Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLIV, вып. 3, 1964 г.

УДК 621.926.3

АНАЛИЗ ТЕОРИИ ШАРОВОЙ МЕЛЬНИЦЫ

Н. П. Неронов

Теория шаровой мельницы в основном была разработана Дэвисом [8] еще в первой четверти настоящего столетия после экспериментального изучения работы шаровой мельницы [9]. Значительно позднее в нее были внесены исправления и дополнения [11]. Тогда же возник вопрос об учете фактора подталкивания нижележащими шарами тех шаров, которые уже отделились от стенки барабана и совершают в нем свое относительное движение, образуя цепочку шаров, распадающуюся в вершине. В силу допущенной погрешности исследователи не дали правильного решения этого вопроса [10, 11, 12]. Погрешность была устранена и установлена истинная форма цепочки шаров несколько позже [2, 13]. Однако эта погрешность встречается и в новой зарубежной литературе [12], поэтому целесообразно еще раз вернуться к этому вопросу и изложить кинематику и динамику шаровой мельницы с точки зрения теории цепочек шаров (уточненная теория шаровой мельницы) и дать критическую оценку последней.

Вывод основных уравнений. Если угловая скорость вращения барабана остается постоянной, то режим шаровой мельницы по истечении некоторого времени можно считать установившимся, причем величина и направление скорости различных шаров, проходящих через одну и ту же точку пространства, с течением времени не меняются. Рассмотрим внешний ряд шаров и отнесем эти рассуждения и к другим рядам в предположении независимости относительного движения (по отношению к вращающемуся барабану) различных рядов.

Движение шаров совершается в вертикальной плоскости, перпендикулярной горизонтальной оси O вращения барабана (рис. 1). Шары считаются однородными и имеющими одинаковый радиус r, предполагаемый малым по сравнению с внутренним радиусом барабана R_0. Центры шаров внешнего ряда, движущиеся по дуге ab окружности радиуса $R_0 - r \approx \approx R_0$, после отставания шаров в некоторой точке b от стенки барабана располагаются далее по искомой кривой bc без нарушения контакта между шарами. Скорость шаров вдоль кривых ab и bc остается постоянной. Точка c соответствует прекращению контакта шаров и началу их дальнейшего свободного параболического движения. Определим положения точек b и c, а также вид кривой bc.

Обозначим через δ массу, приходящуюся на единицу длины кривой bc. Поместим начало координат O на оси вращения барабана и направим координатную ось Ox горизонтально, а ось Oy вертикально вверх (рис. 2). На элементарную массу dm длины ds ($dm = \delta\, ds$) в точке M (x, y) действует сила тяжести gdm, где $g = 9{,}81$ *м/сек*^{2} — ускорение свободного падения; T и T_1 — давления, направленные по касательным со стороны

соприкасающихся масс ($T_1 dT$). Обозначим через α угол между горизонтальным направлением и скоростью элементарной массы в точке M. Составим дифференциальные уравнения движения рассматриваемой массы в проекциях на касательную и нормаль к ее траектории

$$dT = -\delta g\, ds \sin\alpha, \quad \frac{\delta v^2}{\varrho} = \delta g \cos\alpha - \frac{T}{\varrho}, \tag{1}$$

где ϱ — радиус кривизны кривой bc в точке M.

Соотношение $dy = ds \sin\alpha$ позволяет переписать первое из предыдущих уравнений в виде $dT = -\delta g dy$, после чего интегрирование дает

$$T = C - \delta g y \quad (C > 0). \tag{2}$$

Вводя обозначение производных $y' = \frac{dy}{dx}$ и $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, имеем

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \varrho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}. \tag{3}$$

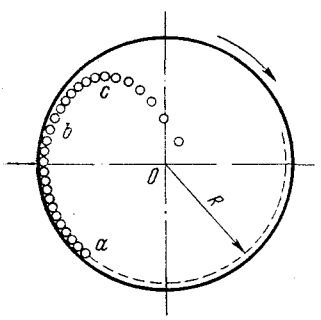


Рис. 1.

