(r\,\frac{\varrho\mu}{\tau}\right)=0,\\
&\frac{\partial\tau}{\partial u}\Big|_{u=0}=\left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\mu}{\tau}\right)\Big|_{u=0},\quad \tau|_{u=\tilde{u}}=0,\\
&\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial u^2}+\left[(1-Sc)\frac{\partial\ln\tau}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial u}\ln\left[\frac{1}{Sc}\right]+\frac{\partial p}{\partial x}\cdot Sc\cdot\frac{\mu}{\tau^2}\right]\frac{\partial\varepsilon}{\partial u}+\\
&\qquad+\Phi\cdot Sc\,\frac{\mu}{\tau^2}-u\cdot Sc\cdot\frac{\varrho\mu}{\tau^2}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}=0,\\
&\varepsilon|_{u=0}=\varepsilon_w,\quad \varepsilon|_{u=\tilde{u}}=\tilde{\varepsilon};\\
&\frac{\partial^2 T}{\partial u^2}+\left[(1-Pr)\frac{\partial\ln\tau}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial u}\ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}\cdot Pr\cdot\frac{\mu}{\tau^2}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{Pr}{Sc}\,\frac{\Delta C_p}{C_p}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial u}\right]\frac{\partial T}{\partial u}+\frac{Pr}{C_p}\left[\bar{\alpha}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\,u\,\frac{\mu}{\tau^2}+1\right)-\right.\\
&\qquad\left.-\Phi\cdot\Delta h\cdot\frac{\mu}{\tau^2}\right]-u\cdot Pr\cdot\frac{\varrho\mu}{\tau^2}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}=0\\
&T|_{u=0}=T_w,\quad T|_{u=\tilde{u}}=\tilde{T},\\
&\frac{\partial p}{\partial u}=0,\quad p|_{u=\tilde{u}}=\tilde{p},\\
&p=\frac{(1+\varepsilon)}{\bar{\alpha}}\,\varrho RT,
\end{aligned}\right\}\qquad (1)
$$

где

τ — напряжение трения, $\tau = \dfrac{\tau' \sqrt{\overline{Re}}}{\overline{\varrho}\,\overline{u}^2}$, $\tau' = \mu' \cdot \dfrac{\partial u'}{\partial y'}$;

ε — массовая концентрация атомарной компоненты;

T — абсолютная температура газа, $T = \dfrac{T'}{\overline{T}}$;

p — статическое давление, $p = \dfrac{p'}{\overline{\varrho}\,\overline{u}^2}$;

ϱ — массовая плотность смеси, $\varrho = \dfrac{\varrho'}{\overline{\varrho}}$;

m_a — масса грамматома;

μ — коэффициент вязкости, $\mu = \dfrac{\mu'}{\overline{\mu}}$;

λ — коэффициент теплопроводности; $\lambda = \dfrac{\lambda'}{\overline{\lambda}}$;

C_p, C_{pa}, C_{pm} — удельные теплоемкости при постоянном давлении смеси, атомов и молекул, $C_p = C_{pm} + \varepsilon \cdot \Delta C_p$:

$$C_p = \frac{C'_p}{\overline{C}_p}, \quad C_{pa} = \frac{C'_{pa}}{\overline{C}_p}, \quad C_{pm} = \frac{C'_{pm}}{\overline{C}_p},$$

$$\Delta C_p = C_{pa} - C_{pm}, \quad \Delta C_p = \frac{\Delta C'_p}{\overline{C}_p},$$

h, h_a, h_m — удельные энтальпии смеси, атомов и молекул,

$$h = h_m + \varepsilon \cdot \Delta h, \quad h = \frac{h'}{\overline{C}_p \overline{T}}, \quad h_a = \frac{h'_a}{\overline{C}_p \overline{T}}, \quad h_m = \frac{h'_m}{\overline{C}_p \overline{T}},$$

$$\Delta h = h_a - h_m, \quad \Delta h = \frac{\Delta h'}{\overline{C}_p \overline{T}};$$

Pr — число Прандтля для смеси, $Pr = \dfrac{C'_p \mu'}{\lambda'}$;

Sc — число Шмидта для смеси, $Sc = \dfrac{\mu'}{\varrho' D'_{12}}$;

D'_{12} — коэффициент взаимной диффузии атомарной и молекулярной компонент смеси;

R — газовая постоянная, $R = \dfrac{R'}{\overline{C}_p}$;

Φ — безразмерная скорость химической реакции;

x — длина дуги кривой, образующей тела вращения в меридиональной плоскости, отсчитываемая от передней кромки, $x = \dfrac{x'}{l}$;

y — расстояние точки до поверхности тела вращения

$$y = y' \Big/ \frac{l}{\sqrt{\overline{Re}}};$$

u — составляющая вектора средней массовой скорости движения смеси в направлении x, $u = \dfrac{u'}{\overline{u}}$;

r — расстояние какой-либо точки образующей от оси симметрии, $r = r(x)$, $r = \frac{r'}{l}$;

$\overline{Re}$ — число Рейнольдса, составленное из характерных величин,

$$\overline{Re} = \frac{\bar{\varrho}\,\bar{u}\bar{l}}{\bar{\mu}},$$

$\bar{\varrho}$, $\bar{\mu}$, $\bar{u}$, $\bar{C}_p$, $\bar{T}$, $\bar{l}$ — характерные для рассматриваемой задачи величины плотности, коэффициента вязкости, удельной теплоемкости при постоянном давлении, температуры, линейных размеров; $\bar{\alpha} = \frac{\bar{u}^2}{\bar{C}_p \bar{T}}$;

штрихом обозначены размерные переменные;
значком «$\sim$» — значения величин на внешней границе слоя;
индексом w — на поверхности.

Введем новые независимые переменные

$$\xi = \int_0^x \bar{\varrho}\,\bar{\mu}\,\bar{u} r^2\,dx, \quad \zeta = \frac{u}{\tilde{u}},$$

а в качестве искомых функций рассмотрим

$$\vartheta = \frac{\tau\sqrt{2\xi}}{\bar{\varrho}\,\bar{\mu}\,\bar{u}^2 r}, \quad \varepsilon, \quad i = \frac{T}{\tilde{T}}, \quad p, \quad \varrho.$$

Тогда система (I) примет вид

$$\left.\begin{gathered}
\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\zeta^2} + \beta(\xi)\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\psi - \varphi\cdot\zeta^2}{\vartheta}\right) + \frac{\varphi\cdot\zeta}{\vartheta} + 2\zeta\cdot\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\varphi}{\vartheta}\right) = 0 \\
\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=0} = -\beta(\xi)\frac{\psi_w}{\vartheta_w}, \quad \vartheta|_{\zeta=1} = 0 \\
\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\zeta^2} + \left[(1-Sc)\frac{\partial\ln\vartheta}{\partial\zeta} - \frac{\partial\ln Sc}{\partial\zeta} + \beta(\xi)\,Sc\,\frac{(\varphi\zeta^2-\psi)}{\vartheta^2}\right]\frac{\partial\varepsilon}{\partial\zeta} + \\
+ \sigma_\varepsilon(\xi)\,\Phi\,Sc\,\frac{\psi}{\vartheta^2} - 2Sc\,\frac{\varphi}{\vartheta^2}\,\zeta\xi\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi} = 0 \\
\varepsilon|_{\zeta=0} = \varepsilon_w, \quad \varepsilon|_{\zeta=1} = \tilde{\varepsilon} \\
\frac{\partial^2 i}{\partial\zeta^2} + \left[(1-Pr)\frac{\partial\ln\vartheta}{\partial\zeta} - \frac{\partial}{\partial\zeta}\ln\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + \beta(\xi)\cdot Pr\,\frac{(\varphi\zeta^2-\psi)}{\vartheta^2} + \right. \\
\left. + \frac{Pr}{Sc}\,\frac{\Delta C_p}{C_p}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\zeta}\right]\frac{\partial i}{\partial\zeta} + \left[\tilde{\alpha}(\xi)\,\beta(\xi)\,Pr\,\frac{\varphi\zeta}{\vartheta^2}\right] i + \\
+ \frac{Pr}{C_p}\left\{\tilde{\alpha}(\xi)\left[1 - \beta(\xi)\,\frac{\psi\zeta}{\vartheta^2}\right] - \sigma_i(\xi)\,\Phi\cdot\Delta h\,\frac{\psi}{\vartheta^2}\right\} - \\
- 2Pr\,\frac{\varphi}{\vartheta^2}\,\zeta\xi\,\frac{\partial i}{\partial\xi} = 0 \\
i|_{\zeta=0} = i_w, \quad i|_{\zeta=1} = 1 \\
p = \frac{(1+\varepsilon)}{\bar{\alpha}}\,\varrho RT, \quad \frac{\partial p}{\partial\zeta} = 0, \quad p|_{\zeta=1} = \tilde{p},
\end{gathered}\right\} \qquad (2)$$

где $\varphi = \frac{\varrho\mu}{\bar{\varrho}\,\bar{\mu}}$, $\psi = \frac{\mu}{\tilde{\mu}}$, $\beta(\xi) = \frac{2\xi}{\tilde{u}}\frac{d\tilde{u}}{d\xi}$,

$$\sigma_i(\xi) = \frac{\sigma_\varepsilon(\xi)}{\tilde{T}}, \quad \tilde{\alpha}(\xi) = \frac{\tilde{u}'^2}{\tilde{C}'_p\tilde{T}'}\cdot\tilde{C}_p,$$

$$\sigma_\varepsilon(\xi) = \frac{2\xi}{\tilde{\varrho}^2\tilde{\mu}\,\tilde{u}^2 r^2}.$$

В дальнейшем будем рассматривать только три первые уравнения системы (2) вместе с соотношением $\frac{\varrho T}{\tilde{\varrho}\tilde{T}} = \frac{1+\tilde{\varepsilon}}{1+\varepsilon}$, следующим из двух последних уравнений той же системы.

