Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLIV, вып. 3, 1964 г.

УДК 532.51

О РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ

Н. П. Неронов

Рассмотрим плоское безвихревое движение безграничной жидкости в присутствии неподвижного цилиндрического твердого тела. Жидкость предполагается идеальной и несжимаемой, а скорость ее на бесконечно большом расстоянии от твердого тела — постоянной по величине и направлению. Ограничимся случаем непрерывного установившегося движения.

Обозначим через z и w два комплексных переменных ($i = \sqrt{-1}$)

$$z = x + iy, \quad w = \varphi + i\,\Psi, \tag{1}$$

где x, y и φ, Ψ — прямоугольные декартовы координаты точек в плоскостях z и w.

Конформное преобразование

$$z = f(w), \tag{2}$$

устанавливая зависимость между z и w, дает в плоскости движения жидкости две системы взаимно ортогональных кривых

$$\varphi = \text{const}, \quad \Psi = \text{const}. \tag{3}$$

Последнюю из них условимся считать соответствующей линиям тока. Тогда функция φ будет представлять потенциал скоростей. Следуя Н. Е. Жуковскому, можно было бы не ограничиваться взаимно однозначным конформным преобразованием и рассматривать также задачи с многозначным потенциалом скоростей.

Пусть уравнение линии тока l, состоящей из двух бесконечных ветвей и контура цилиндра A (рис. 1), будет

$$\Psi = 0. \tag{4}$$

Наконец, обозначим через a точку обтекаемого цилиндра, в которой частица жидкости, описывающая траекторию l, впервые вступает с ним в соприкосновение, и через b — точку, где она покидает контур.

Кривым (3) соответствуют на плоскости w прямые, параллельные оси абсцисс. Пусть точкам a и b соответствуют в плоскости w расположенные на оси абсцисс точки α (начало координат) и β (рис. 2), для которых соответственно

$$w = 0, \qquad w = w_0 > 0. \tag{5}$$

В результате такого преобразования контур цилиндра преобразуется на плоскости w в прямолинейный отрезок $\alpha\beta$ оси абсцисс, который рассмотрим как сплющенный контур со сторонами: верхней $\alpha\beta$ и нижней $\beta\alpha$. Пусть, для определенности верхней стороне отрезка $\alpha\beta$ соответствует верхняя часть обтекаемого контура на плоскости z и, наоборот, нижней стороне — нижняя часть контура цилиндра.

Итак, нашей задачей является взаимно однозначное отображение внешней по отношению к контуру цилиндра области z на внешнюю по отношению к отрезку $\alpha\beta$ область w, другими словами — нахождение аналитической функции $f(w)$, осуществляющей конформное преобразование (2). При решении поставленной задачи считаем заданным параметрическое уравнение обтекаемого контура, который предполагается простым.

В общем случае будем считать, что верхняя и нижняя части контура представляют различные кривые, которым соответствуют различные уравнения. Наши предположения о непрерывности движения жидкости и о том, что одна точка сопряжения упомянутых кривых является в то же время точкой разделения линии тока l на две части, а другая — их последующего слияния, ограничивают произвол в ориентации обтекаемого контура относительно потока, связывая последнюю со скоростью жидкости в бесконечно удаленных точках. Эта последняя считается заданной по величине и направлению. В общем случае точки a и b будут угловыми и скорость жидкости в них обращается в нуль. В частном случае они могут

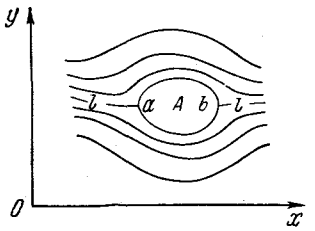


Рис. 1.

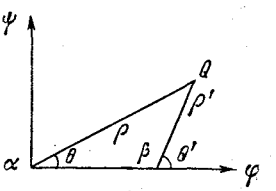


Рис. 2.

быть точками возврата, и скорость в них сохраняет конечное, отличное от нуля значение.

Пусть параметрическое уравнение верхней стороны контура имеет вид

$$x = \Phi_1(t), \qquad y = \Psi_1(t). \tag{6}$$

При монотонном изменении параметра t в интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ точка $N(x, y)$ пробегает один раз в положительном направлении от a к b указанную часть контура. Аналогичное происходит и для нижней части обтекаемого контура, где

$$x = \Phi_2(\tau), \qquad y = \Psi_2(\tau), \tag{7}$$

и параметр τ изменяется в пределах $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$ при обходе этой части в том же положительном направлении, т. е. теперь уже от b к a.

