Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLIV, вып. 3, 1964 г.

УДК 539.30

О РАСЧЕТЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЛИНЕЙНОЙ НАГРУЗКЕ, РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ВДОЛЬ ЧАСТИ ОБРАЗУЮЩЕЙ

Л. С. Бурштейн

Задача о расчете оболочки, нагруженной вдоль образующей, впервые была решена при исследовании напряжений, возникающих в цилиндрических оболочках, применяемых для перекрытий [8]. В результате пренебрежения значениями Mx и $Mx\varphi$ получается простое дифференциальное уравнение для $M\varphi$. Дальнейшее развитие этого вопроса связано с работами, в основе которых лежит предположение, что Mx и $M\varphi x$ несущественны в общем балансе сил и моментов в длинной оболочке, находящейся под распределенной нагрузкой. Наряду с этим имелись данные, указывающие на то, что это не относится к случаям, когда к оболочке приложены линейные или сосредоточенные нагрузки. Так, при передаче нагрузки на оболочку через трубу сравнительно большого диаметра отношение максимальных продольных изгибающих напряжений к максимальным окружным изгибающим напряжениям равнялось половине [7]. Таким образом стало ясно, что игнорирование Mx по сравнению с $M\varphi$ во многих случаях неоправданно. Это послужило толчком к поискам более точных решений. Принципиальные вопросы, связанные с решением дифференциального уравнения цилиндрической оболочки, рассмотрены А. И. Лурье, В. В. Новожиловым, А. Л. Гольденвейзером, В. М. Даревским, Н. И. Гоффом и др. [1—6]. Сравнительно большое распространение получило приближенное уравнение Л. А. Доннелла [5]

$$\Delta^8 w + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2h^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{1}{D}\Delta^4 q = 0. \tag{1}$$

Точность результатов, получаемых на основе уравнения (1), может быть установлена сопоставлением: а) с опытными данными, б) с результатами, получаемыми по более точному уравнению, каким, например, является уравнение [9]

$$\Delta^8 w + \frac{12}{a^2h^2}(1-\nu^2)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2}\left[2\frac{\partial^6 w}{a^6\partial\varphi^6} + 2(4-\nu)\frac{\partial^6 w}{a^4\,\partial x^2\,\partial\varphi^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\nu\,\partial^6 w}{\partial x^6} + \frac{6}{a^2}\frac{\partial^6 w}{\partial x^4\,\partial\varphi^2}\right] + \frac{1}{a^4}\left[\frac{\partial^4 w}{a^4\,\partial\varphi^4} + 2(2-\nu)\frac{\partial^4 w}{a^2\,\partial x^2\,\partial\varphi^2}\right] -$$

$$- \frac{1}{D}\Delta^4 q = 0. \tag{2}$$

При линейной нагрузке, расположенной симметрично относительно оси $x = 0$, вся оболочка, за исключением полоски линейной нагрузки, не нагружена и дифференциальные уравнения восьмого порядка для

радиального перемещения становятся однородными. Переходя к безразмерным значениям x и w, т. е. принимая $x = \frac{x^*}{a}$ и $w = \frac{w^*}{a}$ (x^* и w^* — абсолютные значения соответствующих величин), уравнения (1) и (2) можно написать в виде

$$\Delta^8 w + 4k^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, \tag{1'}$$

$$\Delta^8 w + 4k^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\nu\, \partial^6 w}{\partial x^6} + 6 \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^2\, \partial x^4} + 2(4 - \nu) \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^4\, \partial x^2} +$$

$$+ 2(2 - \nu) \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^2\, \partial x^2} + 2 \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} = 0, \tag{2'}$$

где $k^4 = 3(1 - \nu^2) \left(\frac{a}{h}\right)^2$.

