Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLIV, вып. 3, 1964 г.

УДК 531.39 и 621.926.2

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОЙ ТЕОРИИ ИНЕРЦИОННЫХ ДРОБИЛОК

Ю. И. Северов

В настоящей работе рассматривается, во-первых, движение системы из трех твердых тел, вращающихся вокруг неподвижной точки и имеющих общую геометрическую ось собственных вращений, во-вторых — движение системы, состоящей из двух твердых тел, вращающихся вокруг неподвижной точки и также имеющих общую геометрическую ось собственных вращений.

Выбранные системы дают принципиальные схемы рабочих частей двух вариантов дробилки института Механобр. Так как исследование движения системы твердых тел, вращающихся вокруг неподвижной точки осложнено, при постановке задач вводится ряд ограничений. Здесь рассматривается случай движения каждой из систем, когда одно из тел катится без скольжения по неподвижной конической опоре. При этом условии и некоторых других указанных ниже упрощающих предположениях составлены дифференциальные уравнения движения систем при рабочем ходе дробилок. Для предельного случая даны дифференциальные уравнения движения каждого тела систем в отдельности и систем в целом. В заключение даются замечания об интегрировании полученных уравнений (для предельного случая).

Движение системы с внутренним расположением двигателя

Рассмотрим систему трех тел, состоящую из весомого вала (рис. 1, тело *I*) и свободно насаженных на него независимо друг от друга цилиндра с дебалансным грузом (тело *II*) и конуса (тело *III*). Эти тела могут вращаться вокруг неподвижной точки *O*, где установлен шарнир Кардана-Гука с закрепленной неподвижно одной из вилок. Благодаря этому вал, участвуя в общей прецессии системы, не обладает так называемым собственным вращением. Система движется под действием сил тяжести тел и вращающего момента, приложенного к телу *II*. Ранее [1] указывалось на важность места установки электродвигателя, создающего вращающий момент. В рассматриваемой конструкции статор мотора жестко соединен с телом *I*, а ротор — с телом *II*. Вал и конус считаются динамически симметричными телами вращения. Тело *II* динамически несимметрично, но имеет две взаимно перпендикулярные плоскости материальной симметрии, одна из которых проходит через ось собственного вращения тела.

Исследуем при некоторых упрощающих предположениях движение системы, когда подвижный конус катится без отрыва и без скольжения по неподвижной опоре—неподвижному конусу (рис. 2).

Механика подобного типа дробилок при несколько иной постановке задачи рассмотрена И. И. Блехманом [2] и А. К. Рундквистом [3].

Уравнения движения системы тел при рабочем ходе дробилки. Для движения рассматриваемой системы можно составить уравнения Лагранжа второго рода, аналогично тому, как это сделано для системы, первое из тел которой, благодаря отличию в конструкции дробилки, обладало, кроме прецессии, собственным вращением [1].

Положение системы в пространстве определим при помощи углов Эйлера ϑ, ψ, φ, β и γ. Для этого проведем (рис. 3) через неподвижную точку O четыре системы осей декартовых координат: неподвижную $\xi\eta\zeta$ с горизонтальной плоскостью $\xi\eta$ и осью ζ, направленной вертикально вверх, и подвижные x_1y_1z, x_2y_2z, x_3y_3z, в которых ось z направлена вдоль оси собственных вращений тел *II* и *III*. Оси x_iy_iz соответственно связаны с i-ым телом ($i = 1, 2, 3$), причем ось y_2 лежит в одной из плоскостей симметрии тела *II*. Отметим линию пересечения плоскостей $\xi\eta$ и x_iy_i и проведем так называемую ось узлов ON вдоль этой линии из точки O так, чтобы оси $O\zeta$, Oz, ON представляли правую систему, как это имеет место для всех остальных введенных систем координатных осей.

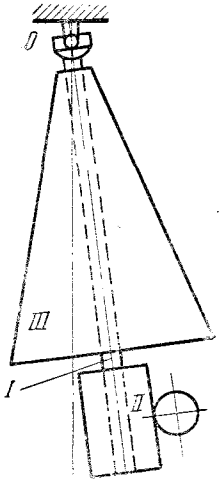


Рис. 1.

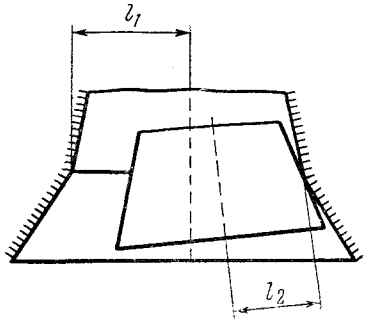


Рис. 2.

Угол ϑ заключен между осями $O\zeta$ и Oz и характеризует вращение системы вокруг оси ON (если это вращение допустимо условиями задачи); угол ψ заключен между осями $O\xi$ и ON и характеризует вращение системы вокруг оси $O\zeta$, угол φ — между осями ON и Ox_1 и характеризует вращение тела I вокруг собственной оси Oz (если такое вращение допускает конструкция); угол β — между осями ON и Ox_2 и характеризует вращение тела *II* вокруг оси Oz; угол γ — между осями ON и Ox_3 и характеризует вращение тела *III* вокруг оси Oz. Угол γ собственного вращения тела *III* благодаря условию качения без скольжения этого тела по неподвижной опоре выражается через угол ψ. Согласно постановке задачи, угол $\vartheta = \text{const}$. Как отмечалось выше, первое из тел системы при рассматриваемой конструкции не имеет собственного вращения, поэтому

$$\dot{\varphi} \equiv 0.$$

В качестве обобщенных координат выбираем независимые параметры ψ и β.