В точках a и b или соответствующих им точках α и β параметр t принимает соответственно значения t_1 и t_2. Точно так же обозначим через τ_1 и τ_2 соответственные значения параметра τ в упомянутых выше точках: τ_1 в точке b и τ_2 в точке a. Очевидно,

$$\Phi_1(t_1) = \Phi_2(\tau_2), \quad \Psi_1(t_1) = \Psi_2(\tau_2), \quad \Phi_1(t_2) = \Phi_2(\tau_1),$$
$$\Psi_1(t_2) = \Psi_2(\tau_1).$$

Возможен, конечно, и более простой частный случай одного уравнения некоторой кривой, частями которой являются верхняя и нижняя стороны обтекаемого контура. В этом случае нужно положить

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi, \quad \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi,$$

вводя только одну функцию Φ и один параметр t. Тогда параметрическое уравнение контура принимает вид

$$x = \Phi(t), \qquad y = \Psi(t),$$

и положение точек a и b становится искомым. Пусть точка N пробегает весь контур цилиндра. Обозначим значения параметра t в точках a, b и снова в точке a соответственно через t_1, t_2, t_3 ($t_1 < t_2 < t_3$). Имеем

$$\Phi(t_1) = \Phi(t_3), \quad \Psi(t_1) = \Psi(t_3).$$

При этом предполагаем, что в каждой точке контура существует определенная касательная, непрерывно изменяющаяся вместе с изменением положения точки на контуре. Наконец, чтобы задача была вполне определенной, необходимо знать разложение функции $z = f(w)$ в области бесконечно удаленной точки, которая является полюсом первого порядка этой функции

$$z = fw = \gamma_1(w) + \gamma_0 + \frac{\gamma_{-1}}{w} + \frac{\gamma_{-2}}{w_2} + \ldots \tag{8}$$

с радиусом сходимости $|w| > w_0$. Коэффициенты предыдущего ряда

$$\gamma_j = \gamma_j^{(1)} + i\,\gamma_j^{(2)}, \quad j = 1,\ 0,\ -1,\ -2\ldots \tag{9}$$

являются, вообще говоря, мнимыми количествами. Известно [1], что модуль производной функции $f(w)$ связан со скоростью v жидкости в некоторой точке пространства соотношением

$$\left|\frac{dz}{dw}\right| = \frac{1}{v}. \tag{10}$$

Кроме того, аргумент производной дает направление скорости жидкости в той же точке. Поэтому, обозначая через v_x и v_y проекции скорости V на координатные оси, получим

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{v^2}(v_x + iv_y). \tag{11}$$

Рассуждая так же относительно бесконечно удаленных точек плоскости z, после введения очевидных обозначений находим

$$\left.\frac{dz}{dw}\right|_{|w|\to\infty} = \frac{1}{v_\infty^2}(v_{x\infty} + iv_{y\infty}) = \gamma_1 = \gamma_1^{(1)} + i\,\gamma_1^{(2)}. \tag{12}$$

Отсюда определяются коэффициенты $\gamma_1^{(1)}$ и $\gamma_1^{(2)}$

$$\gamma_1^{(1)} = \frac{v_{x\infty}}{v_\infty^2}, \quad \gamma_1^{(2)} = \frac{v_{y\infty}}{v_\infty^2}, \tag{13}$$

так как величины $v_{x\infty}$, $v_{y\infty}$, v_∞ по условию считаются заданными.

Переходим к особенным точкам функции $f(w)$ на конечном расстоянии, считая в общем случае точки a и b обтекаемого контура на плоскости z угловыми. Поскольку $f(w)$ является однозначной аналитической функцией, этими точками могут быть только α и β. Приведем на плоскости w разрез — отрезок $\alpha\beta$ и тем исключим возможность обхода только одной из упомянутых точек. В результате функция $f(w)$ остается в точках α и β однозначной и непрерывной. Если же в частном случае точки a и b обтекаемого контура являются точками возврата, то в точках α и β будет непрерывна не только функция $f(w)$, но и ее производная.

Вводим функции, характеризующие соотношение между точками контура цилиндра в плоскости z и его отображения $\alpha\beta$ в плоскости w. Координаты какой-либо точки n отрезка $\alpha\beta$

$$\varphi_n = \sigma, \quad \Psi_n = 0 \quad (0 \leqslant \sigma \leqslant w_0), \tag{14}$$

и поэтому в этой точке $w_n = \sigma$.