К сожалению, экспериментальных данных по оболочкам крайне мало. Проверка точности результатов, получаемых по уравнению (1'), путем сопоставления с результатами по уравнению (2') сопряжено с большими трудностями. Однако, несмотря на это, за последние годы все большее число исследователей обращается к этому методу, выбирая в качестве эталона для сравнения результаты решения по уравнению (2'). Существующие экспериментальные данные согласуются с этими результатами. В основе этого метода лежит не оценка значения отдельных отброшенных членов, а непосредственное сопоставление численных результатов, получаемых по готовым решениям (1') и (2').

Решение уравнения (1') можно получить при помощи фукций $w = e^{p\varphi} \cos nx$ или $w = e^{px} \cos n\varphi$. Это дает возможность выразить деформации и напряжения при помощи простых рядов. Точность решения по указанным функциям может быть определена сопоставлением значений корней характеристического уравнения, полученных по уравнениям (1') и (2'). Эти значения определяют численные факторы, входящие в выражения для напряжений и деформаций. Небольшая разница между значениями корней, полученными по уравнениям (1') и (2'), указывает на удовлетворительную точность приближенного решения.

Подставляя значение $w = e^{p\varphi} \cos nx$ в уравнение (1'), получим выражения для корней характеристического уравнения

$$\left.\begin{aligned} p_1^2 &= (n^2 + nk) + ink \\ p_2^2 &= (n^2 + nk) - ink \\ p_3^2 &= (n^2 - nk) + ink \\ p_4^2 &= (n^2 - nk) - ink \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Из полученных восьми корней используются только четыре: те, которые приводят к уменьшению w при увеличении φ.

Подставляя значение $w = e^{p\varphi} \cos nx$ в уравнение (2'), получим характеристическое уравнение

$$(p^2 - n^2)^4 + 4n^4k^4 + 2p^6 + [1 - 2(4 - \nu) n^2] p^4 + [6n^4 - 2(2 - \nu) n^2] p^2 - 2\nu n^6 = 0. \tag{4}$$

Следует отметить, что если принять решение уравнения (1') в виде $w = e^{p\varphi}$, то оно сводится к следующему

$$\frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + 2 \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} = 0,$$

т. е. принимает форму уравнения, определяющего деформацию круглого кольца.

Если принять решение уравнения (1′) в виде $w = e^{px}$, то оно переходит в

$$\frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + 4k^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0,$$

т. е. принимает форму уравнения, определяющего осесимметричную деформацию тонкой цилиндрической оболочки.

Сопоставление корней по уравнениям (1′) и (2′) для функции вида $w = e^{px} \cos nx$ при k, равном 5; 10; 50 и n, равном 0,1; 0,3; 0,5; 1 и 10 показывает, что приближенное решение тем точнее, чем выше n. Следовательно, наименее точен первый член, для которого $m = 1$. Для сравнительно толстых оболочек ($k = 5$) этот член достаточно точен, если $n \geqslant 1$, для очень тонких оболочек n может быть ниже 0,1. Поскольку $n = m\frac{\pi a}{L}$, ясно, что предельные значения для n одновременно означают определенные ограничения для длины цилиндра. Решение уравнения (1′) дает удовлетворительную точность для следующих соотношений k и $\frac{L}{a}$:

k	5;	10;	50
$\frac{L}{a}$	3;	6;	30

При таких соотношениях отклонения между квадратами корней характеристических уравнений (1′) и (2′) не больше 10% для всех членов.

Результаты сопоставления корней для функции вида $w = e^{px} \cos n\varphi$ при k, равном 5; 10; 50 и n, равном 1; 2; 3; 4 и 10, показывает, что влияние k на точность решения в этом случае невелико. При всех исследованных значениях k точность решения удовлетворительна, если $n \geqslant 4$, при $n \leqslant 3$ ошибка слишком велика. При $n \to \infty$ характеристическое уравнение (2′) быстро приближается к характеристическому уравнению (1′). При $n \geqslant 4$ отклонения между квадратами корней обоих уравнений меньше 11%. Таким образом, решение при помощи функции $w = e^{p\varphi} \cos nx$ более соответствует коротким цилиндрам.