Учитывая полезный момент сопротивления и пренебрегая второстепенными, составим следующие уравнения движения системы тел при рабочем ходе дробилки:

$$\Big[(A_1 + A_3)\sin^2\vartheta + (C_1 + C_2)\cos^2\vartheta + C_3\Big(\cos\vartheta - \frac{l_1}{l_2}\Big)^2 +$$

$$+ A_2\sin^2\vartheta\cdot\sin^2\beta + B_2\sin^2\vartheta\cdot\cos^2\beta - 2G\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\cdot\cos\beta\Big]\ddot{\psi} +$$

$$+2\left[(A_2-B_2)\sin^2\vartheta\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta+G\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\cdot\sin\beta\right]\dot{\psi}\dot{\beta}+$$

$$+(C_2\cos\vartheta-G\sin\vartheta\cdot\cos\beta)\ddot{\beta}+G\sin\vartheta\cdot\sin\beta\dot{\beta}^2=-\frac{l_1-l_2\cos\vartheta}{l_2}M_c, \quad (1)$$

$$(C_2\cos\vartheta-G\sin\vartheta\cdot\cos\beta)\ddot{\psi}+G_2\ddot{\beta}-$$

$$-\left[(A_2-B_2)\sin\vartheta\cdot\cos\beta+G\cos\vartheta\right]\sin\vartheta\cdot\sin\beta\,\dot{\psi}^2=M-\mu P_2\sin\vartheta\cdot\sin\beta,$$

где

$A_1=B_1, C_1$ и $A_3=B_3, C_3$ — моменты инерции тел I и III относительно главных осей, проведенных через неподвижную точку O;

A_2, B_2, C_3 — моменты инерции тела II относительно осей Ox_2, Oy_2, Oz;

G — центробежный момент инерции тела II относительно осей Oy_2 и Oz;

μ — расстояние центра тяжести второго тела от общей оси собственных вращений тел;

M — вращающий момент двигателя;

P_2 — вес второго тела;

M_c — обобщенный момент полезного сопротивления;

l_1 и l_2 — расстояние точки касания подвижного и неподвижного конусов соответственно от осей $O\zeta$ и Oz (рис. 2).

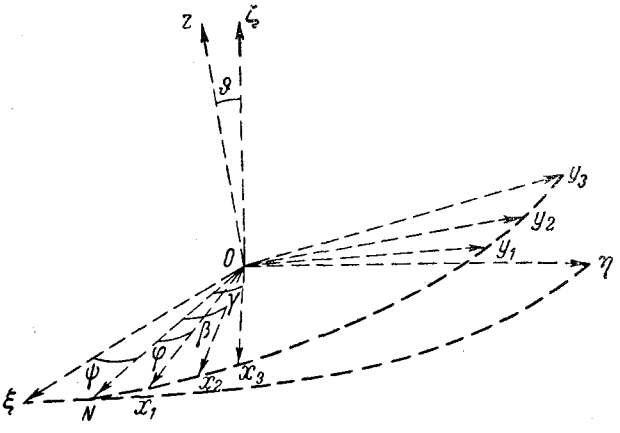


Рис. 3.

Полученные уравнения справедливы и для холостого хода дробилки, если не считать футеровку идеальной. При этом под M_c следует понимать обобщенный момент сопротивления качению подвижного конуса по неподвижному.

В двух составленных уравнениях содержатся три неизвестные величины: параметры ψ и β и момент полезного сопротивления M_c (который выражается через нормальную составляющую реакции дробимого материала). Это обусловлено тем, что связь не является идеальной, и поэтому ее реакцию при составлении уравнений Лагранжа необходимо было перевести в разряд задаваемых сил.

Чтобы число уравнений привести в соответствие с числом неизвестных величин, расчленим систему тел и составим уравнения движения каждого тела в отдельности. При этом для упрощения исследования рассмотрим предельный случай движения системы, который получим, устремив угол υ к нулю и сохраняя неизменным расстояние l_1 точки касания конусов от вертикальной оси дробилки.

Уравнения движения системы тел при рабочем ходе дробилки в предельном случае. При рабочем ходе дробилки в предельном случае система будет совершать плоское горизонтальное движение. Пространственная система сил, приложенных к дробилке, переходит в плоскую (вертикальные составляющие реакций уравновешиваются силами тяжестей тел системы). Ось собственных вращений тел становится параллельной оси прецессии (оси дробилки). Если спроектировать тела на неподвижную плоскость, то получим картину, схематически изображенную на рис. 4, где проекции оснований конусов для ясности опущены.

Составим уравнения плоского движения каждого из тел системы в отдельности, пренебрегая внутренними моментами сопротивления и считая шарнир Кардана-Гука идеальным.

Рассмотрим движение первого тела системы (рис. 5). Тело I считается динамически симметричным. Его центр масс расположен на оси O_1 (положение оси z в предельном случае). Проведя неподвижные координатные

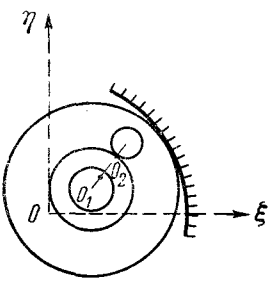


Рис. 4.

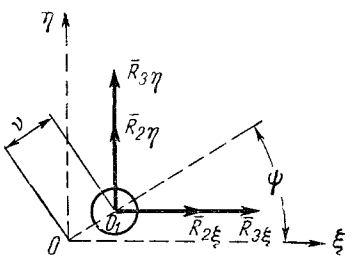


Рис. 5.

оси ξ и η через точку O (проекция оси ζ дробилки на горизонтальную плоскость), напишем уравнения плоского движения первого тела

$$m_1 \ddot{\xi}_{O_1} = R_{2\xi} + R_{3\xi}$$
$$m_1 \ddot{\eta}_{O_1} = R_{2\eta} + R_{3\eta},$$

где m_1 — масса тела I;

ξ_{O_1}, η_{O_1} — координаты центра масс тела I;

$R_{2\xi}$, $R_{2\eta}$, $R_{3\xi}$, $R_{3\eta}$ — проекции на оси ξ и η главного вектора горизонтальных реакций соответственно тел II и III по отношению к телу I.