Заметим, что в точке n совпадают две точки n_1 и n_2, принадлежащие соответственно верхней и нижней частям отображенного контура цилиндра.

Когда точка n_1 пробегает верхнюю сторону отрезка $\alpha\beta$, соответствующая ей на плоскости z точка N_1 описывает верхнюю часть обтекаемого контура, и ее координаты определяются равенством

$$z_{N_1} = x_{N_1} + iy_{N_1} = f(w_{n_1}) = \Phi_1(t) + i\,\Psi_1(t) = f(\sigma), \tag{15}$$

в силу которого σ вдоль указанной части контура нужно рассматривать как функцию от t

$$\sigma = \sigma_1(t) \equiv \sigma_1. \tag{16}$$

Аналогичные рассуждения можно привести для точки n_2 и соответствующей ей точки N_2, откуда вытекает равенство

$$z_{N_2} = x_{N_2} + iy_{N_2} = f(w_{n_2}) = \Phi_2(\tau) + i\,\Psi_2(\tau) = f(\sigma). \tag{17}$$

Следовательно,

$$\sigma = \sigma_2(\tau) \equiv \sigma_2. \tag{18}$$

Отсюда

$$\sigma_1(t) = \sigma_2(\tau). \tag{19}$$

Это равенство устанавливает связь между параметрами t и τ в точке n. В упомянутом выше частном случае, когда обе части контура принадлежат одной и той же кривой, можно ограничиться введением только одной функции $\sigma(t) = \sigma$.

Определение функции $z = f(w)$ по ее контурным значениям. Выделим на плоскости w двусвязную конечную область, ограниченную контуром отрезка $\alpha\beta$ и контуром Σ круга, описанного из начала координат произвольным достаточно большим радиусом $R > w_0$.

Пусть $m(w)$, $n(w_n)$, $p(w_\Sigma)$ — точки, взятые соответственно внутри указанной выше области, на отрезке $\alpha\beta$ и на окружности Σ. Обозначим отображения этих точек в плоскости z соответственно через M, N и P. Формула Коши позволяет составить выражение для аналитической функции $f(w)$ по ее контурным значениям

$$z = x + iy = f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha\beta}\frac{f(w_n)\,dw_n}{w_n - w} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma}\frac{f(w_\Sigma)\,dw_\Sigma}{w_\Sigma - w}, \tag{20}$$

где оба интеграла взяты в положительном направлении. Пользуясь равенствами (15), (16), (17), (18) и выполняя интегрирование в правой части равенства (20), после разложения функции $f(w_\Sigma)$ в равномерно сходящийся ряд на основании равенства (8) находим

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\Phi_1(t) + i\,\Psi_1(t)}{\sigma_1(t) - w}\,d\sigma_1(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\Phi_2(\tau) + i\,\Psi_2(\tau)}{\sigma_2(\tau) - w}\,d\sigma_2(\tau) + \gamma_1 w + \gamma_0. \tag{21}$$

Замена переменных в обоих интегралах дает

$$d\sigma_1(t) = \frac{d\sigma_1(t)}{dt}\,dt, \quad d\sigma_2(t) = \frac{d\sigma_2(\tau)}{d\tau}\,d\tau. \tag{22}$$

Функции $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ остаются неизвестными. Для их определения нужно после предварительного преобразования [1] входящих в равенство (21) интегралов в этом последнем перейти к пределу, неограниченно приближая произвольную точку $m(w)$, взятую внутри рассматриваемой области, к некоторой точке $q(w_q)$ отрезка $\alpha\beta$, в которой совпадают точка q_1, относящаяся к верхней стороне отрезка, и точка q_2, относящаяся к нижней его стороне.

Обозначим значения параметров t и τ в точке q соответственно через λ и μ. После отделения вещественной и чисто мнимой частей [1] имеем

$$\frac{1}{2}[\Phi_1(\lambda)+\Phi_2(\mu)]=\frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\Psi_1(t)-\Psi_1(\lambda)}{\sigma_1(t)-\sigma_1(\lambda)}\,d\sigma_1(t)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\Psi_2(\tau)-\Psi_2(\mu)}{\sigma_2(\tau)-\sigma_2(\mu)}\,d\sigma_2(\tau)+\frac{1}{2\pi}[\Psi_1(\lambda)-\Psi_2(\mu)]\lg\frac{w_0-\sigma_1(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}+$$