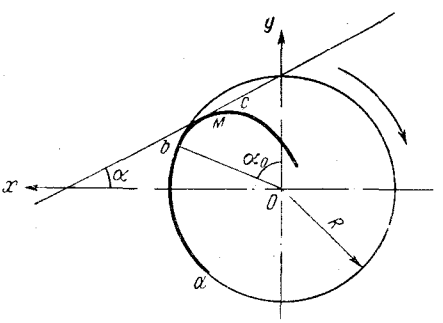


Рис. 2.

При помощи равенств (2) и (3) переписываем второе из уравнений (1) в форме

$$\frac{y''}{1+y'^2}(y - K) = 1, \tag{4}$$

где

$$K = \frac{\delta v^2 + C}{\delta g} = \text{const}. \tag{5}$$

Интеграл уравнения (4)

$$y = K + \frac{1}{E}\operatorname{ch}(Ex + F), \tag{6}$$

если обозначить через E и F произвольные постоянные интегрирования. Легко устанавливается, что $E > 0$. Искомая кривая оказалась дугой цепной линии, вогнутой вниз. Определим произвольные постоянные C, E, F. Обозначим через α_0 значение угла α в точке b, остающееся пока неизвестным, и через x_0, y_0 — координаты этой точки (рис. 2). Значения этих координат

$$x_0 = R_0 \sin\alpha_0, \quad y_0 = R_0 \cos\alpha_0. \tag{7}$$

При переходе через точку b касательная к кривой abc меняется непрерывно, так же как и давление T. Отсюда вытекает непрерывность изменения и радиуса кривизны ϱ в той же точке, для которой $\varrho = R_0$. Итак, кривые ab и bc имеют в точке b касание второго порядка. Это условие позволяет определить значение произвольных постоянных C, E, F в функции

угла α_0, после чего находится значение постоянной K с помощью равенства (5)

$$C = 2R_0\,\delta g\cos\alpha_0 - \delta v^2,\quad E = -\frac{1}{R_0\cos^2\alpha_0},$$
$$F = \frac{\sin\alpha_0}{\cos^2\alpha_0} + \ln\frac{1-\sin\alpha_0}{\cos\alpha_0},\quad K = 2R_0\cos\alpha_0. \tag{8}$$

Для определения значения α_0 обратимся к точке c, которая характеризуется прекращением контакта шаров. Так как в этой точке $T = 0$, она должна совпадать с вершиной кривой bc, где ордината y приобретает наибольшее значение, а касательная горизонтальна. Из уравнения (6) кривой bc заключаем, что абсцисса точки c (x_1, y_1) определяется уравнением

$$Ex_1 + F = 0.$$

Отсюда

$$x_1 = -\frac{F}{E} = R_0\left(\sin\alpha_0 + \cos^2\alpha_0\ln\frac{1-\sin\alpha_0}{\cos\alpha_0}\right). \tag{9}$$

Значение ординаты

$$y_1 = K + \frac{1}{\varepsilon} = R_0\,(2 - \cos\alpha_0)\cos\alpha_0. \tag{10}$$

Это значение y_1 должно обращать в нуль выражение (2) для T. Поэтому, учитывая уже найденное значение постоянной C из равенств (8), получим

$$T\,|_{y=y_1} = R_0\,\delta\,g\cos^2\alpha_0 - \delta\,v^2 = 0.$$

Отсюда, принимая во внимание соотношение $v = R_0\,\omega$, имеем

$$\cos\alpha_0 = \frac{v}{\sqrt{gR_0}} = \omega\sqrt{\frac{R_0}{g}}. \tag{11}$$

Итак, значение угла α_0 найдено, и произвольные постоянные C, E, F на основании формул (8) могут считаться известными. Обычная теория шаровой мельницы отождествляет точку b отставания шаров от стенки барабана с начальной точкой c их свободного параболического движения и дает значение угла α_0

$$\cos\alpha_0 = \frac{R_0\,\omega^2}{g} = \left(\omega\sqrt{\frac{R_0}{g}}\right)^2 < \omega\sqrt{\frac{R_0}{g}}, \tag{12}$$

которое, как и следовало ожидать, превышает ранее найденное (11). Последнее заключение играет существенную роль в оценке теории цепочек и использовано ниже.