Систему дифференциальных уравнений (2) необходимо, как видно из дальнейшего, дополнить тремя интегральными соотношениями, выражающими законы изменения количества движения, сохранения массы атомарной компоненты смеси и энергии для элемента пограничного слоя

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta_w = \int_0^1 \frac{\varphi\zeta\,(1-\zeta)}{\vartheta}\,d\zeta + \beta(\xi)\int_0^1 \frac{\varphi}{\vartheta}\left(\frac{\tilde{\varrho}}{\varrho} - \zeta^2\right)d\zeta + 2\xi\,\frac{d}{d\xi}\int_0^1 \frac{\varphi\zeta\,(1-\zeta)}{\vartheta}\,d\zeta \\
&\left(\frac{\vartheta}{Sc}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\zeta}\right)\Big|_{\zeta=0} = \int_0^1 \frac{\varphi\zeta\,(\tilde{\varepsilon}-\varepsilon)}{\vartheta}\,d\zeta + \\
&+\int_0^1 \frac{\varphi}{\vartheta}\left[\sigma_\varepsilon(\xi)\,\frac{\tilde{\varrho}}{\varrho}\,\Phi - 2\zeta\cdot\xi\,\frac{d\tilde{\varepsilon}}{d\xi}\right]d\zeta + 2\xi\,\frac{d}{d\xi}\int_0^1 \frac{\varphi\zeta\,(\tilde{\varepsilon}-\varepsilon)}{\vartheta}\,d\zeta \\
&\left[\vartheta\left(\frac{C_p}{Pr}\,\frac{\partial T}{\partial\zeta} + \frac{\Delta h}{Sc}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\zeta}\right)\right]\Big|_{\zeta=0} = \int_0^1 \frac{\varphi\zeta\,(\tilde{\theta}-\theta)}{\vartheta}\,d\zeta + 2\xi\,\frac{d}{d\xi}\int_0^1 \frac{\varphi\zeta\,(\tilde{\theta}-\theta)}{\vartheta}\,d\zeta
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

где $\theta = h + \frac{\bar{a}\,\tilde{u}^2}{2}\cdot\zeta^2$ — энтальпия торможения смеси.

В (2) и (3) коэффициенты переноса, скорость реакции и энтальпия смеси в общем случае зависят от концентрации, температуры и давления.

Введем в (2) вместо ζ новую переменную η (такую, что $\lim\limits_{\zeta\to 1}\eta = +\infty$) с помощью соотношения $\zeta = f_{0\,\eta}'(\eta)$, где о выборе функции $f_0(\eta)$ сказано ниже.

Переходя к новым независимым переменным ξ, η в первых трех уравнениях и соответствующих граничных условиях системы (2), получим

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta^2} - \frac{f_0'''}{f_0''}\,\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta} + \beta(\xi)\cdot f_0''\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\psi - f_0'^2\varphi}{\vartheta}\right) + 2f_0'^2\cdot f_0'\cdot\xi\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\varphi}{\vartheta}\right) = 0 \\
&\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\Big|_{\eta=0} = -\beta(\xi)\cdot\psi_w\cdot\frac{f_0''(0)}{\vartheta_w}, \quad \lim_{\eta\to+\infty}\vartheta = 0 \\
&\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\eta^2} + \left[-\frac{f_0'''}{f_0''} + (1-Sc)\,\frac{\partial\ln\vartheta}{\partial\eta} - \frac{\partial\ln Sc}{\partial\eta} + \beta(\xi)\cdot Sc\cdot\frac{f_0''}{\vartheta^2}\times\right. \\
&\left.\times\left(f_0'^2\cdot\varphi - \psi\right)\right]\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta} + \sigma_\varepsilon(\xi)\cdot\Phi\cdot Sc\cdot\psi\cdot\frac{f_0''^2}{\vartheta^2} - 2Sc\cdot\varphi\cdot f_0'\cdot\frac{f_0'^2}{\vartheta^2}\,\xi\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi} = 0 \\
&\varepsilon\,|_{\eta=0} = \varepsilon_w, \quad \lim_{\eta\to+\infty}\varepsilon = \tilde{\varepsilon} \\
&\frac{\partial^2 i}{\partial\eta^2} + \left[-\frac{f_0'''}{f_0''} + (1-Pr)\,\frac{\partial\ln\vartheta}{\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\eta}\ln\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + \beta(\xi)\cdot Pr\cdot\frac{f_0''}{\vartheta^2}\times\right. \\
&\left.\times\left(f_0'^2\varphi - \psi\right) + \frac{Pr}{Sc}\,\frac{\Delta C_p}{C_p}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\right]\frac{\partial i}{\partial\eta} + f_0''^2\left[\bar{\alpha}(\xi)\cdot\beta(\xi)\cdot Pr\cdot\frac{\varphi f_0'}{\vartheta^2}\right]\cdot i + \\
&+ f_0''^2\cdot\frac{Pr}{C_p}\left\{\bar{\alpha}(\xi)\cdot\left[1 - \beta(\xi)\,\frac{\psi\cdot f_0'}{\vartheta^2}\right] - \sigma_i(\xi)\cdot\Phi\cdot\Delta h\cdot\frac{\psi}{\vartheta^2}\right\} - \\
&- 2Pr\cdot\frac{\varphi f_0''^2}{\vartheta^2}\cdot f_0'\cdot\xi\,\frac{\partial i}{\partial\xi} = 0 \\
&i\,|_{\eta=0} = i_w, \quad \lim_{\eta\to+\infty} i = 1, \quad \frac{\varrho T}{\tilde{\varrho}\tilde{T}} = \frac{1+\tilde{\varepsilon}}{1+\varepsilon}.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

В частности, при $\xi = 0$ получим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнения (4) линейны лишь относительно старших (вторых) производных искомых функций по переменной η. Нелинейный характер уравнений определяется, во-первых, сложной зависимостью коэффициентов от искомых функций и, во-вторых, наличием парных произведений первых производных функций по переменной η.

Предположим, что решение системы (4) строится методом последовательных приближений и что $\Delta F^{(n-1)} = F^{(n)} - F^{(n-1)}$, где $F = \vartheta, \varepsilon, i$, и производные $\Delta F^{(n-1)}$ по ξ и η достаточно малы.

Так как каждое из первых трех уравнений системы (4) содержит вторую производную только одной функции, рассмотрим это уравнение относительно именно этой «основной» функции, считая остальные известными. Затем, представляя нелинейные выражения $L^{(n)} = L^{(n)}[F^{(n)}]$ сходящимися степенными рядами типа

$$L^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k \Big|_{F=F^{(n-1)}} \cdot \left[\Delta F^{(n-1)}\right]^k,$$

пренебрежем в уравнениях (4) всеми нелинейными членами, содержащими вторые и выше степени величин $\Delta F^{(n-1)}$ и их первых производных, а также произведения степеней величин $\Delta F^{(n-1)}$ и их первых производных. Другими словами, каждое из первых трех уравнений (4) линеаризируется относительно искомого изменения приближенного значения «основной» функции.

Так как наибольший интерес для нас представляет определение характеристик теплового пограничного слоя, то интегрировать линейные относительно $\Delta F^{(n-1)}$ $(F = \vartheta, \varepsilon, i)$ уравнения следует в порядке последовательного определения функций $\Delta\vartheta^{(n-1)}$, $\Delta\varepsilon^{(n-1)}$ и $\Delta i^{(n-1)}$, используя, таким образом, при определении $\Delta\varepsilon^{(n-1)}$ уже найденные значения $\Delta\vartheta^{(n-1)}$, т. е. $\vartheta^{(n)}$, а при определении $\Delta i^{(n-1)}$ — найденные значения $\Delta\vartheta^{(n-1)}$ и $\Delta\varepsilon^{(n-1)}$ т. е. $\vartheta^{(n)}$ и $\varepsilon^{(n)}$.

