Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLIV, вып. 3, 1964 г.

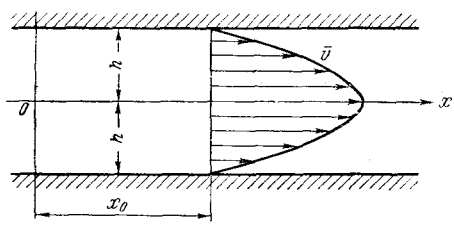
УДК 532.529.5

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ЛАМИНАРНОГО ОДНОРАЗМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ СМЕСИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ТВЕРДЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Р. И. Шкадов

Движение частиц и жидкости, ограниченное параллельными плоскостями. Задача о движении взвешенных частиц нами уже рассматривалась в частном случае отсутствия преград [1, 2]. В настоящей работе мы рассмотрим одноразмерное движение частиц и газа, ограниченное двумя параллельными плоскостями — стенками.

Итак, имеем газ, который мы считаем несжимаемой жидкостью, и взвешенные в нем частицы. Движение последних отличается от движения газа. Будем считать, что скорость газа и скорость частиц заданы в определенном сечении потока. Ограничимся случаем ламинарного движения среды, задавая силу взаимодействия между средой и частицами по линейному закону. Будем считать, что на стенках газ и взвешенные частицы прилипают.



Распределение скорости жидкости в сечении.

Введем обозначения:

ϱ_1 — плотность среды, $\varrho_1 = \text{const}$;
ϱ_2 — плотность частиц, $\varrho_2 = \text{const}$;
μ — коэффициент вязкости среды;
v — скорость среды;
u — скорость частицы;
s — коэффициент замутненности;
p — гидродинамическое давление.

Направим ось Ox по оси потока (см. рисунок). Так как рассматривается одноразмерное движение, то $v_y = 0$, $u_y = 0$. В сечении $x = x_0$ задана зависимость от y скоростей жидкости и частиц, а также коэффициента замутненности и гидродинамического давления, на стенках же при $y = \pm h$ $v = 0$, $w = 0$. Необходимо найти изменение искомых функций v, u, s и p в зависимости от x и y.

В систему уравнений движения жидкости [4] добавим член, характеризующий взаимодействие взвешенных частиц и газа, $\gamma\mu\,|u - v|$ (μ — постоянный, в первом приближении, коэффициент, характеризующий стесненность движения и зависящий от замутненности среды и размеров частиц)[1]. Так как задача плоская, достаточно взять только два уравне-

[1] В согласии с замечанием А. А. Саткевича [3] по смежному вопросу, мы принимаем для ламинарного режима сопротивление жидкости пропорциональным первой степени ее относительной скорости. Коэффициент пропорциональности определяется экспериментально без ссылки на формулу Стокса. При турбулентном режиме закон сопротивления будет иным.

ния Навье — Стокса. Движение предполагаем установившимся, массовыми силами пренебрегаем.

$$(1-s)\,v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+(1-s)\,v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-(1-s)\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial p}{\partial x}+$$

$$+\frac{\mu}{3\varrho_1}(1-s)\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\bar{v})+\frac{\mu}{\varrho_1}(1-s)\,\Delta v_x-\frac{\gamma\mu}{\varrho_1}s\,(v_x-u_x),$$

$$(1-s)\,v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+(1-s)\,v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-(1-s)\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{3\varrho_1}(1-s)\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div}\bar{v})+$$

$$+\frac{\mu}{\varrho_1}(1-s)\,\Delta v_y-\frac{\gamma\mu}{\varrho_1}s\,(v_y-u_y).$$

Здесь введены обычные обозначения расходимости вектора и оператора Лапласа функции

$$\operatorname{div}\bar{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\Delta v_x=\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2},$$

$$\Delta v_y=\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2},$$

причем в случае плоской задачи последние слагаемые правых частей отсутствуют.