Найдем давление между шарами в точке b (x_0, y_0) их отставания от стенки барабана. Внеся с этой целью в формулу (2) для T значения y_0 и C из равенств (7) и (8), получим

$$T = R_0\,\delta\,g\cos\alpha_0 - \delta\,v^2 > 0. \tag{13}$$

На основании равенства (11) для α_0 значение T положительно и, следовательно, как это и должно быть, в точке b контакт шаров еще не нарушается. Наконец, отметим предельное значение критической угловой скорости $\omega_{кр}$, при которой шары все время остаются прижатыми к стенке барабана и, следовательно, процесса дробления руды не происходит. Для этого положим в равенстве (11) $\alpha_0 = 0$

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{g}{R_0}}. \tag{14}$$

Обычная теория шаровой мельницы дает для $\omega_{кр}$ то же значение. Считая угловую скорость вращения ω неизменной, найдем предельное значение $R_{кр}$ радиуса R_0, когда $\alpha_0 = 0$

$$R_{кр} = \frac{g}{\omega^2}. \tag{15}$$

Движение шаров внутренних рядов. Рассмотрим какой-либо произвольный промежуточный слой шаров. Сохраняя аналогию в обозначениях, обозначим его радиус через R, а соответствующий угол отрыва шара, отсчитываемый от вертикали, через α, опуская индекс (рис. 3). Формула (11) принимает вид

$$\cos\alpha = \omega\sqrt{\frac{R}{g}}. \tag{16}$$

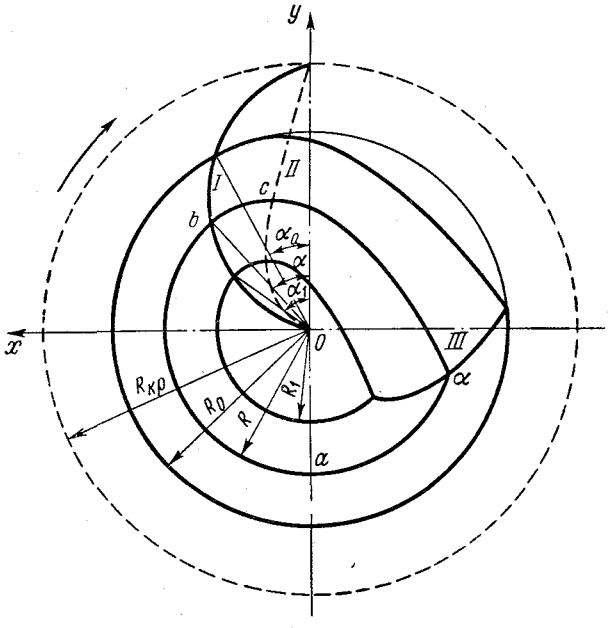


Рис. 3.

Тогда на основании предыдущей формулы можно заключить, что при изменении R будет изменяться и α: с уменьшением R возрастает α. Предыдущую формулу можно переписать в виде

$$R = \frac{g}{\omega^2}\cos^2\alpha. \tag{17}$$

Для шаров внешнего ряда

$$R_0 = \frac{g}{\omega^2}\cos\alpha_0. \tag{18}$$

Равенство (17) можно рассматривать как уравнение в полярной системе координат геометрического места точек b (x_0, y_0) отрыва, соответствующих началу относительного движения шаров. То же уравнение в прямоугольной декартовой системе координат

$$x_0 = R\sin\alpha = \frac{g}{\omega^2}\sin\alpha\cos^2\alpha, \quad y_0 = R\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2}\cos^3\alpha \tag{19}$$

принимает форму

$$(x_0^2 + y_0^2)^3 = \frac{g^2}{\omega^4}y_0^4 \tag{20}$$

и представляет некоторую алгебраическую кривую (кривая *I*) шестого порядка, касающуюся в начале координат оси абсцисс (рис. 3).