$$+\gamma_1^{(1)}\sigma_1(\lambda)+\gamma_0^{(1)}, \tag{23}$$

$$\frac{1}{2}[\Psi_1(\lambda)+\Psi_2(\mu)]=-\frac{1}{2\pi}[\Phi_1(\lambda)-\Phi_2(\mu)]\lg\frac{w_0-\sigma_1(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}+\gamma_1^{(2)}\sigma_1(\lambda)+$$

$$+\gamma_0^{(2)}-\frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\Phi_1(t)-\Phi_1(\lambda)}{\sigma_1(t)-\sigma_1(\lambda)}\,d\sigma_1(t)-\frac{1}{2\pi}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\Phi_2(\tau)-\Phi_2(\mu)}{\sigma_2(\tau)-\sigma_2(\mu)}-d\sigma_2(\tau).$$

Наконец, имеем очевидное равенство

$$\sigma_1(\lambda)=\sigma_2(\mu),\quad t_1\leqslant\lambda\leqslant t_2,\quad \tau_1\leqslant\mu\leqslant\tau_2. \tag{24}$$

Присоединяем к написанной выше системе двух функциональных уравнений (23) типа интегро-дифференциальных также уравнение (24). Полученная система определяет три неизвестные функции $\sigma_1(\lambda)$ в интервале $t_1\leqslant\lambda\leqslant t_2$, $\sigma_2(\mu)$ в интервале $\tau_1\leqslant\mu\leqslant\tau_2$, а также функцию $\mu=\mu(\lambda)$.

Определив σ_1 и σ_2, получаем выражение для функции $f(w)$, осуществляющей требуемое конформное преобразование путем соответствующей подстановки в равенство (21) и выполнения квадратур. Найденная функция $f(w)$ содержит две неопределенных постоянных $\gamma_0^{(1)}$ и $\gamma_0^{(2)}$. Их значение находится следующим образом. Переходим к разложению функции $f(w)$ в области бесконечно удаленной точки и сравниваем полученное разложение с рядом (8). Отождествляя эти разложения, необходимо приравнять входящие в них постоянные члены, что и дает уравнение для определения $\gamma_0=\gamma_0^{(1)}+i\,\gamma_0^{(2)}$. В приведенных ниже примерах приводится значение γ_0.

Отметим, что уравнение заданного обтекаемого контура может иметь различную форму, в связи с чем будет изменяться и решение системы (23).

Чтобы получить параметрическое уравнение бесконечных ветвей линии тока (рис. 1), необходимо в равенстве (21) положить $w=\varphi$, $\Psi=0$ и отделить вещественную и мнимую части. Для левой ветви $\varphi\leqslant 0$ и для правой $\varphi\geqslant w_0$. Тогда координаты упомянутых ветвей будут выражены в функции переменного параметра φ. Наконец, производная $\frac{dz}{dw}$ позволяет изучить получающееся поле скоростей. Важно отметить, что в точках $t=\lambda$, $\tau=\mu$ дифференциальные элементы интегралов, входящих в равенства (23), будут представлять неопределенность вида $\frac{0}{0}$. В дальнейшем рассмотрим только случаи, когда эта неопределенность оказывается в действительности конечным числом и раскрывается по правилу Лопиталя. Соответствующий пример приведем ниже.

Построение функции $z=f(w)$ и частных решений системы уравнений (23) и (24). Функцию $f(w)$ представляем в форме

$$z=c_0+c_1w+\sum_{p+q=r}c_r(p,\,q)\,w^{\frac{p}{r}}(w-w_0)^{\frac{q}{r}}. \tag{25}$$

Коэффициенты рассматриваемого конформного преобразования (25) являются, вообще говоря, мнимыми количествами

$$c_0=a_0+ib_0,\quad c_1=a_1+ib_1,\quad c_r(p,\,q)=a_r(p,\,q)+ib_r(p,\,q). \tag{26}$$

Целые положительные числа p, q, r удовлетворяют неравенствам $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, $r \geqslant 2$. Каждое из чисел p, q принимает все значения ряда чисел 1, 2, 3 ... r. Наконец, суммирование распространено на систему значений p и q, удовлетворяющую равенству $p + q = r$.