Систему линеаризированных указанных способом уравнений, соответствующих уравнениям (4), в которых выделены члены, линейные относительно $\Delta F^{(n-1)}$ и их производных, и отброшены нелинейные члены более высокого порядка малости, за недостатком места выписывать не будем.

Интегрирование такой системы уравнений в частных производных может быть заменено интегрированием по переменной η системы обыкновенных линейных уравнений (с параметром ξ), полученной из вышеупомянутой путем отбрасывания членов, содержащих $\frac{\partial \Delta\vartheta^{(n-1)}}{\partial\xi}$, $\frac{\partial \Delta\varepsilon^{(n-1)}}{\partial\xi}$, $\frac{\partial \Delta i^{(n-1)}}{\partial\xi}$, и интегрированием по переменной ξ некоторой системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, полученных из интегральных соотношений пограничного слоя (3). Другими словами, в основе метода расчета, являющегося по существу методом последовательных приближений, лежит принцип поочередного интегрирования двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений соответственно по переменным η и ξ.

Пусть в результате интегрирования системы линейных уравнений поперек слоя определены величины $\Delta F^{(n-1)}$. Определяем тогда $F^{(n/2)} = F^{(n-1)} + \Delta F^{(n-1)}$, где значок $(n/2)$ указывает на промежуточный характер рассматриваемой величины.

Используя соображения, лежащие в основе метода Кочина — Лойцянского [2], положим

$$z^{(n)}(\xi, \eta) = z^{(n/2)}\left[\xi, \eta V_{\vartheta}^{(n)}(\xi)\right]$$

$$\varepsilon^{(n)}(\xi, \eta) = \varepsilon^{(n/2)}\left[\xi, \eta V_{\varepsilon}^{(n)}(\xi)\right]$$

$$\theta^{(n)}(\xi, \eta) = \theta^{(n/2)}\left[\xi, \eta V_{\theta}^{(n)}(\xi)\right],$$

где $z = \int_0^{\eta} \vartheta \, d\eta$, а $V_{\vartheta}^{(n)}$, $V_{\varepsilon}^{(n)}$, $V_{\theta}^{(n)}$ — пока неопределенные функции.

Отсюда следует, что

$$\vartheta^{(n)}(\xi, \eta) = V_{\vartheta}^{(n)}(\xi) \cdot \vartheta^{(n/2)}\left[\xi, \eta V_{\vartheta}^{(n)}(\xi)\right]$$

Таким образом, если $V_{\vartheta}^{(n)}, V_{\varepsilon}^{(n)}, V_{\theta}^{(n)}$ найдены, то можно получить соответствующие профили величин $\vartheta^{(n)}, \varepsilon^{(n)}, \theta^{(n)}$.

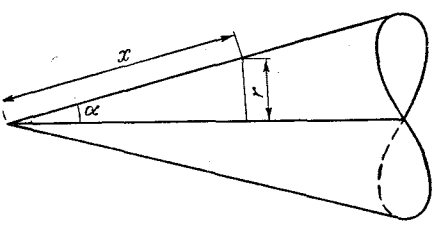


Рис. 1.

Например, при $\varepsilon = \text{const}$ одинаковые значения ε на кривых $\varepsilon = \varepsilon^{(n)}(\xi, \eta)$ и $\varepsilon = \varepsilon^{(n/2)}(\xi, \eta)$ достигаются в точках, координаты которых связаны соотношением

$$\eta_{\varepsilon}^{(n)} = \frac{\eta_{\varepsilon}^{(n/2)}}{V_{\varepsilon}^{(n)}(\xi)}. \qquad (5)$$

Подчиняя функции $\vartheta^{(n)}(\xi, \eta)$, $\varepsilon^{(n)}(\xi, \eta)$ и $\theta^{(n)}(\xi, \eta)$ интегральным соотношениям (3), получим систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций $V_{\vartheta}^{(n)}(\xi), V_{\varepsilon}^{(n)}(\xi), V_{\theta}^{(n)}(\xi)$. При этом метод последовательных приближений строится таким образом, чтобы оказалось возможным последовательное определение «основных» функций $V_F^{(n)}(\xi)$ с использованием уже определенных ранее некоторых из «неосновных» функций $V_F^n(\xi)$.

Профиль температуры $T^{(n)}(\xi, \eta)$ находится по уже известным профилям концентрации $\varepsilon^{(n)}(\xi, \eta)$ и энтальпии торможения $\theta^{(n)}(\xi, \eta)$.

На этом вычисление приближения с номером n заканчивается. Приближение $(n+1)$ порядка разыскивается аналогично.

Нулевое приближение находится различными способами в зависимости от характера задачи. В частности, в качестве F иногда целесообразно взять функции $F(0, \eta)$, являющиеся решениями уравнений пограничного слоя при $\xi = 0$. Могут быть использованы также решения, полученные методом конечных разностей или с помощью метода интегральных соотношений в той или иной форме.

2. Пограничный слой конуса в сверхзвуковом потоке газа. Для случая конуса в уравнениях (1) следует положить

$$\frac{\partial p}{\partial x} \equiv 0, \quad r = x \cdot \sin a,$$

где a — угол полураствора конуса (рис. 1).

Здесь не имеет смысла вводить переменную ξ, поэтому в дальнейшем сохраним переменную x. В качестве характерных величин можно взять $\bar{\varrho} = \tilde{\varrho}$, $\bar{\mu} = \tilde{\mu}$, $\bar{u} = \tilde{u}$, $\bar{C}_p = \tilde{C}_p$, $\bar{T} = \tilde{T}$.

Вводя функцию $\vartheta = \tau\sqrt{x}$, получим систему уравнений, аналогичную (2)

$$\left.\begin{gathered}
\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\zeta^2} + \frac{3}{2}\,\zeta\cdot\frac{\varrho\mu}{\vartheta} + \zeta\cdot x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varrho\mu}{\vartheta}\right) = 0 \\
\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=0} = 0, \quad \vartheta\,|_{\zeta=1} = 0 \\
\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\zeta^2} + \left[(1-Sc)\,\frac{\partial\ln\vartheta}{\partial\zeta} - \frac{\partial\ln Sc}{\partial\zeta}\right]\frac{\partial\varepsilon}{\partial\zeta} + x\cdot\Phi\cdot Sc\cdot\frac{\mu}{\vartheta^2} - \\
- Sc\cdot\frac{\varrho\mu}{\vartheta^2}\,\zeta\,x\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = 0 \\
\varepsilon\,|_{\zeta=0} = \varepsilon_w, \quad \varepsilon\,|_{\zeta=1} = \tilde{\varepsilon} \\
\frac{\partial^2 T}{\partial\zeta^2} + \left|(1-Pr)\,\frac{\partial\ln\vartheta}{\partial\zeta} - \frac{\partial}{\partial\zeta}\ln\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + \frac{Pr}{Sc}\,\frac{\Delta C_p}{C_p}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\zeta}\right]\frac{\partial T}{\partial\zeta} + \\
+ \frac{Pr}{C_p}\left[(\tilde{\gamma}-1)\,\tilde{M}^2 - x\,\Phi\,\Delta h\,\frac{\mu}{\vartheta^2}\right] - Pr\cdot\frac{\varrho\mu}{\vartheta^2}\,\zeta\,x\,\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\
T\,|_{\zeta=0} = T_w, \quad T\,|_{\zeta=1} = 1, \quad p = 1, \quad \varrho = \frac{(\tilde{\gamma}-1)\,\tilde{M}^2}{(1+\varepsilon)}\,\frac{1}{RT},
\end{gathered}\right\} \tag{6}$$

где $(\tilde{\gamma}-1)\,\tilde{M}^2 = \dfrac{\tilde{u}^2}{\tilde{C}_p\tilde{T}}$.

Система интегральных соотношений для пограничного слоя на конусе имеет вид

$$\left.\begin{gathered}
\vartheta_w = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{\varrho\mu\cdot\zeta\,(1-\zeta)}{\vartheta}\,d\zeta + x\,\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{\varrho\mu\cdot\zeta\,(1-\zeta)}{\vartheta}\,d\zeta \\
\left(\frac{\vartheta}{Sc}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\zeta}\right)\Big|_{\zeta=0} = -\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{\varrho\mu\zeta\,(\varepsilon-\tilde{\varepsilon})}{\vartheta}\,d\zeta + x\int_0^1 \frac{\left(\mu\Phi - \varrho\mu\,\dfrac{d\tilde{\varepsilon}}{dx}\right)}{\vartheta}\,d\zeta - \\
- x\,\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{\varrho\mu\zeta\,(\varepsilon-\tilde{\varepsilon})}{\vartheta}\,d\zeta \\
\left[\vartheta\left(\frac{C_p}{Pr}\,\frac{\partial T}{\partial\zeta} + \frac{\Delta h}{Sc}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\zeta}\right)\right]\Big|_{\zeta=0} = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{\varrho\mu\zeta\,(\tilde{\theta}-\theta)}{\vartheta}\,d\zeta + x\,\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{\varrho\mu\zeta\,(\tilde{\theta}-\theta)}{\vartheta}\,d\zeta
\end{gathered}\right\} \tag{7}$$

Предположим следующее: 1) $C_{pa} = \text{const}$, $C_{pm} = \text{const}$ и, следовательно, $\Delta C_p = C_{pa} - C_{pm} = \text{const}$,

$$C_p = \varepsilon\,\Delta C_p + C_{pm} = C_p(\varepsilon),$$

2) $Pr = \text{const}$,

3) Sc, $\dfrac{\mu}{\lambda}$ суть функции только ε,

4) $\Delta h = \text{const}$,

5) $h = h(\varepsilon, T)$,

6) $\varrho\mu = \varrho\mu(\varepsilon, T)$,

7) $\Phi = \Phi(\varepsilon, T)$. (8)

Заметим: 1) здесь ничего не говорится о зависимости упомянутых величин от давления, поскольку в рассматриваемом случае давление вдоль поверхности конуса постоянно; 2) предположения (8) разумны,

поскольку основываются на анализе фактических зависимостей (8) величин от концентрации и температуры.