Рассмотрим геометрическое место вершин c (x_1, y_1) траекторий шаров. Выражения (9) и (10) дают координаты x_1 и y_1 вершины c параболы для внешнего ряда шаров. Для перехода к внутренним рядам вносим в выражения (9) и (10) значение R из формулы (17)

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{g}{\omega^2}\cos^2\alpha\left(\sin\alpha+\cos^2\alpha\,\ln\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right),\\ y_1 &= \frac{g}{\omega^2}\cos^3\alpha\,(2-\cos\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Считая α переменным, можно рассматривать равенства (21) как параметрическое уравнение геометрического места вершин траекторий шаров. В результате получена некоторая трансцендентная кривая (рис. 3, кривая *II*). Здесь не приводятся соображения, позволяющие построить геометрическое место конечных точек d (x_2, y_2) свободного параболического движения шаров (рис. 3, кривая *III*). Эти соображения основаны на обычном для теории шаровой мельницы приближенном предположении о том, что в конце своего параболического движения шар попадает в точку d, лежащую на окружности радиуса R, которую он описывал до начала своего относительного движения. Другими словами, допускается, что координаты точки d удовлетворяют уравнению

$$x_2^2+y_2^2=R^2. \tag{22}$$

Критика новой теории шаровой мельницы. Л. Б. Левенсон [3] в связи с неудачной попыткой коллектива американских исследователей [11] учесть фактор подталкивания шаров организовал эксперимент на опытной мельнице диаметра 0,5 *м* для сравнения параболической траектории внешнего ряда шаров (теория Девиса) с логарифмической спиралью, по которой, по мнению упомянутых исследователей, расположится цепочка шаров. При угле отрыва $\alpha = 16°$ фиксировалось прекрасное совпадение теоретической параболы с экспериментальной траекторией. При $\alpha = 52°$ согласованность обеих этих кривых, хотя и в несколько меньшей степени, оставалась хорошей. Данные этого опыта, а также отсутствие теоретического обоснования логарифмической спирали исключают какое-либо значение последней кривой в теории шаровой мельницы, хотя неудачные попытки использования логарифмической спирали предпринимались в зарубежной литературе снова [12].

Для оценки значимости новой (уточненной) теории мельницы можно сопоставить выводы этой теории с экспериментальными данными Л. Б. Левенсона. Используем формулы (11) и (12) для перехода от экспериментальных значений углов отрыва, согласующихся с теорией Девиса, к значениям, даваемым уточненной теорией шаровой мельницы

$$\cos\alpha_0=\sqrt{\cos 16°},\quad \alpha=11°20'\ \text{(вместо } 16°);$$

$$\cos\alpha_0=\sqrt{\cos 52°},\quad \alpha=38°20'\ \text{(вместо } 52°).$$

В обоих случаях констатируется резкое уменьшение этих углов, ведущее к сильно выраженному поднятию точки отрыва шаров от стенки барабана и, следовательно, к расхождению с экспериментом. Подобное обстоятельство отмечалось нами и ранее [1]. Следствием уменьшения значения угла отрыва α_0 для внешнего ряда шаров $\left(R_0=\frac{g}{\omega^2}\cos^2\alpha_0\right)$ и соответствующего угла α_1 для внутреннего ряда $\left(R_1=\frac{g}{\omega^2}\cos^2\alpha_1\right)$ является резкое отбрасывание нагрузки к барабану по сравнению с обычной теорией. Таким образом, на основе теории цепочек приходим к режиму

движения нагрузки, приближающемуся к явлению центрифугирования шаров и, конечно, сопровождающемуся меньшей затратой полезной энергии.

Сотрудники кафедры теоретической механики Ленинградского горного института Р. И. Шкадов и Ю. И. Северов задались целью произвести параллельные вычисления теоретической мощности N шаровых мельниц по обеим теориям: обычной — теории Девиса, дающей после дополнительного учета сопротивлений приемлемый для практики результат, и уточненной — теории цепочек. По теории Девиса после исправления погрешностей, допущенных им при выводе, теоретическая мощность [4, 5]

$$N = 2{,}31 \frac{P}{\varphi} \sqrt{D_0}\, \psi^3 [3(1 - k^4) - 2\psi^4 (1 - k^6)] \ квт, \qquad (23)$$

где φ — коэффициент заполнения загрузкой внутреннего объема мельницы;

P — вес загрузки, m;

$$D_0 = 2R_0,$$

$$k = \frac{R_1}{R_0},$$

$$\psi = \frac{\omega}{\omega_{кр}} = \sqrt{\cos \alpha_0}.$$

Заметим, что для расчета N существует и другая формула, которая, по указанию самого автора, дает несколько преувеличенный результат [6]. Теория же цепочек приводит к очень сложным вычислениям [1, 2].