В силу формулы (25) функция $f(w)$ оказывается многозначной, имея две точки разветвления α и β порядка r на оси абсцисс плоскости w (рис. 2). Из выражения для производной $\frac{dz}{dw}$ убеждаемся, что ее модуль делается бесконечно большим в точках α и β, а соответствующее этим точкам значение скорости обращается в нуль. Для бесконечно удаленных точек

$$z = w\left[c_1 + \sum_{p+q=r} c_r(p, q)\right], \quad \frac{dz}{dw} = c_1 + \sum_{p+q=r} c_r(p, q). \tag{27}$$

Таким образом, скорость жидкости на бесконечно большом расстоянии от твердого тела оказывается постоянной по величине и направлению. Отделяем в последнем уравнении вещественную и чисто мнимую части, сохраняя все сделанные ранее обозначения

$$\frac{v_{x\infty}}{v_\infty^2} = a_1 + \sum_{p+q=r} a_r(p, q), \quad \frac{v_{g\infty}}{v_\infty^2} = b_1 + \sum_{p+q=r} b_r(p, q). \tag{28}$$

Убеждаемся, что при выполнении неравенства

$$a_1 + \sum_{p+q=r} a_r(p, q) > 0 \tag{29}$$

$v_x > 0$, т. е. движение жидкости совершается в положительном направлении координатной оси Ox. Кроме того, при этом устанавливается соответствие между верхней полуплоскостью w и частью плоскости z, расположенной со стороны положительного направления координатной оси Oy и ограниченной бесконечными ветвями линии тока l, а также верхней частью контура цилиндра. Аналогичное замечание можно сделать для нижней полуплоскости w.

Выше отмечалась многозначность функции $f(w)$. Для изучения всех ее ветвей на плоскости w проведен разрез $\alpha\beta$. Построим многолистную поверхность Римана, осуществляющую непрерывный переход одной ветви функции $f(w)$ в другую, после чего она может рассматриваться как однозначная. Решение поставленной задачи зависит от того, на каком именно листе рассматривается значение $f(w)$. Каждое из совокупности возможных решений соответствует определенным образом выбранному значению множителя $w^{\frac{p}{r}}$ и подобных ему, входящих в формулу (25) для z и определяющих ту или другую ветвь упомянутой функции. Для этого вводим на плоскости w полярные координаты какой-либо точки Q по формулам

$$w = \varrho e^{\theta i}, \quad w - w_0 = \varrho' e^{\theta' i}. \tag{30}$$

Границы изменения полярных углов θ и θ' зависят от индекса листа поверхности Римана. Для существования в действительности движений рассматриваемого типа необходимо, чтобы корни уравнения $\frac{dz}{dw} = 0$ соответствовали точкам плоскости z, расположенным внутри контура цилиндра. Это условие накладывает некоторые ограничения в форме неравенств на коэффициенты формулы (25) конформного преобразования. Так, если в формуле (25) все коэффициенты c_1, c_2, c_r (p, q) действительны, т. е. $b_1 = b_2 = b_r(p, q) = 0$, в движении жидкости существует плоскость симметрии. Ось абсцисс на плоскости z является одной из линий тока и служит для контура цилиндра осью симметрии. Можно без труда показать, что при этом корни уравнения $\frac{dz}{dw} = 0$ будут удовлетворять сформули-

рованному выше условию, если вещественные коэффициенты a_1, a_2, a_r (p, q) имеют один знак (достаточное условие).

Далее определим неопределенные постоянные $\gamma_0^{(1)}, \gamma_0^{(2)}$, входящие в систему уравнений (23). С этой целью равенство (25), определяющее функцию z, переписываем в форме

$$z = c_0 + w\left[c_1 + \sum_{p+q=r} c_r(p, q)\left(1 - \frac{w_0}{w}\right)^{\frac{q}{r}}\right], \tag{31}$$

которая после разложения функции z в бесконечный ряд при достаточно больших значениях модуля $|w|$, удовлетворяющих неравенству $|w| > w_0$, принимает вид

$$z = c_0 + w\left[c_1 + \sum_{p+q=r} c_r(p, q)\right] - \frac{w_0}{r} \sum_{p+q=r} q c_r(p, q) + \ldots \tag{32}$$

Сравнение полученного разложения с рядом (8) дает равенства

$$\gamma_1 = \gamma_1^{(1)} + i\gamma_1^{(2)} = \frac{1}{v_\infty^2}(v_x + iv_y) = c_1 + \sum_{p+q=r} c_r(p, q),$$

$$\gamma_0 = \gamma_0^{(1)} + i\gamma_0^{(2)} = c_0 - \frac{w_0}{r} \sum_{p+q=r} q c_r(p, q), \tag{33}$$