При допущенных предположениях естественно ввести обозначения

$$E_1 = 1 - Sc, \quad D_1 = \varrho\mu, \quad D_2 = \frac{\partial(\varrho\mu)}{\partial\varepsilon}, \quad D_3 = \frac{\partial(\varrho\mu)}{\partial T},$$

$$E_2 = -\frac{d\ln Sc}{d\varepsilon}, \quad D_4 = -Sc\,\varrho\mu, \quad D_5 = \Phi \cdot Sc \cdot \mu$$

$$E_3 = 1 - Pr, \quad D_6 = -Pr\,\varrho\mu, \quad D_7 = -\Phi \cdot Pr\,\mu\,\frac{\Delta h}{C_p}$$

$$E_4 = -\frac{d}{d\varepsilon}\ln\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + \frac{Pr}{Sc}\,\frac{\Delta C_p}{C_p},$$

и записать первые три уравнения (1) в виде

$$\left.\begin{gathered}
\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\zeta^2} + (1{,}5\,D_1)\frac{\zeta}{\vartheta} + D_1\zeta\,x\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\vartheta}\right) + \frac{D_2\zeta}{\vartheta}\cdot x\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \frac{D_3\zeta}{\vartheta}\,x\,\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\
\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0} = 0, \quad \vartheta\,|_{\zeta=1} = 0 \\
\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\zeta^2} + \left(E_1\frac{\partial\ln\vartheta}{\partial\zeta} + E_2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\zeta}\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial\zeta} + \frac{xD_5}{\vartheta^2} + \frac{D_4\zeta}{\vartheta^2}\,x\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = 0 \\
\varepsilon\,|_{\zeta=0} = \varepsilon_w, \quad \varepsilon\,|_{\zeta=1} = \bar{\varepsilon} \\
\frac{\partial^2 T}{\partial\zeta^2} + \left(E_3\frac{\partial\ln\vartheta}{\partial\zeta} + E_4\frac{\partial\varepsilon}{\partial\zeta}\right)\frac{\partial T}{\partial\zeta} + \frac{xD_7}{\vartheta^2} + E_5 + \frac{D_6\cdot\zeta}{\vartheta^2}\,x\,\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\
T\,|_{\zeta=0} = T_w, \quad T\,|_{\zeta=1} = 1.
\end{gathered}\right\} \qquad (9)$$

Переходим в (9) к переменной η:

$$\left.\begin{gathered}
\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta^2} + \left(-\frac{f_0'''}{f_0''}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta} + \left[\zeta\cdot f_0''^2\,(1{,}5\,D_1 + x\,\varepsilon_x'\cdot D_2 + xT_x'D_3)\right]\frac{1}{\vartheta} + \\
+ \zeta\cdot f_0''^2 D_1 x\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\vartheta}\right) = 0 \\
\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} = 0, \quad \lim_{\eta\to+\infty}\vartheta = 0 \\
\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\eta^2} + \left(-\frac{f_0'''}{f_0''} + E_1\frac{\partial\ln\vartheta}{\partial\eta} + E_2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta} + xD_5\frac{f_0''^2}{\vartheta^2} + \\
+ \zeta\,D_4\frac{f_0''^2}{\vartheta^2}\,x\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = 0 \\
\varepsilon\,|_{\eta=0} = \varepsilon_w, \quad \lim_{\eta\to+\infty}\varepsilon = \bar{\varepsilon} \\
\frac{\partial^2 T}{\partial\eta^2} + \left(-\frac{f_0'''}{f_0''} + E_3\frac{\partial\ln\vartheta}{\partial\eta} + E_4\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\right)\frac{\partial T}{\partial\eta} + xD_7\cdot\frac{f_0''^2}{\vartheta^2} + f_0''^2 E_5 + \\
+ \zeta\cdot D_6\frac{f_0''^2}{\vartheta^2}\,x\,\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\
T\,|_{\eta=0} = T_w, \quad \lim_{\eta\to+\infty} T = 1.
\end{gathered}\right\} \qquad (10)$$

При $x = 0$ получаем систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Система уравнений, в которых выделены члены,

линейные относительно $\Delta\vartheta^{(n-1)}$, $\Delta\varepsilon^{(n-1)}$, $\Delta T^{(n-1)}$ и их производных, в случае конуса имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Delta\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta^2}+A_\vartheta^{(n-1)}\frac{\partial\Delta\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta}+B_\vartheta^{(n-1)}\cdot\Delta\vartheta^{(n-1)}C_\vartheta^{(n-1)}-\zeta D_1^{(n-1)}\times\\
&\qquad\times\frac{f_0''^2}{\vartheta^{(n-1)^2}}x\frac{\partial\Delta\vartheta^{(n-1)}}{\partial x}+\delta_\vartheta^{(n)}=0\\
&\qquad\frac{\partial\Delta\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta}\Big|_{\eta=0}=0,\quad\lim_{\eta\to+\infty}\Delta\vartheta^{(n-1)}=0\\
&\frac{\partial^2\Delta\varepsilon^{(n-1)}}{\partial\eta^2}+A_\varepsilon^{(n-1)}\cdot\frac{\partial\Delta\varepsilon^{(n-1)}}{\partial\eta}+B_\varepsilon^{(n-1)}\cdot\Delta\varepsilon^{(n-1)}+C_\varepsilon^{(n-1)}+\\
&\qquad+\zeta\cdot D_4^{(n-1)}\cdot\frac{f_0''^2}{\vartheta^{(n/2)^2}}x\frac{\partial\Delta\varepsilon^{(n-1)}}{\partial x}+\delta_\varepsilon^{(n)}=0\\
&\qquad\Delta\varepsilon^{(n-1)}\big|_{\eta=0}=0,\quad\lim_{\eta\to+\infty}\Delta\varepsilon^{(n-1)}=0\\
&\frac{\partial^2\Delta T^{(n-1)}}{\partial\eta^2}+A_T^{(n-1)}\cdot\frac{\partial\Delta T^{(n-1)}}{\partial\eta}+B_T^{(n-1)}\cdot\Delta T^{(n-1)}+C_T^{(n-1)}+\\
&\qquad+\zeta\cdot D_6^{(n-1)}\cdot\frac{f_0''^2}{\vartheta^{(n/2)^2}}x\frac{\partial\Delta T^{(n-1)}}{\partial x}+\delta_T^{(n)}=0\\
&\qquad\Delta T^{(n-1)}\big|_{\eta=0}=0,\quad\lim_{\eta\to+\infty}\Delta T^{(n-1)}=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