Для плоского движения тела I составлены два уравнения, так как собственное вращение тела I исключается закреплением одной из вилок шарнира Кардана-Гука, вследствие чего в рассматриваемом предельном случае тело движется поступательно. Так как

$$\xi_{O_1} = \nu \cos\psi, \quad \eta_{O_1} = \nu \sin\psi,$$

где

$$\nu = OO_1 = l_1 - l_2; \tag{2}$$

ψ — угол прецессии системы (см. рис. 5), то уравнения движения тела I принимают вид

$$\begin{aligned} -m_1 \nu (\sin\psi \cdot \ddot{\psi} + \cos\psi \cdot \dot{\psi}^2) &= R_{2\xi} + R_{3\xi} \\ m_1 \nu (\cos\psi \cdot \ddot{\psi} - \sin\psi \cdot \dot{\psi}^2) &= R_{2\eta} + R_{3\eta}. \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим движение второго тела системы (рис. 6). Тело II динамически несимметрично, но обладает двумя плоскостями материальной симметрии, проекция одной из которых на рисунке проходит по линии O_1O_2. Точка O_2 — проекция на горизонтальную плоскость центра масс второго тела. Угол α_2, отсчитываемый от неизменного направления оси ξ до линии O_1O_2, характеризует «абсолютное» вращение второго тела.

Напишем уравнения плоского движения тела *II*

$$m_2 \ddot{\xi}_{O_2} = -R_{2\xi}$$

$$m_2 \ddot{\eta}_{O_2} = -R_{2\eta}$$

$$J_{2O_2} \ddot{\alpha}_2 = M - \mu \sin \alpha_2 R_{2\xi} + \mu \cos \alpha_2 R_{2\eta},$$

где m_2 — масса тела *II*;
ξ_{O_2}, η_{O_2} — координаты ξ и η центра масс тела *II*;
J_{2O_2} — момент инерции тела *II* относительно оси O_2;
$\mu = O_1O_2$ — смещение центра масс тела *II* от оси собственного вращения тел системы;
α_2 — угол поворота тела *II* вокруг оси O_2, отсчитываемый от направления оси ξ.

Так как

$$\xi_{O_2} = \nu \cos \psi + \mu \cos \alpha_2,$$

$$\eta_{O_2} = \nu \sin \psi + \mu \sin \alpha_2,$$

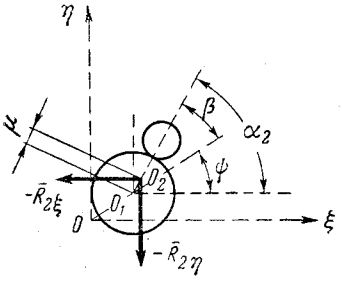


Рис. 6.

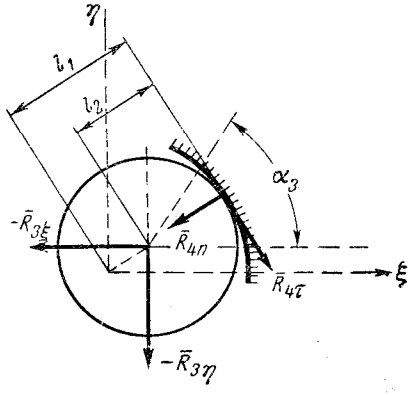


Рис. 7.

то уравнения движения этого тела принимают вид

$$m_2 \left(\nu \sin \psi \cdot \ddot{\psi} + \mu \sin \alpha_2 \cdot \ddot{\alpha}_2 + \nu \cos \psi \cdot \dot{\psi}^2 + \mu \cos \alpha_2 \cdot \dot{\alpha}_2^2\right) = R_{2\xi}$$

$$m_2 \left(\nu \cos \psi \cdot \ddot{\psi} + \mu \cos \alpha_2 \cdot \ddot{\alpha}_2 - \nu \sin \psi \cdot \dot{\psi}^2 - \mu \sin \alpha_2 \cdot \dot{\alpha}_2^2\right) = -R_{2\eta}$$

$$J_{2O_2} \ddot{\alpha}_2 = M - \mu \sin \alpha_2 \cdot R_{2\xi} + \mu \cos \alpha_2 \cdot R_{2\eta}.$$

Замечая (см. рис. 6), что

$$\alpha_2 = \psi + \beta,$$

где β — угол собственного вращения тела *II*, уравнения движения второго тела окончательно запишем в виде

$$m_2 \{[\nu \sin \psi + \mu \sin (\psi + \beta)] \ddot{\psi} + \mu \sin (\psi + \beta) \cdot \ddot{\beta} + [\nu \cos \psi + \mu \cos (\psi + \beta)] \dot{\psi}^2 +$$

$$+ 2\mu \cos (\psi + \beta) \cdot \dot{\psi}\dot{\beta} + \mu \cos (\psi + \beta) \cdot \dot{\beta}^2\} = R_{2\xi}, \qquad (4)$$

$$m_2 \{[\nu \cos \psi + \mu \cos (\psi + \beta)] \ddot{\psi} + \mu \cos (\psi + \beta) \cdot \ddot{\beta} - [\nu \sin \psi +$$

$$+ \mu \sin (\psi + \beta)] \dot{\psi}^2 - 2\mu \sin (\psi + \beta) \cdot \dot{\psi}\dot{\beta} - \mu \sin (\psi + \beta) \cdot \dot{\beta}^2\} = -R_{2\eta}$$

$$\left(J_{2O_1} - m_2 \mu^2\right)(\ddot{\psi} + \ddot{\beta}) = M - \mu \sin (\psi + \beta) \cdot R_{2\xi} + \mu \cos (\psi + \beta) \cdot R_{2\eta}, \qquad (5)$$

где J_{2O_1} — момент инерции тела II относительно оси O_1.

Рассмотрим движение третьего тела системы (рис. 7).

Тело *III* считается динамически симметричным. Центр масс его расположен на оси O_1.

Уравнения плоского движения тела *III*

$$m_3 \ddot{\xi}_{O_1} = -R_{3\xi} + \sin\psi \cdot R_{4\tau} - \cos\psi \cdot R_{4n},$$

$$m_3 \ddot{\eta}_{O_1} = -R_{3\eta} - \cos\psi \cdot R_{4\tau} - \sin\psi \cdot R_{4n},$$

$$J_{3O_1} \ddot{\alpha}_3 = -l_2 R_{4\tau} + M_c,$$

где m_3 — масса тела *III*;

$R_{4\tau}$, R_{4n} — касательная и нормальная составляющие реакции дробимого материала (или, в случае холостого хода, соответствующие составляющие реакции неподвижного конуса);

J_{3O_1} — момент инерции тела *III* относительно оси O_1;

α_3 — угол, характеризующий «абсолютное» вращение тела *III*;

M_c — момент сопротивления дробимого материала качению тела *III* (или, в случае холостого хода, момент трения качения тела *III*).

