Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLIV, вып. 3, 1964 г.

УДК 533.601.15

УЧЕТ ИЗЛУЧЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОБТЕКАНИЯ ТУПОНОСОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Г. А. Колтон

При движении тел с большими сверхзвуковыми скоростями газ, находящийся между поверхностью тела и ударной волной, нагревается до нескольких тысяч градусов. При таких температурах теплообмен излучением между частицами газа, а также между газом и поверхностью тела, оказывает существенное влияние на параметры газа в ударном слое. В этом случае для решения задачи обтекания тупоносого тела гиперзвуковым потоком газа необходимо привлечь полную систему уравнений газовой динамики с учетом вязкости и теплопроводности газа и радиационного поля.

При решении задачи будем пренебрегать радиационным давлением и плотностью лучистой энергии, что допустимо при температурах, значительно меньших 30 0000° К. Кроме того, в работе не учитывается влияние излучения на параметры газа перед фронтом ударной волны. При этих допущениях полная система уравнений газовой динамики, с учетом радиационного поля, записанная в безразмерной форме, принимает вид

$$\frac{u}{1+\frac{y}{R}}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{uv}{y+R}=-\frac{\tau}{1+\frac{y}{R}}\frac{\partial p}{\partial x}+h_0\tau\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{u}{1+\frac{y}{R}}\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{u^2}{R+y}=-\tau\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial(\varrho ur)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\varrho vr\left(1+\frac{y}{R}\right)\right]=0;$$

$$\frac{u}{1+\frac{y}{R}}\frac{\partial i}{\partial x}+v\frac{\partial i}{\partial y}=\tau\left(\frac{u}{1+\frac{y}{R}}\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}\right)+h_0\tau^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+$$

$$+h_1\tau\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau\frac{\partial i}{\partial y}\right)+n_0q, \qquad (1)$$

$$r=\bar{r}+y\cos\alpha,$$

$$\tau=\frac{1}{\varrho}=\tau(i,\ p),$$

$$\varrho\mu=K=\text{const},$$

$$Pr=\text{const}.$$

где x, y — координаты, отнесенные к R_0 — радиусу кривизны поверхности тела в лобовой точке; x — отсчитывается вдоль поверхности тела от лобовой точки, y — по нормали к поверхности тела;

u, v — составляющие вектора скорости, отнесенные к V_0 от скорости набегающего потока;

ϱ — плотность газа, отнесенная к ϱ_0;

p — давление в потоке, отнесенное к $\varrho_0 V_0^2$;

q — приток тепла к единице массы газа за счет излучения, отнесенный к $4\pi\alpha_1 B_1$;

R — радиус кривизны в любой точке тела, отнесенный к R_0;

α_1 — осредненный по частотам массовый коэффициент поглощения газа, соответствующий температуре и давлению газа за скачком уплотнения на оси симметрии;

i — энтальпия газа, отнесенная к V_0^2;

$$B_1 = \frac{\sigma}{\pi} T_1^4;$$

T_1 — температура газа за скачком на оси симметрии;

μ — вязкость газа;

$\bar{r}$ — расстояние точки поверхности тела до оси симметрии;

α — угол наклона поверхности тела к линии симметрии.

Кроме того, здесь положено

$$h_0 = \frac{K}{\varrho_0^2 V_0 R_0}, \qquad h_s = \frac{h_0}{Pr}, \qquad n_0 = \frac{4\pi\alpha_1 B_1 R_0}{V_0^3}.$$

Аналогичная система уравнений с «исчезающей» вязкостью и учетом радиационного поля использована А. Н. Румынским [1].

Система (1) должна быть решена при двух граничных условиях.

I. На поверхности тела при $y = 0$ выполняется условие обтекания

$$u = 0, \quad v = 0.$$

Если принять, что поверхность тела теплоизолирована и степень черноты стенки равна 1, то граничное условие для энтальпии на стенке имеет вид

$$-h_1 \tau \frac{\partial i}{\partial y} = m_0 (\bar{F} - B_w),$$

$$\bar{F} = \int_0^\infty \bar{F_\nu}\, d\nu,$$

где $\bar{F_\nu}$ — поток лучистой энергии частоты ν, падающей на стенку;

$$B_w = T_w^4; \quad m_0 = \frac{\pi B_1}{\varrho_0 V_0^3}.$$

2. На фронте ударной волны должны быть выполнены обычные условия динамической совместности

$$i = \frac{1}{2}\sin^2\beta\,(1-\tau^2) + \frac{1}{(\gamma-1)\,M_\infty^2},$$

$$p = (1-\tau)\sin^2\beta + \frac{1}{\gamma\, M_\infty^2},$$

$$u = \cos\beta\cos(\beta-\alpha) + \tau\sin\beta\sin(\beta-\alpha),$$

$$v = \cos\beta\sin(\beta-\alpha) - \tau\sin\beta\cos(\beta-\alpha),$$

где β — угол наклона фронта ударной волны к оси симметрии;

M_∞ — число Маха невозмущенного потока;

γ — отношение теплоемкостей газа невозмущенного потока.