из которых первое нам уже известно и было использовано для определения коэффициентов $\gamma_1^{(1)}$ и $\gamma_1^{(2)}$ по формулам (13). Второе же позволяет найти значения коэффициентов

$$\gamma_0^{(1)} = a_0 - \frac{w_0}{r} \sum_{p+q=r} q a_r(p, q), \quad \gamma_0^{(2)} = b_0 - \frac{w_0}{r} \sum_{p+q=r} q b_r(p, q). \tag{34}$$

Затем переходим к форме обтекаемого контура. Для этого найдем параметрическое уравнение верхней и нижней частей контура. Ограничиваясь первым листом поверхности Римана, для верхней стороны отрезка $\alpha\beta$ имеем

$$\theta = 0, \ \theta' = \pi, \ \varrho' = w_0 - \varrho, \ w = \varrho, \ w - w_0 = \varrho e^{\pi i}$$

и соответственно для нижней

$$\theta = 2\pi, \ \theta' = \pi, \ \varrho' = w_0 - \varrho, \quad w = \varrho e^{2\pi i}, \ w - w_0 = (w_0 - \varrho) e^{\pi i}.$$

Подстановка в равенство (25) и отделение вещественной и чисто мнимой частей дают искомое параметрическое уравнение

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1\varrho + \sum_{p+q=r} A_r(p, q)\, \varrho^{\frac{p}{r}} (w_0 - \varrho)^{\frac{q}{r}}, \\ y &= b_0 + b_1\varrho + \sum_{p+q=r} B_r(p, q)\, \varrho^{\frac{p}{r}} (w_0 - \varrho)^{\frac{q}{r}}, \end{aligned} \tag{35}$$

где введены сокращенные обозначения

$$\begin{aligned} A_r(p, q) &= a_r(p, q)\cos\frac{\pi q}{r} \mp b_r(p, q)\sin\frac{\pi q}{r}, \\ B_r(p, q) &= \pm a_r(p, q)\sin\frac{\pi q}{r} + b_r(p, q)\cos\frac{\pi q}{r}. \end{aligned} \tag{36}$$

Верхние знаки в формулах для A_r (p, q) и B_r (p, q) относятся к верхней части контура, а нижние к нижней. Переменный параметр ϱ изменяется в пределах $0 \leqslant \varrho \leqslant w_0$ и в наших прежних обозначениях тождественно совпадает с параметром t и функцией σ, т. е. $\varrho = t = \sigma$. Аналогичный прием позволил бы при помощи равенства (25) найти параметрические

уравнения левой и правой бесконечных ветвей линии тока l (рис. 1). Для левой ветви

$$\theta = \theta' = \pi,\ \varrho' = w_0 + \varrho,\ w = \varrho e^{\pi i},\ w - w_0 = (w_0 + \varrho) e^{\pi i},\ 0 \leqslant \varrho \leqslant +\infty$$

и для правой

$$\theta = \theta' = 0,\ \varrho' = \varrho - w_0,\ w = \varrho,\ w - w_0 = \varrho - w_0,\ w_0 \leqslant \varrho \leqslant +\infty.$$

Можно представить параметрическое уравнение (31) контура в другой форме, исключая все входящие в него иррациональности. С этой целью введем на основании формулы

$$t^r = \frac{\varrho}{w_0 - \varrho} \tag{37}$$

вместо ϱ новый пареметр t, изменяющийся в пределах $0 \leqslant t < +\infty$. После этого параметрическое уравнение контура (35) с учетом (36), принимает вид

$$\begin{aligned} x &= a_0 + \frac{w_0}{1+t^r}\left[a_1 t^r + \sum_{p+q=r} A_r(p,\ q)\, t^p\right], \\ y &= b_0 + \frac{w_0}{1+t^r}\left[b_1 t^r + \sum_{qp+=r} B_r(p,\ q)\, t^p\right]. \end{aligned} \tag{38}$$

Вводя обозначения

$$a_1' = w_0 a_1,\quad b_1' = w_0 b_1,\quad A_r'(p, q) = w_0 A_r(p, q),\quad B_r'(p,\ q) = w_0 B_r(p,\ q), \tag{39}$$

переписываем равенства (38) в форме

$$\begin{aligned} x &= a_0 + \frac{1}{1+t^r}\left[a_1' + \sum_{p+q=r} A_r'(p,\ q)\right], \\ y &= b_0 + \frac{1}{1+t^r}\left[b_1' + \sum_{p+q=r} B_r'(p,\ q)\, t^p\right]. \end{aligned} \tag{40}$$