Как уже отмечено, в нашем случае $v_y=0$, $u_y=0$. Тогда обозначим $v_x=v$, $u_x=u$. После соответствующих упрощений и преобразований получим два уравнения движения жидкой фазы

$$(1-s)\,v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1-s}{\varrho_1}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\gamma\mu\,s}{\varrho_1}(v-u)+\frac{4}{3}\frac{\mu}{\varrho_1}(1-s)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+$$

$$+\frac{\mu}{\varrho_1}(1-s)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

$$0=-\frac{1-s}{\varrho_1}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{3\varrho_1}(1-s)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}.$$

Сюда необходимо присоединить уравнение движения взвешенных частиц

$$\varrho_2 s u\frac{\partial u}{\partial x}=-\gamma\mu\,s\,(u-v).$$

Обратимся к уравнениям сплошности смеси жидкой и твердой фаз. Так как движение предполагается одноразмерным, перемешивание отсутствует, то можно воспользоваться уже выведенными уравнениями [2], относя соответствующие рассуждения к трубкам тока, которые параллельны оси потока. При этом, конечно, необходимо иметь в виду, что величины v_0, w_0 и s_0 не будут постоянными, а представляют собой некоторые заданные функции от y. Итак, для плоской задачи уравнения сплошности должны иметь вид

$$su+(1-s)\,v=s_0(y)\,u_0(y)+[1-s_0(y)]\,v_0(y),$$

$$s\frac{du}{dt}+(1-s)\frac{dv}{dt}=s_0(y)\left(\frac{du}{dt}\right)_{x=x_0}+[1-s_0(y)]\left(\frac{dv}{dt}\right)_{x=x_0}.$$

Так как движение установившееся и одноразмерное, то второе уравнение можно переписать в форме

$$su\frac{\partial u}{\partial x}+(1-s)\,v\frac{\partial v}{\partial x}=s_0(y)\,u_0(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_0}+[1-s_0(y)]\,v_0(y)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_0}.$$

Соединяя уравнения Навье—Стокса, уравнение движения взвешенных частиц и уравнения сплошности, получим следующую систему

$$\left.\begin{aligned}
\varrho_1 (1-s) v \frac{\partial v}{\partial x} &= -(1-s)\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\mu s (v-u) + \frac{4}{3}\mu (1-s)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \\
&+ \mu (1-s)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\mu}{3}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}, \\
\varrho_2 u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\gamma\mu (u-v), \\
su + (1-s) v &= s_0 (y)\, u_0 (y) + [1 - s_0 (y)]\, v_0 (y), \\
su\frac{\partial u}{\partial x} + (1-s) v \frac{\partial v}{\partial x} &= s_0 (y)\, u_0 (y) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_0} + [1 - s_0 (y)]\, v_0 (y) \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_0}.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Таким образом, для четырех неизвестных функций v, u, s и p составлено пять уравнений. Следовательно, одно из уравнений этой системы должно удовлетворяться тождественно.

Граничные условия поставим в следующем виде:

при $x = x_0$ $v = v_0$, $u = u_0 (y)$; $s = s_0 (y)$, $p = p_0$ (p_0 — заданная постоянная); при $y = \pm h$ $v = 0$, $u = 0$.

Очевидно, для выполнения второго граничного условия необходимо

$$v_0 (y)\,|_{y=\pm h} = 0, \quad u_0 (y)\,|_{y=\pm h} = 0.$$

Упростим составленную систему в предположении, что концентрация взвешенных частиц в потоке газа незначительна, т. е. $s \ll 1$. Тогда можно считать, что $1 - s \approx 1$, $1 - s_0 (y) \approx 1$. Система (1) перепишется в виде

$$\left.\begin{aligned}
\varrho_1 v \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\mu s (v-u) + \frac{4}{3}\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\
\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\mu}{3}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}, \\
\varrho_2 u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\gamma\mu (u-v), \\
su + v &= s_0 (y)\, u_0 (y) + v_0 (y), \\
su\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} &= s_0 (y)\, u_0 (y) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_0} + v_0 (y) \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_0}.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Три последних уравнения не содержат гидродинамического давления p, поэтому для нахождения трех неизвестных функций v, u и s воспользуемся только тремя этими уравнениями. Введем обозначения:

$$\varphi (y) = s_0 (y)\, u_0 (y) + v_0 (y),$$

$$\psi (y) = s_0 (y)\, u_0 (y) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_0} + v_0 (y) \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_0}.$$

Тогда рабочая система уравнений будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned}
\varrho_2 u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\gamma\mu (u-v), \\
su + v &= \varphi (y), \\
su\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} &= \psi (y).
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Из первого уравнения находим

$$v = u + au\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{4}$$

где $a = \frac{\varrho_2}{\gamma\mu}$.