где $A_\vartheta^{(n-1)}=-\dfrac{f_0'''}{f_0''}$,

$$B_\vartheta^{(n-1)}=\frac{-\zeta\cdot f_0''^2}{\vartheta^{(n-1)^2}}\left[1{,}5\cdot D_1^{(n-1)}+D_2^{(n-1)}\cdot x\,\varepsilon_x^{(n-1)'}+D_3^{(n-1)}\cdot xT_x^{(n-1)'}\right]-$$
$$-\zeta D_1^{(n-1)}\cdot f_0''^2 x\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\vartheta^{(n-1)^2}}\right],$$

$$C_\vartheta^{(n-1)}=\frac{\partial^2\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta^2}-\frac{f_0'''}{f_0''}\cdot\frac{\partial\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta}+\zeta\frac{f_0''^2}{\vartheta^{(n-1)}}\left[1{,}5\,D_1^{(n-1)}+\right.$$
$$\left.+D_2^{(n-1)}\cdot x\,\varepsilon_x^{(n-1)'}+D_3^{(n-1)}\cdot xT_x^{(n-1)'}\right]+\zeta D_1^{(n-1)}\cdot f_0''^2 x\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\vartheta^{(n-1)}}\right],$$

$$A_\varepsilon^{(n-1)}=-\frac{f_0'''}{f_0''}+E_1^{(n-1)}\frac{\partial\ln\vartheta^{(n/2)}}{\partial\eta}+2E_2^{(n-1)}\frac{\partial\varepsilon^{(n-1)}}{\partial\eta},$$

$$B_\varepsilon^{(n-1)}=E_{1\,\varepsilon}^{(n-1)'}\frac{\partial\ln\vartheta^{(n/2)}}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\varepsilon^{(n-1)}}{\partial\eta}+E_{2\varepsilon}^{(n-1)'}\left[\frac{\partial\varepsilon^{(n-1)}}{\partial\eta}\right]^2+$$
$$+\zeta\cdot D_{4\varepsilon}^{(n-1)'}\cdot\frac{f_0''^2}{\vartheta^{(n/2)^2}}\cdot x\,\varepsilon_x^{(n-1)'}+xD_{5\varepsilon}^{(n-1)'}\cdot\frac{f_0''^2}{\vartheta^{(n/2)^2}},$$

$$C_\varepsilon^{(n-1)}=\frac{\partial^2\varepsilon^{(n-1)}}{\partial\eta^2}-\frac{f_0'''}{f_0''}\frac{\partial\varepsilon^{(n-1)}}{\partial\eta}+E_1^{(n-1)}\frac{\partial\ln\vartheta^{(n/2)}}{\partial\eta}\frac{\partial\varepsilon^{(n-1)}}{\partial\eta}+$$
$$+E_2^{(n-1)}\cdot\left[\frac{\partial\varepsilon^{(n-1)}}{\partial\eta}\right]^2+\zeta\cdot D_4^{(n-1)}\cdot\frac{f_0''^2}{\vartheta^{(n/2)^2}}x\,\varepsilon_x^{(n-1)'}+x\cdot D_5^{(n-1)}\frac{f_0''^2}{\vartheta^{(n/2)^2}},$$

$$A_T^{(n-1)}=-\frac{f_0'''}{f_0''}+E_3^{(n-1)}\cdot\frac{\partial\ln\vartheta^{(n/2)}}{\partial\eta}+E_4^{(n-1)}\frac{\partial\varepsilon^{(n/2)}}{\partial\eta},$$

$$C_T^{(n-1)} = \frac{\partial^2 T^{(n-1)}}{\partial \eta^2} + \left[-\frac{f_0'''}{f_0''} + E_3^{(n-1)} \frac{\partial \ln \vartheta^{(n/2)}}{\partial \eta} + E_4^{(n-1)} \frac{\partial \varepsilon^{(n/2)}}{\partial \eta} \right] \frac{\partial T^{(n-1)}}{\partial \eta} +$$

$$+ xD_7^{(n-1)} \cdot \frac{f_0''^2}{\vartheta^{(n/2)2}} + f_0''^2 E_5^{(n-1)} + \zeta \cdot D_6^{(n-1)} \cdot \frac{f_0''^2}{\vartheta^{(n/2)2}} x \frac{\partial T^{(n-1)}}{\partial x},$$

$$B_T^{(n-1)} = \zeta \cdot D_{6T}^{(n-1)'} \cdot \frac{f_0''^2}{\vartheta^{(n/2)2}} x \frac{\partial T^{(n-1)}}{\partial x} + xD_{7T}^{(n-1)'} \cdot \frac{f_0''^2}{\vartheta^{(n/2)2}},$$

$$E_i^{(n-1)} = E_i \left[\varepsilon^{(n-1)}\right], \quad E_{i\varepsilon}^{(n-1)'} = E_{i\varepsilon}' \left[\varepsilon^{(n-1)}\right] \quad (i = 1, 2)$$

$$E_j^{(n-1)} = E_j \left[\varepsilon^{(n/2)}\right] \quad (j = 3, 4, 5)$$

$$D_k^{(n-1)} = D_k \left[\varepsilon^{(n-1)}, T^{(n-1)}\right] \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$D_l^{(n-1)} = D_l \left[\varepsilon^{(n/2)}, T^{(n-1)}\right], \quad D_{lT}^{(n-1)'} \left[\varepsilon^{(n/2)}, T^{(n-1)}\right] = D_{lT}^{(n-1)'}, \quad (l = 6, 7)$$

$$D_{m\varepsilon}^{(n-1)'} = D_{m\varepsilon}' \left[\varepsilon^{(n-1)}, T^{(n-1)}\right] \quad (m = 4, 5),$$

$f_0(\eta)$ — определяется уравнением

$$f_0''' + \frac{1}{2} f_0 f_0'' = 0$$

при граничных условиях

$$f_0(0) = 0, \quad f_0'(0) = 0, \quad \lim_{\eta \to +\infty} f_0' = 1,$$

$\delta_\vartheta^{(n)}$, $\delta_\varepsilon^{(n)}$, $\delta_T^{(n)}$ — члены, содержащие степени выше первой или произведения поправок $\Delta\vartheta^{(n-1)}$, $\Delta\varepsilon^{(n-1)}$, $\Delta T^{(n-1)}$ и их первых производных.

При $x = 0$ уравнения (11) превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения относительно $\Delta\vartheta_0^{(n-1)}$, $\Delta\varepsilon_0^{(n-1)}$, $\Delta T_0^{(n-1)}$.

В (11) величины

$$\varrho, \mu, \lambda, C_p, \Phi,$$

$$Sc, Pr, \frac{\mu}{\lambda}, \varrho\mu,$$

$$\frac{dSc}{d\varepsilon}, \quad \frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right), \quad \frac{\partial(\varrho\mu)}{\partial\varepsilon}, \quad \frac{\partial(\varrho\mu)}{\partial T}$$

$$E_i, D_j \, (i = 1, \ldots, 5; \; j = 1, \ldots, 7)$$

$$\frac{dE_k}{d\varepsilon} \, (k = 1, 2),$$

$$\frac{\partial D_l}{\partial \varepsilon} \, (l = 4, 5),$$

$$\frac{\partial D_m}{\partial T} \, (m = 6, 7)$$

считаются известными функциями ε и T.

Интегральные соотношения в случае конуса имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\vartheta_w}{f_0''(0)} \frac{j_w}{Sc_w} &= -\frac{3}{2}\Lambda_1 + x\Lambda_2 - x\frac{d\Lambda_1}{dx} \\ \frac{\vartheta_w}{f_0''(0)} \left(\frac{C_{p\,w}}{Pr} q_{Tw} + \frac{\Delta h}{Sc_w} j_w\right) &= \frac{3}{2} X + x\frac{dX}{dx} \\ \frac{\vartheta_w}{f_0''(0)} &= \frac{3}{2}\Delta + x\frac{d\Delta}{dx}, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

где $\Lambda_1 = \int\limits_0^\infty \varrho\mu\zeta\,(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})\,\frac{f_0''}{\vartheta}\,d\eta,$

$$\Lambda_2 = \int\limits_0^\infty \left(\mu\Phi - \varrho\mu\,\frac{d\tilde{\varepsilon}}{dx}\right)\frac{f_0''}{\vartheta}\,d\eta.$$

$$X = \int\limits_0^\infty \varrho\mu\zeta\,(\tilde{\theta} - \theta)\,\frac{f_0''}{\vartheta}\,d\eta,$$

$$\Delta = \int\limits_0^\infty \varrho\mu\zeta\,(1 - \zeta)\,\frac{f_0''}{\vartheta}\,d\eta,$$

$$j = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}, \quad q_T = \frac{\partial T}{\partial\eta}.$$

Чтобы оказалось возможным последовательное определение функций $V_\varepsilon^{(n)}$, $V_\theta^{(n)}$ и $V_\vartheta^{(n)}$ необходимо: 1) рассматривать интегральные соотношения в порядке, указанном в (12); 2) выбирать следующим образом зависимости величин $\Lambda_1^{(n)}$, $\Lambda_2^{(n)}$, $X^{(n)}$ и $\Delta^{(n)}$ от функций $V_\varepsilon^{(n)}$, $V_\theta^{(n)}$ и $V_\vartheta^{(n)}$:

$$\Lambda_1^{(n)} = \int\limits_0^\infty f_{\Lambda_1}\left[\eta;\ \varepsilon^{(n/2)},\ \theta^{(n/2)},\ \vartheta^{(n/2)}\right]d\eta +$$

$$+ \left(V_\varepsilon^{(n)} - 1\right)\int\limits_0^\infty f'_{\Lambda_1\varepsilon}\left[\eta;\ \varepsilon^{(n/2)},\ \theta^{(n/2)},\ \vartheta^{(n/2)}\right]\varepsilon_\eta^{(n/2)'}\,\eta\,d\eta,$$

$$\Lambda_2^{(n)} = \int\limits_0^\infty f_{\Lambda_2}\left[\eta;\ \varepsilon^{(n/2)},\ \theta^{(n/2)},\ \vartheta^{(n/2)}\right]d\eta +$$