При отсутствии скольжения третьего тела уравнение связи

$$\dot{\alpha}_3 = -\frac{\nu}{l_2}\dot{\psi}.$$

Момент сопротивления выражается формулой

$$M_c = f_к R_{4n}$$

где $f_к$ — экспериментальный коэффициент (при холостом ходе $f_к$ — коэффициент трения качения тела *III*).

Уравнения движения тела *III* принимают вид

$$\begin{aligned} m_3 \nu (\sin\psi \cdot \ddot{\psi} + \cos\psi \cdot \dot{\psi}^2) &= R_{3\xi} - \sin\psi \cdot R_{4\tau} + \cos\psi \cdot R_{4n} \\ m_3 \nu (\cos\psi \cdot \ddot{\psi} - \sin\psi \cdot \dot{\psi}^2) &= -R_{3\eta} - \cos\psi R_{4\tau} - \sin\psi \cdot R_{4n} \\ J_{3O_1} \frac{\nu}{l_2} \ddot{\psi} &= l_2 R_{4\tau} - f_к R_{4n} \end{aligned} \qquad (6)$$

Для движения системы тел в рассматриваемом предельном случае получена совокупность восьми уравнений (3), (4) и (6), содержащая восемь неизвестных величин [1]: ψ, β, $R_{2\xi}$, $R_{2\eta}$, $R_{3\xi}$, $R_{3\eta}$, $R_{4\tau}$, R_{4n}.

Из указанной системы уравнений эти неизвестные теоретически можно определить в следующем порядке.

Исключая из уравнений (4) реакции $R_{2\xi}$ и $R_{2\eta}$, получим дифференциальное уравнение, связывающее неизвестные параметры ψ и β

$$(J_{2O_1} + m_2 \mu\nu \cos\beta)\ddot{\psi} + J_{2O_1}\ddot{\beta} + m_2 \mu\nu \sin\beta \cdot \dot{\psi}^2 = M. \qquad (7)$$

Второе уравнение, содержащее те же неизвестные, получается из уравнений (3), (4) и (6) после исключения всех реакций; $R_{2\xi}$, $R_{2\eta}$, $R_{3\xi}$, $R_{3\eta}$, $R_{4\tau}$, R_{4n}. Это уравнение имеет вид

$$\left[a\nu + m_2\mu\left(\frac{f_к}{l_2}\sin\beta + \cos\beta\right)\right]\ddot{\psi} + m_2\mu\left(\frac{f_к}{l_2}\sin\beta + \cos\beta\right)\ddot{\beta} +$$

$$+\left[b\nu\frac{f_к}{l_2} + m_2\mu\left(\frac{f_к}{l_2}\cos\beta - \sin\beta\right)\right]\dot{\psi}^2 + 2m_2\mu\left(\frac{f_к}{l_2}\cos\beta - \sin\beta\right)\dot{\psi}\dot{\beta} +$$

$$+ m_2\mu\left(\frac{f_к}{l_2}\cos\beta - \sin\beta\right)\cdot\dot{\beta}^2 = 0, \qquad (8)$$

[1] Вращающий момент электродвигателя M считается известной функцией угловой скорости $\omega = \dot{\beta}$.

где

$$a = m_1 + m_2 + m_3 + J_{3O_1} \frac{1}{l_2^2}; \qquad (9)$$

$b = m_1 + m_2 + m_3$ — масса всей системы.

Уравнение (7), как в этом можно убедиться, представляет для рассматриваемой системы тел уравнение Лагранжа второго рода, составленное относительно параметра β.

Второе уравнение Лагранжа, составленное относительно параметра ψ, будет содержать момент сопротивления M_c, а следовательно, неизвестную реакцию R_{4n}, так как эту силу при составлении уравнений Лагранжа придется условно отнести в разряд задаваемых сил.

Предполагая, что из уравнений (7) и (8) найдены как функции времени параметры ψ и β, из уравнений (4) определим реакции $R_{2\xi}$ и $R_{2\eta}$, из уравнений (3) — реакции $R_{3\xi}$ и $R_{3\eta}$, и, наконец, из уравнений (6) — реакции $R_{4\tau}$ и R_{4n}.

Решение всей совокупности уравнений зависит принципиально от решения системы лишь двух уравнений (7) и (8).

Движение системы с внешним расположением двигателя

Рассмотрим систему двух тел, состоящую из конуса (рис. 8, тело *I*) и вала с дебалансным грузом (тело *II*). Конус совершает сложное движение вокруг неподвижной точки *O*, где установлен сферический шарнир, и имеет внутри продольную полость, в которой вращается в опорных подшипниках, связанных с конусом, вал с дебалансным грузом. Геометрические оси собственных вращений тел *I* и *II* совпадают. Верхний конец вала соединен с ведомой вилкой шарнира Кардана-Гука. Ведущая вилка последнего имеет специальное (шлицевое) соединение с вертикальным валом ротора мотора, статор которого неподвижно установлен на корпусе дробилки. Центр шарнира Кардана-Гука, как и сферического шарнира, совпадает с неподвижной точкой *O*. Система движется под действием сил тяжестей тел и вращающего момента электродвигателя, который передается шарниром Кардана-Гука телу *II* системы. Конус считается динамически симметричным телом вращения. Тело *II* динамически несимметрично, но имеет плоскость материальной симметрии, проходящую через ось собственного вращения тела.

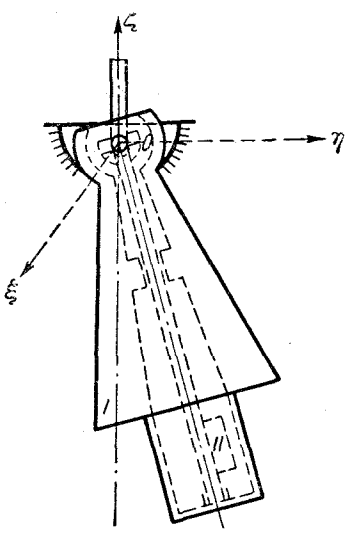


Рис. 8.