Подстановка во второе уравнение дает

$$su + u + au\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(y).$$

Но $s \ll 1$, поэтому $1 + s \approx 1$. Тогда неизвестная функция u переменных x и y приближенно определяется дифференциальным уравнением

$$u + au\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(y). \tag{5}$$

После интегрирования

$$x - x_0 = a\left[u_0(y) - u + \varphi(y)\ln\frac{v_0(y) - u_0(y)}{\varphi(y) - u}\right].$$

Из уравнений (4) и (5)

$$v = \varphi(y).$$

При этом можно считать, что

$$\varphi(y) = v_0(y),$$

поэтому

$$v = v_0(y).$$

Таким образом, скорость жидкости не зависит от x, иначе говоря, в случае малой концентрации частиц в потоке газа эти частицы не оказывают влияния на движение основного потока.

С помощью третьего уравнения системы (3) найдем коэффициент замутненности, считая, что $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$,

$$s = \frac{a\psi(y)}{v_0(y) - u}.$$

Обратимся к гидродинамическому давлению p. Из второго уравнения системы (2) получаем

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

т. е. давление не зависит от y. Первое уравнение системы дает

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\mu s(v - u) + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\varrho_2\psi(y) + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \tag{6}$$

Так как $v = v_0(y)$, то

$$\psi(y) = s_0(y)\,u_0(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_0}.$$

Воспользуемся первым уравнением системы (3), в которое подставим $x = x_0$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_0} = -\frac{\gamma\mu}{\varrho_2}\frac{u_0(y) - v_0(y)}{u_0(y)}.$$

Тогда

$$\psi(y) = -\frac{\gamma\mu}{\varrho_2}s_0(y)\,[u_0(y) - v_0(y)].$$

Подставляя это в (6), получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left\{ \gamma s_0 (y) [u_0 (y) - v_0 (y)] + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\}.$$

Дополнительно допускаем малость произведения γs_0. Тогда первым слагаемым в фигурных скобках можно пренебречь

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \tag{7}$$

Левая часть этого равенства является функцией только от x (давление от y не зависит), а правая — только от y (скорость основного потока не зависит от x). Это возможно лишь в том случае, если в обеих частях равенства стоят постоянные числа.

Условие $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}$ говорит о том, что падение давления происходит равномерно по всему потоку, и это падение нетрудно вычислить, зная давление в двух сечениях, отстоящих друг от друга на определенном расстоянии, например l. Пусть при $x = x_1 = x_0 + l$ $p = p_1$. Тогда

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_1 - p_0}{l}. \tag{8}$$

В силу условия $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \text{const}$ распределение скорости жидкости по сечению, перпендикулярному оси потока, подчиняется параболическому закону. Этот результат не противоречит классическому решению задачи об одномерном течении вязкой жидкости между параллельными стенками [4]. В этом решении скорость жидкости

$$v = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - h^2),$$

откуда, имея в виду $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}$,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Если этот результат подставить в уравнение (7), то последнее удовлетворится тождественно.

Из (8) получаем

$$p = \frac{p_1 - p_0}{l} x + p_0. \tag{9}$$

Заметим, что приближенное дифференциальное уравнение (5) несколько искажает численные значения u и v вблизи ограничивающих поток стенок. В остальной части потока погрешность получается малой.

Вывод основных уравнений в полярных координатах. Рассмотрим случай движения газа и взвешенных частиц в трубе. Для этого перейдем к полярным координатам.