$$+ \left(V_\varepsilon^{(n)} - 1\right)\int\limits_0^\infty f'_{\Lambda_2\varepsilon}\left[\eta;\ \varepsilon^{(n)},\ \theta^{(n/2)},\ \vartheta^{(n/2)}\right]\varepsilon_\eta^{(n/2)'}\,\eta\,d\eta,$$

$$X^{(n)} = \int\limits_0^\infty f_X\left[\eta;\ \varepsilon^{(n)},\ \theta^{(n/2)},\ \vartheta^{(n/2)}\right]d\eta +$$

$$+ \left(V_\theta^{(n)} - 1\right)\int\limits_0^\infty f'_{X\,\theta}\left[\eta;\ \varepsilon^{(n/2)},\ \theta^{(n/2)},\ \vartheta^{(n/2)}\right]\theta_\eta^{(n/2)'}\eta\,d\eta,$$

$$\Delta^{(n)} = \frac{1}{V_\vartheta^{(n)}}\int\limits_0^\infty f_\Delta\left[\eta;\ \varepsilon^{(n)},\ \theta^{(n)},\ \vartheta^{(n/2)}\right]d\eta +$$

$$+ \frac{\left[V_\vartheta^{(n)} - 1\right.}{V_\vartheta^{(n)}}\int\limits_0^\infty f'_{\Delta\vartheta}\left[\eta;\ \varepsilon^{(n)},\ \theta^{(n)},\ \vartheta^{(n/2)}\right]\vartheta_\eta^{(n/2)'}\eta\,d\eta,$$

где $f_{\Lambda_1} = \varrho\mu\zeta\,(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})\frac{f_0''}{\vartheta}$ $\quad f_{\Lambda_2} = \left(\mu\Phi - \varrho\mu\,\frac{d\tilde{\varepsilon}}{dx}\right)\frac{f_0''}{\vartheta}$

$f_X = \varrho\mu\zeta\,(\tilde{\theta} - \theta),$

$f_\Delta = \varrho\mu\zeta\,(1 - \zeta)\frac{f_0''}{\vartheta}.$

Для корректировки профиля температуры в соответствии с интегральным соотношением энергии в качестве промежуточной переменной выбрана энтальпия торможения, поскольку она, в отличие от температуры, изменяется монотонно поперек пограничного слоя.

С учетом сделанных выше замечаний, составим, исходя из (12), систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $V_\varepsilon^{(n)}$, $V_\theta^{(n)}$ и $V_\vartheta^{(n)}$, разрешенную относительно первых производных

$$\left.\begin{aligned} V_{\varepsilon x}^{(n)\prime} &= A_1(x)\, V_\varepsilon^{(n)} + A_2(x), \\ V_{\theta x}^{(n)\prime} &= B_1(x)\, V_\theta^{(n)} + B_2(x), \\ V_{\vartheta x}^{(n)\prime} &= C_1(x)\, V_\vartheta^{(n)} + C_2(x)\, V_\vartheta^{(n)2} + C_3(x)\, V_\vartheta^{(n)3}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Для системы (13) формируется задача Коши. Возникающие при интегрировании этой системы трудности типичны для теории пограничного слоя (коэффициенты в (13) имеют при $x = 0$ особенность вида $\frac{1}{x}$). Разложение искомых функций в степенные ряды по степеням x в окрестности $x = 0$ позволяет преодолеть эти трудности.

Если решение уравнений пограничного слоя при $x = 0$ известно точно, то начальные значения функций $V_f^{(n)}$, очевидно, равны 1, т. е.

$$V_\varepsilon^{(n)}(0) = V_\theta^{(n)}(0) = V_\vartheta^{(n)}(0) = 1.$$

Итак, система (II), в которой взято

$$\delta F^{(n)} \equiv 0, \quad \frac{\partial \Delta F^{(n-1)}}{\partial x} \equiv 0 \quad (F = \vartheta, \varepsilon, T)$$

вместе с системой (13) дает основную систему уравнений метода последовательных приближений

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \left[\Delta\vartheta^{(n-1)}\right]''_{\eta\eta} + A_\vartheta^{(n-1)}\left[\Delta\vartheta^{(n-1)}\right]'_\eta + B_\vartheta^{(n-1)}\Delta\vartheta^{(n-1)} + C_\vartheta^{(n-1)} = 0, \\ &\qquad \left[\Delta\vartheta^{(n-1)}\right]'_{\eta\, w} = 0, \quad \lim_{\eta\to+\infty}\Delta\vartheta^{(n-1)} = 0, \\ &2)\ \left[\Delta\varepsilon^{(n-1)}\right]''_{\eta\eta} + A_\varepsilon^{(n-1)}\left[\Delta\varepsilon^{(n-1)}\right]'_\eta + B_\varepsilon^{(n-1)}\Delta\varepsilon^{(n-1)} + C_\varepsilon^{(n-1)} = 0, \\ &\qquad \Delta\varepsilon_w^{(n-1)} = 0, \quad \lim_{\eta\to+\infty}\Delta\varepsilon^{(n-1)} = 0, \\ &3)\ \left[\Delta T^{(n-1)}\right]''_{\eta\eta} + A_T^{(n-1)}\left[\Delta T^{(n-1)}\right]'_\eta + B_T^{(n-1)}\Delta T^{(n-1)} + C_T^{(n-1)} = 0, \\ &\qquad \Delta T_w^{(n-1)} = 0, \quad \lim_{\eta\to+\infty}\Delta T^{(n-1)} = 0, \\ &\qquad 4)\ V_{\varepsilon x}^{(n)\prime} = A_1(x)\, V_\varepsilon^{(n)} + A_2(x), \\ &\qquad 5)\ V_{\theta x}^{(n)\prime} = B_1(x)\, V_\theta^{(n)} + B_2(x), \\ &\qquad 6)\ V_{\vartheta x}^{(n)\prime} = C_1(x)\, V_\vartheta^{(n)} + C_2(x)\, V_\vartheta^{(n)2} + C_3(x)\, V_\vartheta^{(n)3}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Порядок расчета характеристик пограничного слоя по системе (14) следующий: 1) интегрируем уравнения (1) — (3), (14), определяя величины $F^{(n/2)}(F = \vartheta, \varepsilon, T)$; 2) итегрируем уравнения (4) — (6), определяя $V_\varepsilon^{(n)}$, $V_\theta^{(n)}$, $V_\vartheta^{(n)}$, затем $\vartheta^{(n)}$, $\varepsilon^{(n)}$, $\theta^{(n)}$ (следовательно, и $T^{(n)}$).

В качестве примера, иллюстрирующего применение этого метода, произведен расчет пограничного слоя на конусе при следующих условиях: 1) газ в пограничном слое — смесь атомов и молекул азота; 2) в отношении зависимостей физических характеристик смеси газов от концентрации и температуры использованы предположения (8); 3) $\widetilde{\varrho}' = 854 \cdot 10^{-8}\ CGS$, $\widetilde{\mu}' = 619 \cdot 10^{-6}\ CGS$, $\widetilde{M} = 6{,}76$, $\widetilde{C}_p' = 12{,}84 \cdot 10^6\ CGS$, $\widetilde{T}' = 2000°\ K$, $\widetilde{h}_м' = 231 \cdot 10^8\ CGS$, $\widetilde{\Delta h}' = 3430 \cdot 10^8\ CGS$, $\widetilde{\gamma} = 1{,}2995$, $\widetilde{\varepsilon} = 0$

4) $\varepsilon_w = 0{,}989$, $T_w' = 8000°\ K$,

5) $C_{рм}' = 13{,}19 \cdot 10^6\ CGS$, $\Delta C_p' = 4{,}01 \cdot 10^6\ CGS$,

6) $Pr = 0{,}689$,

7) $\Delta h = 3520 \cdot 10^8$ CGS,

8) $\bar{\omega} = 1{,}09 \cdot 10^{-2}$,

где

$$\bar{\omega} = |\omega_{max}| = |\omega\,(1{,}2000^\circ\,\mathrm{K})|, \quad \omega(\varepsilon, T') = m_a K_a,$$

9) зависимости

$$Sc = Sc(\varepsilon), \quad \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda}(\varepsilon), \quad h = h(\varepsilon, T),$$

$$\varrho\mu = \varrho\mu(\varepsilon, T), \quad \Phi = \Phi(\varepsilon, T) = 0{,}2553\,\frac{\omega}{\bar{\omega}}$$

задавались в табличной форме.

При этом:

1) коэффициент вязкости $\mu_м$ молекулярного азота принят равным коэффициенту вязкости недиссоциированного воздуха [9];

2) для коэффициента вязкости атомарного азота μ_a принята справедливой формула С. Чемпена [4], использованная также в [5]

$$\mu_a = 0{,}998\,\frac{(m_a kT)^{1/2}}{\pi^{3/2}\sigma_a^2},$$

где k — постоянная Больцмана;

σ_a — газокинетический поперечник атомов;

3) вязкость смеси вычислялась по формуле Е. Кеннарда [10]

$$\mu = \beta_a \mu_a + \beta_м \mu_м,$$

где

$$\beta_a = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_{ам}^2}{\sigma_a^2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}}, \quad \beta_м = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_{ам}^2}{\sigma_м^2}\,\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}},$$

$\sigma_м$ — газокинетический поперечник молекул азота;

$\sigma_{ам}$ — расстояние между центрами атома и молекулы азота при их столкновении.