Поставим задачей провести при некоторых упрощающих предположениях исследование движения системы в том случае, когда подвижный конус катится без скольжения по неподвижной опоре — неподвижному конусу (рис. 2).

Прежде чем переходить к составлению уравнений движения системы, рассмотрим механику шарнира Кардана-Гука, особенностью которого является переменное передаточное отношение угловых скоростей и моментов. В большинстве случаев ведущий и ведомый валы, соединенные с шарниром, сохраняют свое положение в пространстве. В инерционных дробилках ведомый вал совершает сложное движение вокруг центра шарнира Кардана-Гука.

Найдем передаточное отношение угловых скоростей и моментов в этом шарнире при подвижном ведомом вале.

Кинематика шарнира Кардана-Гука. Рассмотрим шарнир Кардана-Гука с вращающимся вокруг неподвижной оси ведущим валом I и вращающимся вокруг подвижной оси ведомым валом II (рис. 9). Выберем неподвижную систему декартовых координат $O\xi\eta\zeta$ так, чтобы ось ζ совпадала с осью ведущего вала шарнира, и подвижную систему декартовых координат $Oxyz$, в которой ось z перпендикулярна крестовине $ABCD$ шарнира, а ось y совпадает с осью втулок ведомой вилки шарнира. Точка O является центром шарнира. Выведем соотношение между угловой скоростью ведущего вала шарнира Кардана-Гука и угловыми скоростями прецессии, собственного вращения и нутации ведомого вала. С этой целью рассмотрим вектор $\bar{\omega}_{кр}$ мгновенной угловой скорости крестовины $ABCD$ шарнира. Для этого вектора можно написать два равенства

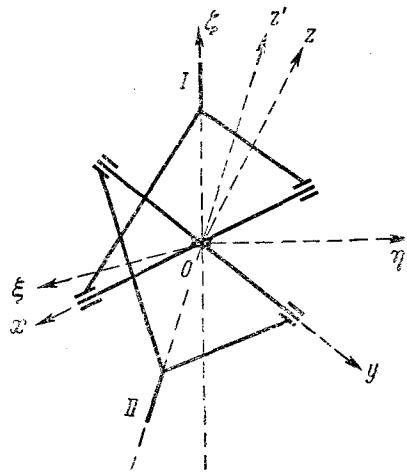


Рис. 9.

$$\bar{\omega}_{кр} = \bar{\omega} + \bar{\omega}_1,$$

$$\bar{\omega}_{кр} = \dot{\bar{\psi}} + \dot{\bar{\beta}} + \bar{\omega}_2,$$

где $\bar{\omega}_{кр}$ — мгновенная угловая скорость крестовины шарнира Кардана-Гука;

$\bar{\omega}$ — угловая скорость вала двигателя;

$\bar{\omega}_1$ — угловая скорость крестовины шарнира относительно оси втулок ведущей вилки шарнира;

$\dot{\bar{\psi}}$ — угловая скорость прецессии ведомой вилки шарнира;

$\dot{\bar{\beta}}$ — угловая скорость собственного вращения ведомой вилки шарнира;

$\bar{\omega}_2$ — угловая скорость крестовины относительно оси втулок ведомой вилки шарнира.

Приравнивая правые части этих равенств, получаем

$$\bar{\omega} + \bar{\omega}_1 = \dot{\bar{\psi}} + \dot{\bar{\beta}} + \bar{\omega}_2. \qquad (10)$$

Угловые скорости выражаются через орты соответствующих осей

$$\bar{\omega} = \omega \cdot \bar{k}, \quad \bar{\omega}_1 = \omega_1 \bar{i}_1, \quad \dot{\bar{\psi}} = \dot{\psi}\bar{k},$$

$$\dot{\bar{\beta}} = \dot{\beta}\bar{k}', \quad \bar{\omega}_2 = \omega_2 \bar{j}_1,$$

где $\bar{k}$ — орт оси $O\zeta$;

$\bar{i}_1$ — орт оси втулок ведущей вилки шарнира;

$\bar{k}'$ — орт оси Oz' ведомого вала шарнира;

$\bar{j}_1$ — орт оси втулок ведомой вилки шарнира.

При вращении ведущего вала ось втулок ведущей вилки поворачивается в плоскости $\xi\eta$ вокруг точки O.

Обозначим через ψ' угол поворота ведущего вала, отсчитываемый от оси $O\xi$.

Тогда

$$\bar{i}_1 = \cos\psi' \cdot \bar{i} + \sin\psi' \cdot \bar{j},$$

где $\bar{i}$ — орт оси $O\ \xi$;

$\bar{j}$ — орт оси $O\ \eta$.

Умножая скалярно равенство (10) сначала на $\bar{\omega}_1$, а затем на $\bar{\beta}$, и используя особенность конструкции шарнира Кардана-Гука, благодаря которой $\bar{\omega} \perp \bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_1 \perp \bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_2 \perp \bar{\beta}$ после некоторых преобразований получим искомое соотношение между угловыми скоростями

$$\dot{\beta} = \frac{(\omega - \dot{\psi})\cos\vartheta + \sin(\psi - \psi') \cdot \cos(\psi - \psi')\sin\vartheta \cdot \dot{\vartheta}}{1 - \sin^2(\psi - \psi')\sin^2\vartheta}, \qquad (11)$$

где ψ — угол прецессии ведомого вала шарнира;

ϑ — угол нутации ведомого вала шарнира.

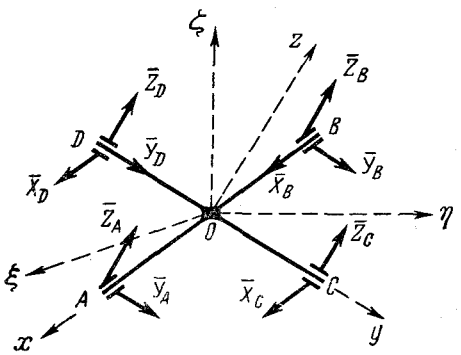


Рис. 10.

Кинетостатика шарнира Кардана-Гука. Найдем соотношение между вращающим моментом, приложенным к ведущему валу шарнира, и моментами, приложенными к ведомому валу шарнира Кардана-Гука, методом кинетостатики. Массой крестовины будем пренебрегать. К крестовине приложены реакции втулок ведущей и ведомой вилок шарнира. Составляющие этих реакций направим так, как указано на рис. 10.