При решении поставленной задачи воспользуемся методом Черного-Фримена [2, 3, 4], рассматривая лишь случай предельного течения, т. е. будем искать решение в предположении, что сжатие газа за скачком бесконечно или $\tau = 0$.

Введем новые независимые переменные $x' = x$ и $z = \frac{\psi}{\frac{1}{2} r^2}$, где ψ — функция тока. На поверхности тела $z = 0$, а на фронте ударной волны $z = 1$. Для перехода к новым переменным имеем формулы

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{2}{r\tau}\left(1 + \frac{y}{R}\right)(v + \tau z \sin\alpha)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{2}{r\tau}(u - \tau z \cos\alpha)\frac{\partial}{\partial z}.$$

В переменных (x', z) система уравнений (1) примет вид

$$r\frac{u}{1+\frac{y}{R}}\frac{\partial u}{\partial x'} - 2u_1 z\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{uvr}{y+R} = \frac{-\tau r}{1+\frac{y}{R}}\frac{\partial p}{\partial x'} +$$

$$+ 2v_1\frac{\partial p}{\partial z} + 4h_0 u_2\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{u_2}{r}\frac{\partial u}{\partial z}\right\};$$

$$r\frac{u}{1+\frac{y}{R}}\frac{\partial v}{\partial x'} - 2u_1 z\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{u^2 r}{y+R} = -2u_2\frac{\partial p}{\partial z},$$

$$r\frac{u}{1+\frac{y}{R}}\frac{\partial i}{\partial x'} - 2u_1 z\frac{\partial i}{\partial z} = \tau\left[r\frac{u}{1+\frac{y}{R}}\frac{\partial p}{\partial x'} - 2u_1 z\frac{\partial p}{\partial z}\right] +$$

$$+ 4h_1 u_2\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{u_2}{r}\frac{\partial i}{\partial z}\right\} + 4h_0\frac{u_2^2}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + rn_0 q,$$

$$y = \frac{1}{2}\int_0^z \frac{\tau r}{u_2}dz,$$

$$v_1 = \frac{u_2}{1+\frac{y}{R}}\frac{\partial y}{\partial x},$$

$$u_1 = u\sin\alpha + v\cos\alpha,$$

$$v_1 = v + \tau z\sin\alpha,$$

$$u_2 = u - \tau z\sin\alpha.$$

В предельном случае, полагая $\tau = 0$ и $x' \equiv x$, получим

$$y = 0, \quad v_1 = v = 0, \quad r = \bar{r}, \quad u_1 = u\sin\alpha, \quad u_2 = u,$$

$$\bar{r}\frac{\partial u}{\partial x} - 2z\bar{r}'\frac{\partial u}{\partial z} = 2h_0\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial^2(u^2)}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{u\bar{r}}{R}, \qquad (2)$$

$$\bar{r}u\frac{\partial i}{\partial x} - 2uz\sin\alpha\frac{\partial i}{\partial z} = 4h_1 u\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{\bar{r}}\frac{\partial i}{\partial z}\right) +$$

$$+ 4h_0\frac{u^2}{\bar{r}}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \bar{r}n_0 q.$$

Выпишем условия на скачке для нашей задачи. Поскольку $y=0$, то угол наклона скачка совпадает с углом наклона поверхности тела к оси симметрии, т. е. $\beta=\alpha$. При больших скоростях набегающего потока величины $\frac{1}{\gamma M_\infty^2}$ и $\frac{1}{(\gamma-1)M_\infty^2}$ малы по сравнению с единицей и ими можно пренебречь. Таким образом, граничные условия на скачке в предельном случае течения принимают вид

$$i=\frac{1}{2}\sin^2\alpha,$$

$$p=\sin^2\alpha,$$

$$u=\cos\alpha,$$

$$v=0.$$

Рассмотрим первое уравнение системы (2)

$$\bar{r}\frac{\partial u}{\partial x}-2z\bar{r}'\frac{\partial u}{\partial z}=2h_0\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial^2(u^2)}{\partial z^2}. \tag{3}$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять граничным условиям

$$u=0 \text{ при } z=0,$$
$$u=\cos\alpha \text{ при } z=1. \tag{3'}$$

Полагая $u=\bar{r}\sqrt{z}\,\bar{u}$ и $z=\xi^2$, из уравнения (3) и граничных условий (3') получим: вдоль оси симметрии $(\bar{r}=0)$ выполняется соотношение $u=1$.