Переходим к исключению параметра t из двух предыдущих алгебраических уравнений порядка r. Результат может быть представлен в форме симметричного определителя того же порядка. Итак, обтекаемый контур представляет совокупность двух алгебраических кривых порядка r. Заметим, что в рассматриваемом случае контур не представляет самой общей алгебраической кривой порядка r, уравнение которой содержит $\frac{(r+1)(r+2)}{2} - 1$ произвольных параметров, между тем как уравнение контура их содержит только $2(r+1) - 1$. Разность указанных чисел обращается в нуль только при $r = 2$ и возрастает вместе с r. Следовательно, найденное решение задачи приводит к обтеканию самой общей алгебраической кривой только при $r = 2$ (эллипс). Если же порядок r кривой возрастает, то найденное решение будет соответствовать все более и более частным случаям алгебраических кривых, правда произвольно высокого порядка, принадлежащих к типу уникурсальных кривых.

Теперь можно без труда указать вид функций $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(\tau)$, дающих решение интегро-дифференциальных уравнений (23) для специального случая обтекаемого контура, параметрическое уравнение которого может быть представлено в форме (38) или (40). При этом достаточно ввести только одну функцию $\sigma(t)$ и один параметр t, характеризующие координаты точек обеих частей контура, так как использованное выше конформное преобразование определяет обе части контура. Как следует из сказанного, функция $\sigma(t)$ и может быть найдена в результате решения относительно ϱ равенства (37). Таким образом,

$$\sigma(t) = \frac{w_0 t^r}{1+t^r}, \tag{41}$$

Полученное равенство и представляет решение системы (23) функциональных уравнений. Если же параметрическое уравнение обтекаемого контура задано в форме (35), решение имеет вид $\sigma(\varrho) = \varrho = t$. В частном случае может быть иная форма решения системы уравнений (35). Пусть, например, $r = 2$ (обтекание эллиптического контура). Этот случай впервые был изучен Ламбом [3] при помощи эллиптических координат.

В упомянутом случае $r = 2, p = q = 1$ и после введения упрощенных обозначений $c_r(p, q) = c_2$, $a_r(p, q) = a_2$, $b_r(p, q) = b_2$ формула (25) конформного преобразования преобразуется следующим образом

$$z = x + iy = a_0 + ib_0 + (a_1 + ib_1) w + (a_2 + ib_2) w^{\frac{1}{2}} (w - w_0)^{\frac{1}{2}}, \qquad (42)$$

где, как и ранее, $a_1 + a_2 > 0$. Отделение в равенстве (42) вещественной и чисто мнимой частей дает параметрическое уравнение эллипса, как частный случай уравнения (35)

$$x = a_0 + a_1 \varrho \mp b_2 \varrho^{\frac{1}{2}} (w_0 - \varrho)^{\frac{1}{2}}, \quad y = b_0 + b_1 \varrho \pm a_2 \varrho^{\frac{1}{2}} (w_0 - \varrho)^{\frac{1}{2}}, \qquad (43)$$

где $0 \leqslant \varrho \leqslant w_0$ и взято арифметическое значение входящего сюда радикала. Выбор переменного параметра, вообще говоря, совершенно произволен. Например, вместо переменного параметра ϱ можно ввести ν при помощи соотношения

$$\frac{\varrho}{w_0} = \sin^2 \nu, \qquad (44)$$

после чего уравнение эллипса примет вид

$$x = \Phi(\nu) = a_0 + g_1 \sin^2 \nu + g_2 \sin \nu \cos \nu,$$
$$y = \Psi(\nu) = b_0 + g_3 \sin^2 \nu + g_4 \sin \nu \cos \nu, \qquad (45)$$

где

$$g_1 = a_1 w_0, \; g_2 = -b_2 w_0, \; g_3 = b_1 w_0, \; g_4 = a_2 w_0.$$

Значение w_0 находится при помощи уравнений (28) из равенства

$$\frac{w_0^2}{v_\infty^2} = (g_1 + g_4)^2 + (g_3 - g_2)^2. \qquad (46)$$

Направление скорости потока жидкости в бесконечности найдется из равенства

$$\frac{v_{y\infty}}{v_{x\infty}} = \frac{g_3 - g_2}{g_1 + g_4}. \qquad (47)$$

Когда переменный параметр ν изменяется в интервале $0 \leqslant \nu \leqslant \pi$, точка $N(x, y)$ пробегает весь контур эллипса в положительном направлении. В критических точках (рис. 1) параметр ν принимает соответственно значения 0 и $\frac{1}{2}\pi$.