σ_a, $\sigma_м$, $\sigma_{ам}$ по [9];

4) коэффициенты теплопроводности λ_a и $\lambda_м$ вычислялись по формуле Эйкена [4]

$$\lambda_a = \frac{1}{4}(9\gamma_a - 5)\,\mu_a C_{v\,a}, \quad \lambda_м = \frac{1}{4}(9\gamma_м - 5)\,\mu_м C_{vм},$$

где

$$\gamma_a = \frac{C_{pa}}{C_{v\,a}}, \quad \gamma_м = \frac{C_{pм}}{C_{v\,м}},$$

5) коэффициент теплопроводности диссоциированного азота, вычисленный по приближенной формуле, также предложенной Е. Кеннардом [10]

$$\lambda = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\,\lambda_a + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,\lambda_м,$$

удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными [11];

6) коэффициент диффузии D_{12} подсчитывался по формуле кинетической теории газов [3]

$$D_{12} = \frac{3}{8n\,\sigma_{ам}^2}\left\{\frac{3}{2}\,kT\,\frac{1}{2\pi m_A}\right\}^{1/2},$$

где n — общее число атомов и молекул в единице объема;

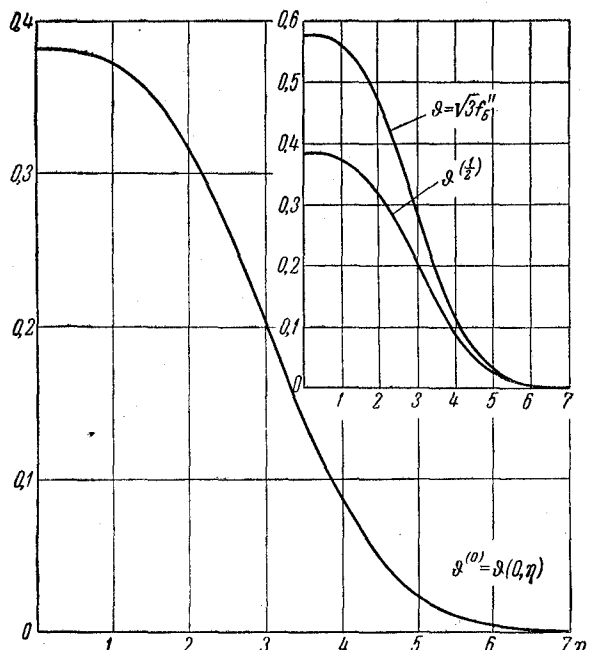

0,4
0,3
0,2
0,1
0
1
2
3
4
5
6
7η
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1
2
3
4
5
6
7
ϑ=√3f6''
ϑ(1/2)
ϑ(0)=ϑ(0,η)

Рис. 2.

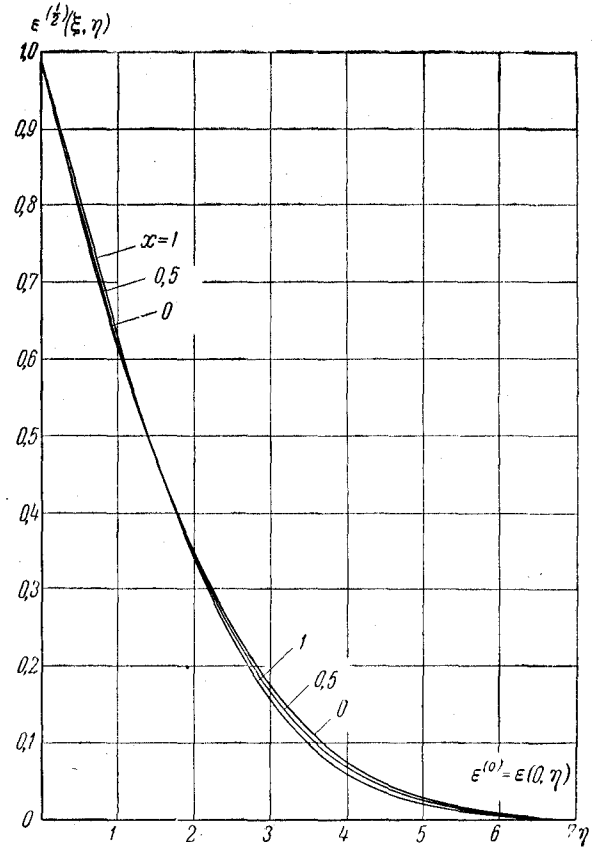

ε(1/2)(ξ, η)
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1
2
3
4
5
6
7η
x=1
0,5
0
1
0,5
0
ε(0)=ε(0, η)

Рис. 3.

7) удельные энтальпии и теплоемкости для атомарного и молекулярного азота заимствованы [7—8];

8) для абсолютной молярной скорости диссоциации двухатомного газа принималось справедливым

$$K_a = \left(\frac{p}{RT}\right)^3 \frac{K_R(T)}{1+\varepsilon}\left[\frac{K_p(T)(1-\varepsilon)}{p} - \frac{4\varepsilon^2}{1+\varepsilon}\right],$$

где $K_p(T)$ — константа равновесия диссоциации;

$K_R(T)$ — константа скорости рекомбинации.

Функция $K_p(T)$ взята из работы Мартинека [8]. О константе скорости рекомбинации $K_R(T)$ вполне достоверных сведений пока нет. В настоящем расчете зависимость $K_R(T)$ в интервале температур от 2000 до 10000° К выбрана на основе опубликованных работ [6, 12, 13].

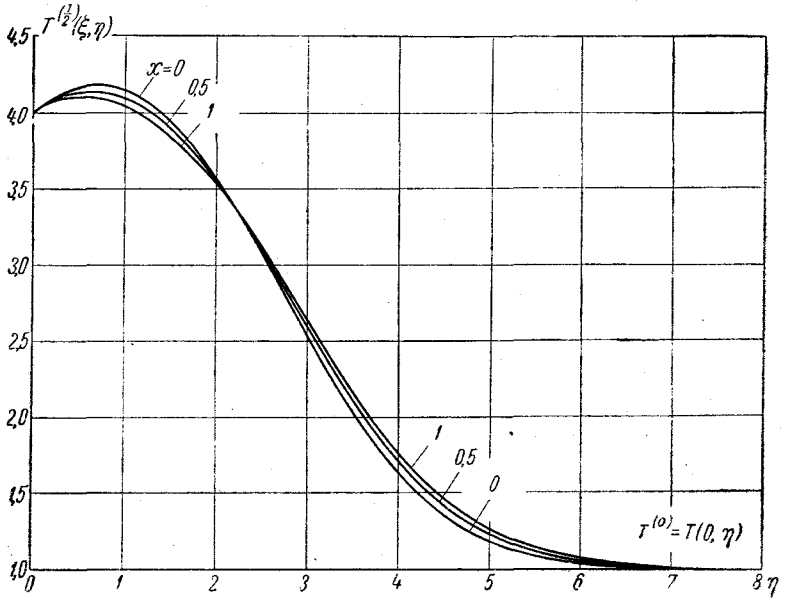


Рис. 4.

Результаты расчетов в виде кривых изменения функций $\vartheta^{(1/2)}(\eta)$, $\varepsilon^{(1/2)}(\eta)$ и $T^{(1/2)}(\eta)$ поперек слоя при различных значениях (рис. 2, 3, 4) дают возможность наглядно убедиться в нарушении автомодельности распределения ε и T в пограничном слое конуса и оценить характер влияния происходящих в пограничном слое химических реакций диссоциации и рекомбинации на деформацию профилей концентрации и температуры. Функция $\vartheta^{(1/2)}$ от x не зависит.

3. Пограничный слой в несжимаемой жидкости с продольным градиентом давления во внешнем потоке. Выше предлагаемый метод применялся к расчету течения, осложненного химическими реакциями, но при отсутствии изменения давления вдоль поверхности тела вращения. Сейчас используем этот метод при исследовании пограничного слоя с продольным градиентом давления и тем покажем применимость метода к исследованию двух важных задач теории пограничного слоя.