Результаты указанных выше сравнительных вычислений (см. таблицу) позволяют сделать следующее общее заключение. Расчет по теории цепочек дает по сравнению с обычной теорией сильно заниженный результат. Изложение нами теории цепочек сопровождается предположением об отсутствии скольжения рядов шаров, как внешних, так и внутренних. Кроме этого явилась необходимость в принятии гипотезы о независимости относительного движения (по отношению к вращающемуся барабану) различных рядов, а, следовательно, в пренебрежении возможным радиальным давлением шаров друг на друга. Наконец, остался без рассмотрения вопрос об устойчивости свода шаров, образованного их цепочкой.

Таким образом, теория цепочек, основанная на уточненной теории шаровой мельницы, имеет в настоящем виде только теоретическое значение, давая результаты, расходящиеся с практикой.

Остается отметить попытку С. Е. Андреева применить к движению загрузки шаровой мельницы теорию сыпучих тел [7]. С этой целью в загрузке выделен элементарный объем $R\, da\, dR\, dl$ и указаны действующие на него только две объемные силы: сила веса и сила инерции. По ним вычислены элементарные составляющие нормального давления и силы трения, которые передаются на поверхность конуса мельницы. Затем определен элементарный момент силы трения относительно оси вращения мельницы и путем тройного интегрирования, распространенного на весь объем загрузки, подсчитан суммарный эффект этих сил.

В этом рассуждении упущены поверхностные силы, распределенные по граням выделенного элементарного объема. Введение этих сил совершенно необходимо, но оно усложняет поставленную задачу, требуя применения аппарата теории сыпучих тел. Игнорирование поверхностных сил вызывает критическое отношение к заключениям указанной работы.

Теоретическая мощность шаровых мельниц

Тип мельницы	R_0, м	l, м	n, об/мин	α_0		N, квт	
				по Девису	по теории цепочек	по Девису	по теории цепочек
ШР-3	0,675	1,5	30	47°10′	34°30′	29	11
ШР-4	0.975	1,5	24	51°10′	37°40′	71	33
ШР-5	0.975	2,2	24	51°10′	37°40′	104	49
ШР-6	1,250	2,1	21	52°00′	38°20′	184	90
ШР-7	1,250	2,7	21	52°00′	38°20′	237	116
ШР-8	1,500	3,1	19	52°45′	38°55′	425	216
ШР-9	1,700	3,6	18	52°00′	38°20′	681	335

Примечание: l — длина мельницы (типы мельниц соответствуют ГОСТ 6635—53).

ЛИТЕРАТУРА

1. Неронов Н. П. Механика шаровой мельницы. Зап. ЛГИ, 1956, т. XXXIII, № 3, стр. 37—48.
2. Неронов Н. П. Об установившемся режиме шаровой меньницы. Зап. ЛГИ, 1938, т. XI, № 3, стр. 1—18.
3. Левенсон Л. Б. и Прейгерзон Г. И. Дробление и грохочение полезных ископаемых. Гостехиздат, 1940, стр. 236—299.
4. Неронов Н. П. О расходе энергии в шаровой мельнице. Обогащение руд. Бюлл. ин-та Механобр, 1957, № 1, стр. 10—13.
5. Журавлев П. А. и Захаревич А. Ф. Наивыгоднейший режим работы шаровой мельницы. Обогащение руд. Бюлл. ин-та Механобр, 1958, № 1, стр. 61—63.
6. Андреев С. Е., Зверевич В. В. и Перов В. А. Дробление, измельчение и грохочение полезных ископаемых. Гостехиздат, 1961, стр. 269—285.
7. Андреев С. Е. О внутреннем трении в шаровой мельнице. Горный журнал, 1961, № 2, стр. 62—68.
8. Davis E. Trans. Amer. Soc. Min. Met. Engrs., 1920, v. LXI.
9. Fischer H. Z. Vereines dtsch. Ingr., 1904, März.
10. Steiger R. Zement. Sept., 1920, N 36, s. 1106—1108.
11. Gow M., Campbell A., Coghill W. Techn. Publication. N.-J., 1930, N 326.
12. Rose H., Sulliven B. A Treatise on the intertal Mechanics of Ball tube and rod Mills. N.-J., 1958.
13. Bruno E. Z. angew. Math. und Mech., 1939, B. 19, H. 3.