Из второго уравнения системы (2) и граничного условия при $z=1$ найдем выражение для давления вдоль оси симметрии

$$p=\sin^2\alpha=\sin^2\frac{\pi}{2}=1. \tag{4}$$

Третье уравнение системы (2) в переменных $\bar{r}$, ξ принимает вид

$$h_1\bar{u}^2\frac{\partial^2 i}{\partial\xi^2}+\left[\bar{u}\,\xi^2\sin\alpha+\frac{1}{2}h_1\frac{\partial(\bar{u}^2)}{\partial\xi}\right]\frac{\partial i}{\partial\xi}-$$
$$-u\,\xi\bar{r}\sin\alpha\frac{\partial i}{\partial\bar{r}}=-n_0q-h_0\bar{r}^2\bar{u}^2\left[\frac{\partial(\xi\bar{u})}{\partial\xi}\right]^2. \tag{5}$$

Граничные условия для уравнения (5) при $\xi=0$

$$\bar{u}\frac{\partial i}{\partial\xi}=\lambda=-m_1\left(F^-T_w^4\right), \tag{5'}$$

$$m_i=\frac{m_0}{h_1}$$

при $\xi=1$

$$i=\frac{1}{2}\sin^2\alpha.$$

В предельном случае течения для притока лучистой энергии, входящего в правую часть уравнения (5), имеем [1]

$$q=\frac{1}{2}\int_0^\infty\alpha_\nu\,d\nu\left\{B_{\nu\,w}E_2(\mu_\nu)+\int_0^{\mu_\nu}B_\nu E_1(\mu_\nu-t)\,dt+\right.$$
$$\left.+\int_{\mu_\nu}^{\bar{\mu}_\nu}B_\nu E_1(t-\mu_\nu)\,dt-2B_\nu\right\}.$$

Выражение для F^- — потока лучистой энергии, падающего на поверхность тела

$$F^- = \int_0^\infty F_\nu^- \, d\nu = \int_0^\infty d\nu \iint_{(2\pi)} J_{\nu l}^- \cos\theta \, d\Omega, \tag{6}$$

где $J_{\nu l}^-$ — интенсивность излучения частоты ν, распространяющегося от ударной волны в направлении l;

θ — угол между направлением l и положительным направлением оси y.

Нетрудно получить выражение

$$J_{\nu l}^- = \sec\theta \, e^{-\mu_\nu \sec\theta} \int_{\mu_\nu}^{\bar{\mu}_\nu} B_\nu e^{\mu_\nu \sec\theta} \, d\mu_\nu, \tag{6'}$$

где

$$\mu_\nu = \eta_0 \int_0^\xi \frac{\alpha_\nu}{\bar{u}} \, d\xi; \quad \bar{\mu}_\nu = \eta_0 \int_0^1 \frac{\alpha_\nu}{\bar{u}} \, d\xi; \quad \eta_0 = \varrho_0 a_1 R_0.$$

Подставляя (6′) в (6), после преобразований окончательно получим

$$F^- = 2 \int_0^\infty d\nu \int_0^{\bar{\mu}_\nu} B_\nu E_2(t) \, dt.$$

Вдоль линии симметрии $(\bar{r}=0)$ уравнение (5) и граничные условия (5′) принимают вид

$$h_1 \frac{\partial^2 i_0}{\partial \xi^2} + \xi^2 \frac{di_0}{\partial \xi} = -n_0 q_0, \tag{7}$$

при $\xi = 0$

$$\frac{\partial i_0}{\partial \xi} = \lambda_0 = -m_1 \left(F_0^- - T_{w0}^4\right); \tag{7'}$$

при $\xi = 1$

$$i_0 = \frac{1}{2}.$$

Интегрируя уравнение (7) при граничных условиях (7′), получим нелинейное интегральное уравнение для определения энтальпии на линии симметрии

$$i_0 = \frac{1}{2} + n_1 \left\{ \int_\xi^1 q_0 e^{\frac{\zeta^3}{3h_1}} V_3(\zeta) \, d\zeta + \right.$$

$$\left. + V_3(\xi) \int_0^\xi q_0 e^{\frac{\zeta^3}{3h_1}} \, d\zeta \right\} - \lambda_0 V_3(\xi), \tag{8}$$

где

$$V_3(\xi) = \int_\xi^1 e^{-\frac{\zeta^3}{3h_1}} \, d\zeta; \quad n_1 = \frac{n_0}{h_1}.$$

Решение уравнения (8) может быть найдено методом последовательных приближений. При этом, как показали проведенные расчеты, для обеспечения быстрой скорости процесса последовательных приближений целесообразно выбрать в качестве нулевого приближения выражение

$$T = \begin{cases} T_w & 0 \leqslant \xi \leqslant \varepsilon \\ 1 & \varepsilon < \xi \leqslant 1, \end{cases}$$