Уравнения движения жидкости и взвешенных частиц можно записать в векторной форме (массовыми силами пренебрегаем)

$$\varrho_1 (1 - s) \frac{\partial \bar{v}}{dt} = - (1 - s) \operatorname{grad} p - \gamma \mu s (\bar{v} - \bar{u}) +$$

$$+ (1 - s) \frac{\mu}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{v} + (1 - s) \mu \Delta \bar{v},$$

$$\varrho_2 s \frac{d\bar{u}}{dt} = \gamma \mu s (\bar{v} - \bar{u}).$$

Здесь введены символы градиента, расходимости скорости и оператора Лапласа вектора скорости

$$|\operatorname{grad} p| = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2},$$

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$|\Delta \bar{v}| = \sqrt{(\Delta v_x)^2 + (\Delta v_y)^2 + (\Delta v_z)^2}.$$

Цилиндрические координаты связаны с декартовыми соотношениями

$$x = r\cos\theta,$$

$$y = r\sin\theta,$$

$$z = z.$$

Применяя известные формулы векторного анализа и используя некоторые соотношения из курса гидромеханики [4], получим шесть уравнений движения жидкости и взвешенных частиц

$$(1-s)\frac{\partial v_r}{\partial t} + (1-s)v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + (1-s)\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + (1-s)v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} -$$

$$-(1-s)\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1-s}{\varrho_1}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\gamma\mu s}{\varrho_1}(v_r - u_r) +$$

$$+\frac{4}{3}\frac{\mu}{\varrho_1}(1-s)\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r\,\partial\theta} + r\frac{\partial^2 v_z}{\partial r\,\partial z} - \frac{1}{r}v_r\right) -$$

$$-\frac{\mu}{\varrho_1}(1-s)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r\,\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r\,\partial z}\right),$$

$$(1-s)\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (1-s)v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + (1-s)\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + (1-s)v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} +$$

$$+(1-s)\frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1-s}{\varrho_1 r}\frac{\partial p}{\partial\theta} - \frac{\gamma\mu s}{\varrho_1}(v_\theta - u_\theta) +$$

$$+\frac{4}{3}\frac{\mu}{\varrho_1}(1-s)\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + r\frac{\partial^2 v_r}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2} + r\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta\,\partial z}\right) -$$

$$-\frac{\mu}{\varrho_1}(1-s)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta\,\partial z} - \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}v_\theta - \frac{1}{r^2}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_r}{\partial r\,\partial\theta}\right),$$

$$(1-s)\frac{\partial v_z}{\partial t} + (1-s)v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + (1-s)\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} + (1-s)v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} =$$

$$= -\frac{1-s}{\varrho_1}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\gamma\mu s}{\varrho_1}(v_z - u_z) + \frac{4}{3}\frac{\mu}{\varrho_1}(1-s)\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + r\frac{\partial^2 v_r}{\partial r\,\partial z} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta\,\partial z} + r\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) -$$

$$-\frac{\mu}{\varrho_1}(1-s)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r\,\partial z} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta\,\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} = \frac{\gamma\mu}{\varrho_2}(v_r - u_r),$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} = \frac{\gamma\mu}{\varrho_2}(v_\theta - u_\theta),$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\gamma\mu}{\varrho_2}(v_z - u_z).$$

Решение задачи о движении смеси в цилиндрической трубе. Приведенные выше уравнения движения жидкости и взвешенных в ней частиц в цилиндрических координатах r, θ, z применимы к случаю установившегося одноразмерного ламинарного движения в трубе круглого сечения. При этом следует считать, что благодаря осевой симметрии, ни один из рассматриваемых элементов v, u, s, p не зависит от угла θ. Кроме того,

$$v_r = v_\theta = 0, \quad v_z = v;$$
$$u_r = u_\theta = 0, \quad u_z = u.$$

Все это значительно упрощает выведенные уравнения

$$0 = -\frac{1-s}{\varrho_1}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1-s}{\varrho_1}\mu\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial z},$$
$$(1-s)\,v\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1-s}{\varrho_1}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\gamma\mu\, s}{\varrho_1}(v-u) +$$
$$+\frac{4}{3}\frac{\mu}{\varrho_1}(1-s)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\mu}{\varrho_1}(1-s)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right), \qquad (10)$$
$$u\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\gamma\mu}{\varrho_2}(v-u).$$