Силы инерции крестовины отсутствуют, потому что массой ее пренебрегаем. Сохраняя прежний выбор осей координат $\xi\eta\zeta$, xyz, составим уравнения статики для крестовины шарнира относительно системы осей xyz

$$\sum X = X_B + X_C + X_D = 0,$$

$$\sum Y = Y_A + Y_B + Y_D = 0,$$

$$\sum Z = Z_A + Z_B + Z_C + Z_D = 0,$$

$$\sum m_x(\bar{F}) = Z_C \cdot r - Z_D \cdot r = 0,$$

$$\sum m_y(\bar{F}) = -Z_A \cdot r + Z_B \cdot r = 0,$$

$$\sum m_z(\bar{F}) = Y_A \cdot r - Y_B \cdot r - X_C \cdot r + X_D \cdot r = 0.$$

Из уравнений непосредственно следует, что

$$Z_A = Z_B, \quad Z_A = -Z_C, \quad Z_C = Z_D,$$

$$Y_A - Y_B = X_C - X_D, \quad X_B = -X_C - X_D,$$

$$Y_A + Y_B = -Y_D.$$

Силами $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$, $\bar{X}_B$, $\bar{Y}_B$, $\bar{Z}_B$ определяется воздействие ведущей вилки на крестовину. Найдем главный вектор и главный момент этих сил относительно центра O

$$F'_x = X_B, \quad F'_y = Y_A + Y_B, \quad F'_z = Z_A + Z_B = 2Z_A,$$

где F'_x, F'_y, F'_z — проекции на оси x, y, z главного вектора $\overline{F}'$ сил, приложенных к крестовине со стороны ведущей вилки,

$$\overline{F}' = X_B \overline{i}_1 + (Y_A + Y_B)\overline{j}_1 + 2Z_A \overline{k}_1;$$

M'_{O_x}, M'_{O_y}, M'_{O_z} — проекции на оси x, y, z главного момента относительно центра O сил, приложенных к крестовине со стороны ведущей вилки,

$$M'_{O_x} = 0, \quad M'_{O_y} = -r(Z_A - Z_B) = 0; \quad M'_{O_z} = r(Y_A - Y_B)$$

r — расстояние втулок вилок шарнира от центра шарнира (рис. 10).

Главный момент указанных сил

$$\overline{M}'_O = r(Y_A - Y_B)\overline{k}_1.$$

Проекции на оси x, y, z главного вектора $\overline{F}''$ и главного момента $\overline{M}''_O$ относительно центра O сил, приложенных к крестовине со стороны ведомой вилки шарнира, соответственно равны

$$F''_x = X_c + X_D; \quad F''_y = Y_D; \quad F''_z = Z_c + Z_D = 2Z_c,$$

$$M''_{O_x} = r(Z_c - Z_D) = 0, \quad M''_{O_y} = 0, \quad M''_{O_z} = -r(X_c - X_D),$$

Поэтому

$$\overline{F}'' = (X_c + X_D)\, i_1 + Y_D \overline{j}_1 + 2Z_c \overline{k}_1,$$

$$\overline{M}''_O = -r(X_c - X_D)\overline{k}_1.$$

Как и следовало ожидать, $\overline{F}'' = -\overline{F}'$, $\overline{M}''_O = -\overline{M}'_O$.

Главный вектор $\overline{F}'''$ и главный момент $\overline{M}'''_o$ относительно центра O сил, приложенных к ведомой вилке, равны по величине и противоположны по направлению соответственно главному вектору и главному моменту относительно центра O сил, приложенных к крестовине со стороны ведомой вилки, т. е.

$$\overline{F}''' = -\overline{F}'', \quad \overline{M}'''_O = -\overline{M}''_O,$$

отсюда

$$\overline{F}''' = \overline{F}', \quad \overline{M}'''_O = \overline{M}'_O.$$

Вращающий момент двигателя M равен алгебраической сумме моментов сил, приложенных к крестовине со стороны ведущей вилки, относительно оси $O\zeta$

$$M = \text{пр}_\zeta \overline{M}'_O.$$

Рассмотрим выбранные обычным образом углы Эйлера φ, ψ и ϑ для ведомой вилки шарнира Кардана-Гука, причем ось ординат ведомой вилки направим вдоль оси этой вилки, а ось аппликат — вдоль оси ведомого вала.

Найдем относительно осей прецессии (оси ζ) и собственного вращения ведомой вилки (ось ведомого вала) моменты сил, приложенных к этой вилке. Обозначим указанные моменты соответственно через M'''_ψ и M'''_φ. Момент M'''_ψ равен проекции на ось $O\zeta$ момента M'''_o, а момент M'''_φ — проекции момента M'''_o на ось ведомого вала. Тогда, используя известные

формулы, связывающие синусы и косинусы углов Эйлера с косинусами углов, составленных подвижными осями тела с неподвижными, получим в результате

$$M'''_{\psi} = M,$$

$$M'''_{\varphi} = \frac{\cos\vartheta}{1-\cos^2\varphi\cdot\sin^2\vartheta}\,M. \tag{12}$$

Уравнения движения системы тел при рабочем ходе дробилки. Положение системы в пространстве в рассматриваемой задаче определим при помощи углов Эйлера ψ, β, ϑ и γ, которые выберем следующим образом. Через неподвижную точку O проведем три системы осей декартовых координат: неподвижную $\xi\eta\zeta$ с горизонтальной плоскостью $\xi\eta$ и осью ζ, направленной вертикально вверх; и подвижные x_1y_1z, x_2y_2z, в которых ось z направлена вдоль оси собственных вращений тел I и II. Оси x_iy_iz связаны с i-тым телом (i-1, 2), причем ось y_2 лежит в плоскости симметрии тела II. Проведем ось узлов ON вдоль линии пересечения плоскостей $\xi\eta$ и x_iy_i. Угол ϑ заключен между осями $O\zeta$ и Oz; угол ψ — между осями $O\xi$ и ON, угол γ — между осями ON и Ox_1; угол β — между осями ON и Ox_2. Угол γ собственного вращения тела I, благодаря условию качения без скольжения этого тела по неподвижной опоре, выражается через угол ψ. Связь, как и раньше, голономна, что следует из формулы

$$\dot\gamma = -\frac{l_1 - l_2\cos\vartheta}{l_2}\,\dot\psi,$$

где l_1 и l_2 — постоянные расстояния точки касания подвижного и неподвижного конусов соответственно от осей ζ и z.