Приведем значение постоянных

$$\gamma_1^{(1)} = \frac{1}{w_0}(g_1 + g_4), \quad \gamma_1^{(2)} = \frac{1}{w_0}(g_3 - g_2),$$
$$\gamma_0^{(1)} = a_0 - \frac{1}{2} g_4, \quad \gamma_0^{(2)} = b_0 + \frac{1}{2} g_2.$$

В соответствии с равенствами (37) и (44) $t = \operatorname{tg} \nu$, и решение систем (23) и (24) принимает вид

$$\sigma(\nu) = w_0 \sin^2 \nu, \quad \mu = \pi - \lambda. \qquad (48)$$

В заключение рассмотрим случай обтекания круглого цилиндра, как частный случай эллиптического, изучавшийся Стоксом и Максвеллом [4]. Проведем ось абсцисс через центр круга параллельно направлению

скорости жидкости v_∞ в бесконечно удаленных точках и поместим начало координат в плоскости z в точке a набегания потока на контур, где $z = 0$. В точке схода b имеем $z = g$ (g — диаметр круга). Уравнение окружности представляем в виде

$$x = \Phi(\nu) = g\sin^2\nu, \quad y = \Psi(\nu) = g\sin\nu\cos\nu, \qquad (0 \leqslant \nu \leqslant \pi). \tag{49}$$

Функция $f(w)$ примет вид

$$z = f(w) = cw + cw^{\frac{1}{2}}(w - w_0)^{\frac{1}{2}}, \tag{50}$$

где

$$c = \frac{1}{2v_\infty}, \quad w_0 = 2gv_\infty = \frac{g}{c}.$$

Функция $\sigma(\nu)$ имеет тот же вид, что и в случае эллипса, так же как и соотношение (48), связывающее λ и μ.

Значения коэффициентов

$$\gamma_0 = -\frac{1}{2}g, \quad \gamma_1 = \frac{1}{v_\infty} = 2c.$$

Решение поставленной задачи для окружности может быть представлено в ином виде, если исходить из другого параметрического уравнения этой окружности. В самом деле, полагая для упрощения $w_0 = 1$ и, следовательно, $g = c$, имеем

$$x = \Phi(\varrho) = c\varrho, \quad y = \Psi(\varrho) = \pm c\varrho^{\frac{1}{2}}(1 - \varrho)^{\frac{1}{2}}, \qquad (0 \leqslant \varrho \leqslant 1). \tag{51}$$

Тогда

$$\sigma(\varrho) = \varrho. \tag{52}$$

Остается путем подстановки в исходные уравнения (23) проверить правильность полученного решения. Действительно, $\Phi = \Phi_1(\lambda) = \Phi_2(\mu)$ и в силу симметрии $\Psi = \Psi_1(\lambda) = -\Psi_2(\mu)$.

Итак, второе из уравнений (23) обращается в тождество и сохраняется только первое, приобретающее вид

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\Psi(\varrho) - \Psi(\lambda)}{\sigma(\varrho) - \sigma(\lambda)}\,d\sigma(\varrho) + \frac{\Psi(\lambda)}{\pi}\ln\frac{1 - \sigma(\lambda)}{\sigma(\lambda)} + \gamma_1\sigma(\lambda) + \gamma_0. \tag{53}$$

Подинтегральная функция интеграла правой части равенства (53) при $\varrho = \lambda$ обращается в неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которая после введения вместо ϱ нового независимого переменного оказывается конечным числом.

Выполнение квадратуры дает

$$\int_0^1 \frac{\Psi(\varrho) - \Psi(\lambda)}{\sigma(\varrho) - \sigma(\lambda)}\,d\sigma(\varrho) = \frac{c}{2}\pi(1 - 2\lambda) + c\sqrt{\lambda(1 - \lambda)}\ln\frac{\lambda}{1 - \lambda}. \tag{54}$$

Полученный результат обращает равенство (53) в тождество.

ЛИТЕРАТУРА

1. Неронов Н. П. О приведении одной плоской задачи гидродинамики к решению системы функциональных уравнений. Прикладная математика и механика. 1938, т. I, № 3.
2. Kirchhoff G. Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik, Vorl. 22, 1876.
3. Lamb H. Hydrodynamics, 1924, p. 79.
4. Enzykl. math. Wissenschaften. B. IV. Teil 3, 1901—1908, S. 92.