Уравнения же сплошности будут аналогичны полученным для движения жидкости и взвешенных в ней частиц между двумя параллельными плоскостями, так как и здесь имеет место условие отсутствия перемешивания. Этим уравнениям сплошности после небольших преобразований можно придать вид

$$su + (1-s)\,v = s_0(r)\,u_0(r) + [1 - s_0(r)]\,v_0(r),$$
$$su\frac{\partial u}{\partial z} + (1-s)\,v\frac{\partial v}{\partial z} = s_0(r)\,u_0(r)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=z_0} + [1-s_0(r)]\,v_0(r)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=z_0}, \qquad (11)$$

где $u_0(r)$, $v_0(r)$, $s_0(r)$ — распределение соответственно скорости частиц, скорости жидкости и коэффициента замутненности для выбранного сечения.

Объединяя уравнения (10) и (11), получим систему пяти уравнений с четырьмя неизвестными функциями v, u, s, p, зависящими от двух независимых переменных r и z. Таким образом, число уравнений превышает на единицу число неизвестных. Одно уравнение является следствием остальных.

Переходим к пограничным условиям. Одно из них относится к сечению $z = z_0$, для которого

$$v = v_0(r), \quad u = u_0(r), \quad s = s_0(r), \quad p = p_0.$$

Затем на внутренней поверхности трубы $r = R$

$$u = 0, \quad v = 0.$$

Другое пограничное условие вытекает из факта прилипания и приводит к равенствам

$$v_0(r)\big|_{r=R} = 0, \quad u_0(r)\big|_{r=R} = 0.$$

Сохраняем предположение о малости коэффициента концентрации, в силу которого $s \ll 1$, $1 - s \approx 1$. После этого система уравнений (10) и (11) заменяется следующей

$$0 = -\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\varrho_1}\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial z},$$
$$v\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\gamma\mu\, s}{\varrho_1}(v-u) + \frac{4}{3}\frac{\mu}{\varrho_1}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\mu}{\varrho_1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right), \qquad (12)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\gamma\mu}{\varrho_2}(v-u),$$

$$su+(1-s)v=s_0(r)u_0(r)+v_0(r),$$

$$su\frac{\partial u}{\partial z}+v\frac{\partial v}{\partial z}=s_0(r)u_0(r)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=z_0}+v_0(r)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=z_0}.$$

Обратимся сначала к трем уравнениям системы (12), не содержащим гидродинамического давления p. Предварительно введем обозначения

$$\varphi_1(r)=s_0(r)u_0(r)+v_0(r),$$

$$\psi_1(r)=s_0(r)u_0(r)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=z_0}+v_0(r)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=z_0}.$$

Тогда эти три уравнения принимают вид

$$u\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\gamma\mu}{\varrho_2}(u-v),$$

$$su+v=\varphi_1(r), \tag{13}$$

$$su\frac{\partial u}{\partial z}+v\frac{\partial v}{\partial z}=\psi_1(r).$$

Из первого уравнения этой системы находим

$$v=u+au\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{14}$$

где, как и раньше,

$$a=\frac{\varrho_2}{\gamma\mu}$$

Подставив (14) во второе уравнение системы (13), получаем

$$su+u+au\frac{\partial u}{\partial z}=\varphi_1(r)$$

или приближенно

$$u+au\frac{\partial u}{\partial z}=\varphi_1(r). \tag{15}$$

Интегрирование этого уравнения дает u в виде неявной функции от переменных r и z

$$z-z_0=a\left[u_0(r)-u+\varphi_1(r)\ln\frac{r_0(r)-u_0(r)}{\varphi_1(r)-u}\right]. \tag{16}$$

Из уравнений (13), (14) и (15) в силу малости s получаем

$$v=\varphi_1(r)=v_0(r). \tag{17}$$

Таким образом, в случае малой концентрации s скорость v основного потока, не зависящая от продольной координаты z, является функцией только расстояния r до оси трубы.