Установившееся течение несжимаемой жидкости в пограничном слое на теле вращения при наличии продольного перепада давления описы-

вается (в предположении постоянства физических характеристик жидкости) уравнением

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 t}{\partial \zeta^2}+\frac{\bar{u}'_\xi}{\bar{u}}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1-\zeta^2}{t}\right)+\zeta\cdot\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{t}\right)=0 \\ &\text{с граничными условиями} \\ &\frac{\partial t}{\partial \zeta}\Big|_{\zeta=0}=-\frac{1}{t_w}\frac{\bar{u}'_\xi}{\bar{u}}, \quad t|_{\zeta=1}=0, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где

$$t=\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{\eta}}, \quad \bar{\eta}=\frac{\bar{u}'}{\sqrt{\nu \bar{u} l}}\,y', \quad d\xi=\frac{\bar{u}'}{\bar{u}l}\,dx'.$$

Вводя новую искомую функцию $\vartheta=t\sqrt{\xi}$ и переходя к новым независимым переменным ξ, η, согласно $\xi=\xi$,

$$\zeta=f'_{0\eta}(\eta), \tag{16}$$

причем $\lim\limits_{\zeta\to 1}\eta=+\infty$, получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta^2}+\left(a+\frac{b}{\vartheta^2}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}+m\,\frac{1}{\vartheta}+k\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\vartheta}\right)=0 \\ &\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\Big|_{\eta=0}=-\frac{\beta(\xi)}{2}\,\frac{f''_0(0)}{\vartheta_w}, \quad \lim_{\eta\to+\infty}\vartheta=0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где $\beta(\xi)=\dfrac{2\xi\,\bar{u}'_\xi}{\bar{u}}$,

$\vartheta_w=\vartheta|_{\eta=0}$,

$a=a(\eta)$, $b=b(\xi,\eta)$, $m=m(\xi,\eta)$, $k=k(\xi,\eta)$ — известные функции переменных ξ и η.

Задачу будем решать методом последовательных приближений следующим образом. Во-первых, линеаризируем задачу (17), полагая

$$\vartheta^{(n)}=\vartheta^{(n-1)}+\Delta\vartheta^{(n-1)},$$

где $\vartheta^{(n-1)}$ — известная функция ξ, η при $\dfrac{\Delta\vartheta^{(n-1)}}{\vartheta^{(n-1)}}\ll 1$ (n — номер приближения) и пренебрежем затем членом, содержащим $\dfrac{\partial\Delta\vartheta^{(n-1)}}{\partial\xi}$. Получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\Delta\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta^2}+A^{(n-1)}\frac{\partial\Delta\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta}+B^{(n-1)}\Delta\vartheta^{(n-1)}+C^{(n-1)}=0, \\ &\frac{\partial\Delta\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta}\Big|_{\eta=0}=-\frac{\beta(\xi)}{2}\,\frac{f''_0(0)}{\vartheta_w^{(n-1)}}-\frac{\partial\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta}\Big|_{\eta=0}+ \\ &+\frac{\beta(\xi)}{2}\,\frac{f''_0(0)}{\vartheta_w^{(n-1)^2}}\,\Delta\vartheta_w^{(n-1)}, \quad \lim_{\eta\to+\infty}\Delta\vartheta^{(n-1)}=0, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где коэффициенты $A^{(n-1)}$, $B^{(n-1)}$, $C^{(n-1)}$ содержат $\dfrac{\partial^2\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta^2}$, $\dfrac{\partial\vartheta^{(n-1)}}{\partial\eta}$, $\vartheta^{(n-1)}$.

Во-вторых, запишем интегральное соотношение импульсов

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta_w=\xi\,\frac{d\alpha_1}{d\xi}+\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\beta(\xi)}{2}\,\alpha_2 \\ &\text{где} \\ &\alpha_1=\int_0^1\frac{\zeta(1-\zeta)}{\vartheta}\,d\zeta, \quad \alpha_2=\int_0^1\frac{(1-\zeta^2)}{\vartheta}\,d\zeta \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

В основе метода расчета, как говорилось в разделе 1, лежит принцип поочередного интегрирования уравнения (18) по переменной η и некоторого обыкновенного дифференциального уравнения по переменной ξ, получаемого из (19).

Пусть в результате интегрирования (18) определилась функция $\Delta\vartheta^{(n-1)}$, так что

$$\vartheta^{(n/2)} = \vartheta^{(n-1)} + \Delta\vartheta^{(n-1)}.$$

Положим

$$\vartheta^{(n)} = V^{(n)}(\xi)\,\vartheta^{(n/2)},$$

где $V^{(n)}(\xi)$ — пока неопределенная функция ξ.

Подчиняя функцию $\vartheta^{(n)}$ интегральному соотношению (19), получим нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $V^{(n)}(\xi)$

$$\left.\begin{aligned} \xi V_\xi^{(n)\prime} &= R^{(n)}V^{(n)} + S^{(n)}V^{(n)3} \\ R^{(n)} &= \frac{\alpha_1^{(n/2)} + \beta(\xi)\,\alpha_2^{(n/2)} + 2\xi\alpha_1^{(n/2)}}{2\alpha_1^{(n/2)}} \\ S^{(n)} &= -\frac{\vartheta_w^{(n/2)}}{\alpha_1^{(n/2)}} \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

где

Уравнение (20) имеет особенность при $\xi = 0$. В окрестности $\xi = 0$ его решение строится в виде степенного ряда по ξ

$$V^{(n)}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k^{(n)}(\xi),$$

если, например,

$$\beta(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \xi^k.$$

В качестве нулевого приближения $\vartheta^{(0)}$ можно взять величину

$$\vartheta^{(0)} = \frac{V^{(0)}(\xi)\, f_0'(\eta)}{\sqrt{2}},$$

где $f_0(\eta)$ удовлетворяет уравнению пограничного слоя при $\xi = 0$

$$f_0''' + f_0 f_0'' + \beta\left(1 - f_0'^2\right) = 0. \qquad (21)$$

Заметим, что в (16) в качестве функции $f'_0(\eta)$ можно взять первую производную функции f_0, удовлетворяющей уравнению (21).

В качестве примера произведен численный расчет конфузорной части пограничного слоя при условии, что

$$\tilde{u} = c\sqrt{\xi}\,(1 - \xi).$$

В этом случае

$$\beta(\xi) = \frac{1 - 3\xi}{1 - \xi}.$$

Оказалось, что $V_1^{(0)} = -0{,}6165$, $V_2^{(0)} = -0{,}5851$. При этом, очевидно, что $V_0^{(0)} = 1$.

Уравнение (20) относительно $V^{(0)}(\xi)$ проинтегрировано численно. Затем вычислены коэффициенты $A^{(0)}$, $B^{(0)}$, C^0 и уравнение (18) относительно $\Delta\vartheta^{(0)}(\xi, \eta)$ интегрировалось численно поперек слоя при $\xi = 0{,}05$; 0,10; 0,15; 0,20; 0,25; 0,30.

В результате найдено, в частности, распределение напряжения трения вдоль поверхности тела. На рис. 5 дано сравнение

распределения поверхностного трения, полученного настоящим методом, с результатами четвертого приближения по методу Дородницына А. А. [1].

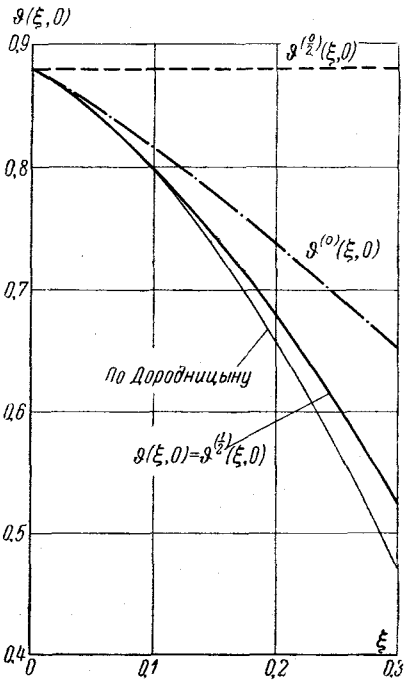


Рис. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дородницын А. А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя. ПМТФ, 1960, № 3.
2. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. ГИФМЛ, 1962.
3. Вукалович М. П., Кириллин В. А., Ремизов С. А. и др. Термодинамические свойства газов. Машгиз, 1953.
4. Чепмен С. и Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. ИИЛ, 1960.
5. Физическая газодинамика. Изд-во АН СССР, 1959.
6. Фэй, Риддел. Теоретический анализ теплообмена в лобовой точке, омываемой диссоциированным воздухом. Сб. «Проблемы движения головной части ракет дальнего действия». ИИЛ, 1959, стр. 217—256.
7. Beckett Ch., Haar L. Proc. Joint Conf. Thermodyn. and Transport Properties of Fluids (1957), London, 1958, p. 27—34.
8. Martinek F. Thermodynamic and Transport Properties of Gases, Liquids and Solids, N. Y., 1959, p. 130—157.
9. NASA Techn. Report, 1959, N R-50.
10. Kennard E. Kinetic Theory of Gases, N. Y., 1938.
11. Burhorn F. Z. Phys., 1959, 155, N 1, 42—58.
12. Lick W. J. Fluid Mech., 1960, 7, N 1, p. 128—144.
13. Herron J., Franklin J., Bradt P., Dibeler V. J. Chem. Phys., 1958, 29, N 1, p. 230.