Уравнение (1′) применено при решении задачи о просто опертой цилиндрической оболочке, нагруженной симметрично относительно середины постоянной линейной нагрузкой вдоль образующей на протяжении 2δ [6]. Нагрузка представлена рядом Фурье

$$\sum_{m=1,\ 3,\ \ldots}^{\infty} p_m^* \cos\left(\frac{m\pi ax}{L}\right),$$

где p^* — нагрузка на оболочку,

$$p_m^* = \frac{2p^*}{m\pi\delta} \sin\frac{m\pi\delta}{L}.$$

Постоянные в общем решении уравнения (1′) найдены из условий при $\varphi = 0$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{D}{a^2}\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} = \frac{p_m^*}{2} \cos nx. \tag{5}$$

При простом опирании оболочки необходимо при $x = \pm\frac{1}{2}\frac{L}{a}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v = w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{6}$$

В результате решения уравнения (1′) получаются окончательные выражения для моментов M_x, M_φ и мембранных напряжений σ_x и σ_φ

$$M_x \Big/ \left[\left(-\frac{D}{a}\right) n b_m \cos nx\right] = \frac{e^{-\alpha_1\varphi}}{\alpha_1^2+\beta_1^2}\{[-2\nu k\alpha_1 + n(1-\nu)(\alpha_1-\beta_1)]\cos\beta_1\varphi +$$

$$+[2\nu k\beta_1 - n(1-\nu)(\alpha_1+\beta_1)]\sin\beta_1\varphi\} + \frac{e^{-\alpha_2\varphi}}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\{[-2\nu k\alpha_2 - n(1-\nu)\times$$

$$\times(\alpha_2+\beta_2)]\cos\beta_2\varphi + [2\nu k\beta_2 - n(1-\nu)(\alpha_2-\beta_2)]\sin\beta_2\varphi\}, \qquad (7)$$

$$M_\varphi \Big/ \left[\left(-\frac{D}{a}\right) n b_m \cos nx\right] = \frac{e^{-\alpha_1\varphi}}{\alpha_1^2+\beta_1^2}\{[-2k\alpha_1 - n(1-\nu)(\alpha_1-\beta_1)]\cos\beta_1\varphi +$$

$$+[2k\beta_1 + n(1-\nu)(\alpha_1+\beta_1)]\sin\beta_1\varphi\} + \frac{e^{-\alpha_2\varphi}}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\{[-2k\alpha_2 +$$

$$+n(1-\nu)(\alpha_2+\beta_2)]\cos\beta_2\varphi + [2k\beta_2 + n(1-\nu)(\alpha_2-\beta_2)]\sin\beta_2\varphi\}, \qquad (8)$$

$$\sigma_x \Big/ \left[\left(\frac{E}{2k^2}\right) n b_m \cos nx\right] = \frac{e^{-\alpha_1\varphi}}{\alpha_1^2+\beta_1^2}\{[n\alpha_1 + (n+2k)\beta_1]\cos\beta_1\varphi +$$

$$+[(n+2k)\alpha_1 - n\beta_1]\sin\beta_1\varphi\} + \frac{e^{-\alpha_2\varphi}}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\{[-n\alpha_2 + (n-2k)\beta_2]\cos\beta_2\varphi +$$

$$+[(n-2k)\alpha_2 + n\beta_2]\sin\beta_2\varphi\}, \qquad (9)$$

$$\sigma_\varphi \Big/ \left[\left(\frac{E}{2k^2}\right) n^2 b_m \cos nx\right] = \frac{e^{-\alpha_1\varphi}}{\alpha_1^2+\beta_1^2}\{-(\alpha_1+\beta_1)\cos\beta_1\varphi + (-\alpha_1+\beta_1)\cos\beta_1\varphi\} +$$

$$+\frac{e^{-\alpha_2\varphi}}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\{(\alpha_2-\beta_2)\cos\beta_2\varphi - (\alpha_2+\beta_2)\sin\beta_2\varphi\}, \qquad (10)$$