С помощью первого и третьего уравнений системы (13) найдем коэффициент замутненности, считая $\frac{\partial v}{\partial z}=0$. Получим

$$s=\frac{a\psi_1(r)}{v_0(r)-u}. \tag{18}$$

Возвращаясь к определению гидродинамического давления p, из первого уравнения системы (12) находим

$$\frac{\partial p}{\partial r}=0, \tag{19}$$

т. е. давление не зависит от координаты r. Второе уравнение той же системы уравнений дает

$$-\frac{\partial p}{\partial z}-\gamma\mu s(v-u)+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right)=0$$

или, пользуясь равенством (18),

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\varrho_2\psi_1(r)+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

Так как $v=v_0(r)$, то

$$\psi_1(r)=s_0(r)\,u_0(r)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=z_0}.$$

В первое уравнение системы (13) подставим $z=z_0$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=z_0}=-\frac{\gamma\mu}{\varrho_2}\,\frac{u_0(r)-v_0(r)}{u_0(r)}.$$

Тогда

$$\psi_1(r)=-\frac{\gamma\mu}{\varrho_2}\,s_0(r)\,[u_0(r)-v_0(r)]. \tag{20}$$

В результате формуле (18) для коэффициента концентрации можно придать вид

$$s=s_0(r)\,\frac{v_0(r)-u_0(r)}{v_0(r)-u}. \tag{21}$$

Подставляя выражение (20) для $\psi_1(r)$ в равенство (19), находим

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\mu\left\{\gamma\,s_0(r)\,[u_0(r)-v_0(r)]+\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right\}$$

или в силу малости $\gamma\,s_0(r)$,

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right). \tag{22}$$

Так как давление p является функцией только z, а скорость потока — функцией только r, то

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\text{const}, \tag{23}$$

т. е. падение давления происходит равномерно по оси потока.

Теперь можно проинтегрировать дифференциальное уравнение (22), которое уже не является уравнением в частных производных, а обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{1}{\mu}\,r\,\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{dv}{dr}+r\,\frac{d^2 v}{dr^2}$$

или

$$\frac{1}{\mu}\,r\,\frac{\partial p}{dz}=\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{\partial v}{dr}\right).$$

Интегрируем по r, считая $\frac{\partial p}{\partial z}$ постоянным,

$$r\,\frac{dv}{dr}=\frac{1}{2\mu}\,\frac{\partial p}{\partial z}\,r^2+C_1.$$

Отсюда

$$\frac{dv}{dr}=\frac{1}{2\mu}\,\frac{\partial p}{\partial z}\,r+\frac{C_1}{r}.$$

После второго интегрирования

$$v=\frac{1}{4\mu}\,\frac{\partial p}{\partial z}\,r^2+C_1\ln r+C_2. \tag{24}$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определим при помощи граничных условий и дополнительного условия: скорость v потока остается ограниченной во всей рассматриваемой области внутри трубы. Отсюда $C_1 = 0$.

Воспользуемся условием прилипания жидкости к стенкам трубы, т. е. при $r = R$ имеем $v = 0$

$$\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}R^2 + C_2 = 0.$$

Тогда

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}R^2,$$

и равенство (24) дает

$$v = -\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}(R^2 - r^2).$$

Полученный результат согласуется с классическим решением задачи о движении вязкой однородной жидкости в трубе (течение Пуазейля).

Теперь из (10) получаем

$$p = \frac{\partial p}{\partial z}z + p_0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \text{const}.$$

Таким образом, задача о движении смеси жидкой и твердой фаз в цилиндрической трубе круглого сечения приближенно решена. Уточненное решение требует замены приближенного дифференциального уравнения (15) более точным.

Поставленную задачу можно решить и методом последовательных приближений уже известным образом [2]: искомые функции u, v, s, p представляем бесконечными рядами

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

$$v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

$$s = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 \ldots$$

$$p = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 \ldots$$

Здесь значения первых слагаемых правых частей даются пограничными условиями, а значения остальных считаются малыми величинами порядка, совпадающего с соответствующим индексом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов Р. И. О движении взвешенных частиц в потоке газа. Зап. ЛГИ, 1958, т. XXXVI, вып. 3.
2. Шкадов Р. И. О движении взвешенных частиц в потоке газа. Зап. ЛГИ, 1961, т. XXXVII, вып. 3.
3. Саткевич А. А. Теоретические основы гидро-аэродинамики. Ч. II. ОНТИ, 1934.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. II. Гостехиздат, 1948.