Согласно постановке, задачи, угол $\vartheta = \text{const}$. Это — уравнение второй голономной связи. В качестве обобщенных координат примем параметры ψ и β. Кроме двух голономных связей, на систему наложена еще неголономная связь, осуществляемая шарниром Кардана-Гука. Уравнение (11) этой связи запишем в виде

$$f(\vartheta,\ \psi,\ \psi',\ \omega,\ \dot\psi,\ \dot\beta) = 0$$

$$(\dot\vartheta = 0,\ \text{так как}\ \vartheta = \text{const}) \tag{13}$$

где

$$f(\vartheta,\ \psi,\ \psi',\ \omega,\ \dot\psi,\ \dot\beta) = (\omega - \dot\psi)\cos\vartheta - \dot\beta\left[1 - \sin^2(\psi - \psi')\cdot\sin^2\vartheta\right].$$

Считая неголономную связь идеальной, составим для движения системы уравнения Ферерса

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial\dot q_i} \quad (q_1 = \psi,\ q_2 = \beta),$$

где λ — некоторый постоянный коэффициент.

Согласно выбору осей координат, плоскость y_2z является плоскостью симметрии тела II, поэтому ось Ox_2 в точке O будет главной осью этого тела. Из центробежных моментов инерции $J_{2x_2y_2}J_{2x_2z}$, J_{2y_2z} отличен от нуля будет лишь $J_{2y_2z} = G$ — центробежный момент инерции тела II относительно осей y_2 и z.

Кинетическая энергия системы в рассматриваемом случае

$$T = \frac{1}{2}(a_1 + A_2\sin^2\vartheta\cdot\sin^2\beta + B_2\sin^2\vartheta\cdot\cos^2\beta -$$

$$- 2G\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\cos\beta)\,\dot\psi^2 + (C_2\cos\vartheta - G\sin\vartheta\cdot\cos\beta)\,\dot\psi\dot\beta + \frac{1}{2}C_2\dot\beta^2,$$

где

$$a_1 = A_1 \sin^2\vartheta + C_1\left(\cos\vartheta - \frac{l_1}{l_2}\right)^2 + C_2\cos\vartheta,$$

$A_1 = B_1$, C_1 — моменты инерции тела I относительно осей x_1y_1z;
A_2, B_2, C_2 — моменты инерции тела II относительно осей x_2y_2z.

Пренебрежем внутренними силами трения. Для обобщенных сил тогда получим выражения

$$Q_\psi = M - \frac{l_1 - l_2\cos\vartheta}{l_2} M_c$$

$$Q_\beta = M\frac{\cos\vartheta}{1-\cos^2\beta\cdot\sin^2\vartheta} - \mu P_2 \sin\vartheta\cdot\sin\beta,$$

где M_c — полезный момент сопротивления руды (или в случае холостого хода — момент трения качения подвижного конуса по неподвижному);

При допущенных предположениях получим следующие дифференциальные уравнения движения системы

$$(a_1 + A_2\sin^2\vartheta\cdot\sin^2\beta + B_2\sin^2\vartheta\cdot\cos^2\beta - 2G\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\cdot\cos\beta)\ddot{\psi} +$$
$$+ 2[(A_2 - B_2)\sin\vartheta\cdot\cos\beta + G\cos\vartheta]\sin\vartheta\cdot\sin\beta\cdot\dot{\psi}\dot{\beta} +$$
$$+ (C_2\cos\vartheta - G\sin\vartheta\cdot\cos\beta)\ddot{\beta} + G\sin\vartheta\cdot\sin\beta\dot{\beta}^2 =$$
$$= M - \frac{l_1 - l_2\cos\vartheta}{l_2} M_c - \lambda\cos\vartheta,$$
$$(C_2\cos\vartheta - G\sin\vartheta\cdot\cos\beta)\ddot{\psi} + C_2\ddot{\beta} -$$
$$- [(A_2 - B_2)\sin\vartheta\cos\beta + G\cos\vartheta]\sin\vartheta\cdot\sin\beta\,\dot{\psi}^2 = \frac{\cos\vartheta}{1-\cos^2\beta\sin^2\vartheta} M -$$
$$- \mu P_2\sin\vartheta\cdot\sin\beta - \lambda[1 - \sin^2(\psi - \psi')\cdot\sin^2\vartheta],$$

которые должны рассматриваться совместно с уравнением неголономной связи (13)

$$(\omega - \dot{\psi})\cos\vartheta - [1 - \sin^2(\psi - \psi')\cdot\sin^2\vartheta]\,\dot{\beta} = 0.$$

В этих трех уравнениях содержатся пять неизвестных величин: параметры ψ и β, постоянный коэффициент λ, угловая скорость ротора двигателя ω* и момент полезного сопротивления M_c. Наличие в системе уравнений момента M_c связано с тем, что соответствующая связь не является идеальной, поэтому при составлении уравнений Фererса ее реакцию следовало перевести в разряд задаваемых сил.

Вращающий момент электродвигателя M считается известной функцией угловой скорости ω вращения ротора.

Чтобы число уравнений привести в соответствие с числом неизвестных величин, расчленим систему тел и составим уравнения движения каждого тела в отдельности. При этом, как и раньше, с целью упрощения рассмотрим предельный случай движения системы, который получим, устремив угол ϑ к нулю и сохраняя неизменным расстояние l_1 точки касания конусов от вертикальной оси дробилки.

Уравнения движения системы тел при рабочем ходе дробилки в предельном случае. При рабочем ходе дробилки в предельном случае система тел будет совершать плоское горизонтальное движение. Вместо пространственной системы сил, приложенных к дробилке, можно рассматривать плоскую (силы тяжестей тел системы уравновешиваются вертикальными составляющими реакций, а горизонтальные реакции для каждого тела

---

* Угол поворота ротора ψ' выражается через угловую скорость ротора ω.