где величины T_w и ε подбираются так, чтобы при подстановке указанного выражения в правую часть уравнения (8) получаемое значение вели-

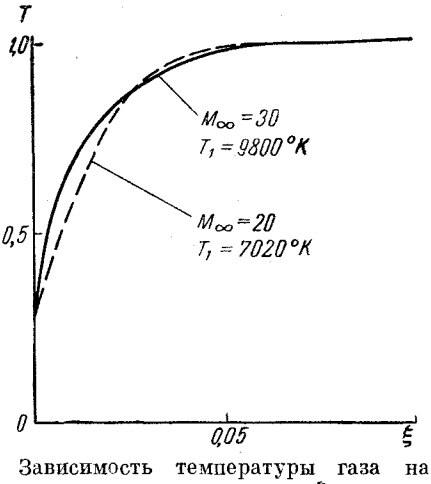
чины $i_0(0) = i_{0w}$ соответствовало температуре T_w. При таком выборе нулевого приближения процесс быстро сходится и достаточно вычисления двух-трех приближений.

В том случае, когда можно пренебречь лучистым теплообменом между частицами газа и учитывать лишь теплообмен излучением между поверхностью тела и газом, задача значительно упрощается и для энтальпии на линии симметрии получим уравнение

$$i_0 = \frac{1}{2} - \lambda_0 V_3(\xi). \tag{9}$$

Выражение (9) представляет собой нелинейное интегральное уравнение с вырожденным ядром. Это уравнение дает явное выражение энтальпии на оси симметрии как функции ξ. Постоянная λ_0, входящая в правую часть уравнения (9), подлежит определению. При нахождении величины λ_0 так же, как и при решении уравнения (8), полезно перейти к осредненному по частотам коэффициенту поглощения газа. Осреднение указанного коэффициента может быть проведено, например, по формуле [5]

$$\bar{a} = \frac{\int_0^\infty a_\nu B_\nu \, d\nu}{\int_0^\infty B_\nu \, d\nu}.$$



Зависимость температуры газа на линии симметрии от ξ.

При использовании осредненного коэффициента поглощения выражения для q_0 и F_0^- значительно упрощаются

$$q_0 = \frac{1}{2}\bar{a}\left\{T_{w_0}^4 E_2(\mu) + \int_0^\mu T_0^4 E_1(\mu - t)\,dt + \int_\mu^{\bar{\mu}} T_0^4 E_1(t - \mu)\,dt - 2T_0^4\right\}$$

$$F_0^- = 2\int_0^{\bar{\mu}} T_0^4 E_2(t)\,dt.$$

Отметим, что из уравнения (9), как частный случай, получается решение, описывающее распределение энтальпии вдоль линии симметрии во всем ударном слое при отсутствии излучения газа и учете только излучения стенки. Действительно в этом случае

$$i_0 = \frac{1}{2} - m_1 T_{w_0}^4 V_3(\xi). \tag{10}$$

Полагая в (10) $\xi = 0$, получим одно уравнение, связывающее величины i_{w_0} и T_{w_0}. В качестве второго недостающего соотношения, связывающего эти величины, необходимо использовать имеющиеся таблицы термодинамических функций воздуха. Окончательно получим

$$i_{w_0} = \frac{1}{2} - m_1 T_{w_0}^4 V_3(0),$$

$$i_{w_0} = f(T_{w_0}).$$

Разрешая эту нелинейную систему алгебраических уравнений, находим i_{w_0}, T_{w_0} и тем полностью определяем энтальпию как функцию

переменной ξ. Результаты численных расчетов для случаев $M_\infty = 30$ и $M_\infty = 20$ приведены на рисунке, откуда видно, что решение $T_0 = T_0(\xi)$ имеет вид, характерный для задач с пограничным слоем: T_0 почти не меняется во всей области ударного слоя, за исключением малой окрестности обтекаемого тела, а в указанной окрестности градиент функции $T_0(\xi)$ весьма велик.

Таким образом, задача об определении параметров газа на линии симметрии при обтекании тупоносого тела излучающим газом сводится к решению одного нелинейного интегрального уравнения для определения энтальпии. Задача об определении параметров газа во всей области ударного слоя подлежит дальнейшему исследованию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Румынский А. Н. Теплообмен в лобовой точке, омываемой излучающей средой. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1961, № 1.
2. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
3. Фримен Н. К теории гиперзвукового потока, обтекающего плоские и осесимметричные тела. Сб. «Проблемы движения головной части ракет дальнего действия». ИЛ, 1959.
4. Любимов Г. А. Обтекание тел потоком неидеального газа с большими сверхзвуковыми скоростями. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 1.
5. Кох, да Сильва. Взаимодействие между излучением и конвекцией в пограничном слое плоской пластины при гиперзвуковых скоростях. Ракетная техника, 1962, № 5.