$$b_m = \left(\frac{p^* aL}{4\pi^2 Dk\delta}\right)\left(\frac{1}{m^2}\right)\sin\left(\frac{m\pi\delta}{L}\right); \qquad (11)$$

$$\alpha_1^2 = \frac{n}{2}\{(n+k) + [(n+k)^2 + k^2]^{1/2}\}, \qquad (12)$$

$$\beta_1 = \frac{nk}{2\alpha_1}, \qquad (13)$$

$$\alpha_2^2 = \frac{n}{2}\{(n-k) + [(n-k)^2 + k^2]^{1/2}\}, \qquad (14)$$

$$\beta_2 = \frac{nk}{2\alpha_2}. \qquad (15)$$

Как показало приведенное выше сравнение результатов, полученных по уравнению (1′) с данными, полученными по более точному уравнению (2′), уравнение (1′) применимо только в определенных пределах. Каких-либо экспериментальных результатов, которые позволили бы судить о пределах применения этого уравнения до настоящего времени не опубликовано. В связи с этим целесообразно привести экспериментальные данные, полученные нами при испытании пустотелых цилиндров при условиях, соответствующих изложенной теории. Испытывался стальной цилиндр с $a/h = 24{,}5$ при просто опертых концах. Расстояние между опорами $L = 800$ *мм*. Нагрузка передавалась на отрезок верхней образующей цилиндра длиной 200 *мм* симметрично относительно середины. Нагружение осуществлялось путем контакта с испытуемым цилиндром отрезка цилиндрической формы. Направление нагрузки — радиальное. Опытным путем определялись напряжения в центре цилиндра ($x = 0$, $\varphi = 0$) — на внутренней поверхности, для чего наклеивались проволочные датчики в продольном и окружном направлениях. При $p = 1390$ *кг*

напряжения в окружном направлении составили 2000 и в продольном 280 *кг/см*^{2}.

Теоретически напряжения на внутренней поверхности оболочки в начале координат ($x = 0$, $\varphi = 0$) имеют следующие значения. От окружного момента M_φ возникает, согласно формуле (8), растягивающее напряжение, равное 2450 *кг/см*^{2}. Мембранное напряжение в окружном направлении является сжимающим и согласно формуле (10) равно 127 *кг/см*^{2}. Таким образом, результирующее напряжение в окружном направлении теоретически составляет 2450—127 = 2323 *кг/см*^{2}, опытное 2000 *кг/см*^{2}. От продольного момента M_x возникает, согласно формуле (7), растягивающее напряжение, равное 833 *кг/см*^{2}. Мембранное напряжение в продольном направлении является сжимающим и, согласно формуле (9), равно 507 *кг/см*^{2}. Результирующее напряжение в продольном направлении составляет 833—507 = 326 *кг/см*^{2} и опытное 280 *кг/см*^{2}. В обоих случаях опытное напряжение меньше теоретического. Расхождение между теоретическими и опытными значениями около 15%. Так как экспериментально в действительности найдено напряжение не в точке $x = 0$, $\varphi = 0$, а среднее его значение на участке длиной, равной длине тензометра, то, очевидно, что фактическое расхождение несколько меньше.

Заключение

Как показывает сопоставление опытных и теоретических значений, погрешность, вызванная применением приближенного уравнения (1′), близка к установленной теоретически путем сравнения корней характеристических уравнений для (1′) и (2′). Для уменьшения погрешности необходимо применение уравнений с большим числом членов, чем уравнение (1′).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
2. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
3. Гольденвейзер А. Л. Теория тонких упругих оболочек. Гостехиздат, 1953.
4. Даревский В. М. К теории цилиндрических оболочек. ПММ, 1951, т. XV; 1952, т. XVI.
5. Donnell I. S. NACA, 1933, Rep. 479.
6. Hoff N. I. Quart. Appl. Math., 1954, N 11.
7. Schoessow, Kooistra. Appl. Mech., 1945, v. 12.
8. Finsterwalder U. Bauingenieur, 1928, B. IX.
9. Hoff N. I. Appl. Mech., 1955, v. 22.