суммируются). Ось собственных вращений тел становится параллельной оси прецессии (оси дробилки). Если спроектировать тела на неподвижную горизонтальную плоскость, то получим картину, схематически изображенную на рис. 11, где несущественные детали опущены.

Составим уравнения плоского движения каждого из тел системы в отдельности, пренебрегая внутренними моментами сопротивления и считая сферический шарнир и шарнир Кардана-Гука идеальными.

Рассмотрим движение первого тела системы (рис. 12). Это тело считается динамически симметричным. Его центр масс расположен на оси O_1 (положение оси z в предельном случае). Проведя неподвижные координат-

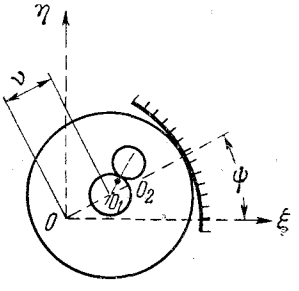


Рис. 11.

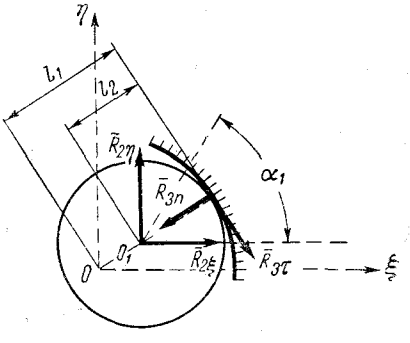


Рис. 12.

ные оси ξ и η через точку O (проекция оси ζ дробилки на горизонтальную плоскость), напишем уравнения плоского движения тела I

$$m_1 \ddot{\xi}_{O_1} = R_{2\xi} + \sin\psi \cdot R_{3\tau} - \cos\psi \cdot R_{3n},$$

$$m_1 \ddot{\eta}_{O_1} = R_{2\eta} - \cos\psi \cdot R_{3\tau} - \sin\psi \cdot R_{3n},$$

$$J_{1O_1} \ddot{\alpha}_1 = M_c - l_2 \cdot R_{3\tau},$$

где m_1 — масса тела I;

J_{1O_1} — момент инерции тела I относительно оси O_1;

α_1 — угол поворота тела I вокруг оси O_1, отсчитываемый от направления оси ξ;

ξ_{O_1}, η_{O_1} — координаты ξ и η центра масс тела I;

$R_{2\xi}$, $R_{2\eta}$ — проекции на оси ξ и η главного вектора горизонтальных реакций второго тела на первое;

$R_{3\tau}$, R_{3n} — касательная и нормальная составляющие реакции дробимого материала (или, в случае холостого хода, — соответствующие реакции неподвижного конуса).

Замечая, что

$$\xi_{O_1} = \nu \cos\psi, \quad \eta_{O_1} = \nu \sin\psi,$$

где $\nu = OO_1 = l_1 - l_2$,

ψ — угол прецессии системы (рис. 11), и используя условие отсутствия скольжения

$$l_2 \cdot \dot{\alpha}_1 = -\nu \cdot \dot{\psi}$$

и формулу (5), в которой R_{4n} следует заменить на R_{3n}, уравнения движения тела I, запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} -m_1 \nu (\sin\psi \cdot \ddot{\psi} + \cos\psi \cdot \dot{\psi}^2) &= R_{2\xi} + \sin\psi \cdot R_{3\tau} - \cos\psi \cdot R_{3n}, \\ m_1 \nu (\cos\psi \cdot \ddot{\psi} - \sin\psi \cdot \dot{\psi}^2) &= R_{2\eta} - \cos\psi \cdot R_{3\tau} - \sin\psi \cdot R_{3n}, \\ J_{1O_1} \frac{\nu}{l_2} \ddot{\psi} &= -f_к R_{3n} + l_2 R_{3\tau}. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Рассмотрим движение тела II. Как нетрудно убедиться, в предельных случаях для вторых тел систем существенные для составления уравнений движения обстоятельства одинаковы. Поэтому уравнениями движения тела *II* в рассматриваемом случае могут формально служить уравнения (4).

Совокупность шести уравнений (15) и (4) содержит шесть неизвестных величин ψ, β, $R_{2\xi}$, $R_{2\eta}$, $R_{3\tau}$, R_{3n}, которые теоретически можно определить следующим образом. Исключая из уравнений (4) реакции $R_{2\xi}$ и $R_{2\eta}$, получим дифференциальное уравнение (7), связывающее неизвестные ψ и β. Второе уравнение, содержащее те же неизвестные, получается из уравнений (15) и (4) после исключения всех реакций $R_{2\xi}$, $R_{2\eta}$, $R_{3\tau}$, R_{3n}.

Это уравнение имеет вид (8), где вместо a следует писать

$$a_1 = m_1 + m_2 + J_{1O_1}\frac{1}{l_2^2}$$

и вместо b

$$b_1 = m_1 + m_2 \text{ (масса системы).}$$

Уравнение (7) и в рассматриваемом случае представляет собой уравнение Лагранжа второго рода, составленное относительно параметра β. Второе уравнение Лагранжа, составленное относительно параметра ψ, будет содержать момент сопротивления M_c, а следовательно, неизвестную реакцию R_{3n}, так как эту силу при составлении уравнений Лагранжа придется условно отнести в разряд задаваемых.

Предполагая, что из уравнений (7) и (8) найдены как функции времени параметры ψ и β, из уравнений (4) определим реакции $R_{2\xi}$ и $R_{2\eta}$, а из уравнений (15) — реакции $R_{3\tau}$ и $R_{3\eta}$.

Решение всей совокупности уравнений зависит принципиально от решения системы лишь уравнений (7) и (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Северов Ю. И. О некоторых вопросах динамики твердого тела и их приложение к теории дробилок. Зап. ЛГИ, 1960, т. XXXVII, вып. 3.

2. Блехман И. И. Динамика гигроскопической дробилки системы Д. К. Черкасова. Рукопись. Фонды ин-та «Механобр», 1952.

3. Рундквист А. К. Механика инерционной дробилки «Механобра» и расчет машин вибрационного типа. Изд-во АН СССР, 1957.