Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLIV, вып. 3, 1964 г.

УДК 517.564

О РАБОТЕ ПРОФЕССОРА М. И. АКИМОВА «О ФУНКЦИЯХ БЕССЕЛЯ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ В МЕХАНИКЕ»

Н. П. Неронов

Среди работ профессора М. И. Акимова на первом месте по своему значению стоит его диссертация «О функциях Бесселя многих переменных и их приложениях в механике»[1].

Как известно, при одном независимом переменном x через Бесселевы функции первого и второго рода порядка n выражается общий интеграл

$$u = C_1 I_n(x) + C_2 Y_n(x) \tag{1}$$

линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$u'' + \frac{1}{x} u' - \left(1 - \frac{u^2}{x^2}\right) u = 0. \tag{2}$$

Функции I_n впервые введены Бесселем при решении относительно

$$u = \xi + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} I_k(ke) \sin k\xi, \tag{3}$$

уравнения Кеплера

$$u - e \sin u = \xi. \tag{4}$$

Как легко показывается,

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(ku - x \sin u)\, du. \tag{5}$$

Естественно рассматривать обобщенное уравнение Кеплера

$$u - e_1 \sin u - e_2 \sin 2u - e_3 \sin 3u - \ldots = \xi, \tag{6}$$

к которому приводятся многие задачи механики, требующие обращения определенного интеграла

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm \sqrt{(1-x^2) F(x)}} = t - t_0, \quad -1 \leqslant x \leqslant +1. \tag{7}$$

Эту задачу при некоторых предположениях относительно функции $F(x)$ К. Вейерштрасс [4] путем подстановки $x = \cos u$, разложения подинтегральной функции в тригонометрический ряд и последующего интегрирования привел к решению относительно u обобщенного уравнения Кеплера. Это решение, являющееся периодической функцией времени t,

[1] См. Зап. ЛГИ, 1928, т. VII, вып. 2, стр. 27—105; 1929, т. VII, вып. 3, стр. 1—67.

ЛГИ

также представляется тригонометрическим рядом с коэффициентами в форме определенных интегралов

$$u = \xi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} I_n (ne_1,\ ne_2,\ ne_3, \ldots) \sin n\xi, \tag{8}$$

которые П. Аппель [5] предложил рассматривать как обобщение функции $I_n(x)$ Бесселя на случай многих переменных

$$I_n (x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos (nu - x_1 \sin u - x_2 \sin 2u - x_3 \sin 3u - \ldots)\, du. \tag{9}$$

М. И. Акимов ограничился замечанием о том, что число переменных x_1, x_2, x_3... при некоторых ограничениях для них может и не оставаться конечным.

Заметим, что обобщение функции Бесселя на случай многих переменных встречается также у Е. Т. Уиттекера [6]. Однако надо согласиться с мнением М. И. Акимова, что введенные П. Аппелем функции представляют гораздо более глубокую аналогию с обыкновенными функциями Бесселя, чем функции Е. Т. Уиттекера. Поэтому функции П. Аппеля сразу стали предметом изучения многих математиков. Так, Ж. Перес [7] дал интересные рекуррентные соотношения между ними. Затем Б. Жеховский [8] указал некоторые разложения рассматриваемых функций в бесконечные ряды. Члены этих рядов содержат те же функции, но от переменных, число которых на единицу меньше, чем у разлагаемой функции. Б. Жеховский впоследствии стал на путь прямого заимствования некоторых результатов М. И. Акимова из литографированной диссертации до опубликования ее в печати. Это было своевременно отмечено в ряде журналов, в том числе и широко распространенных реферативных.

Однако только М. И. Акимову действительно удалось дать исчерпывающее исследование этих функций, проведя полную и глубоко заходящую аналогию между функциями Бесселя от многих переменных и классическими функциями того же наименования от одного переменного.

Перед анализом работы М. И. Акимова полезно осветить ее значение для механики и с этой целью остановиться на исторической стороне вопроса. Как известно, только в сравнительно немногочисленных случаях задачи динамики можно решить в замкнутой форме, пользуясь аппаратом теории тех или других специальных функций. Вообще же говоря, в результате интегрирования дифференциальных уравнений движения неизвестные функции выражаются бесконечными рядами, к которым приводит применение метода последовательных приближений или разложение интегралов дифференциальных уравнений по целым положительным степеням некоторых малых параметров. Однако даже при заведомой периодичности движения такой прием в большинстве случаев приводит к рядам, содержащим так называемые вековые (секулярные) члены, в которых время фигурирует в качестве множителя. Так как на практике приходится ограничиваться суммой только первых членов этих рядов, то применение полученных разложений возможно лишь для сравнительно небольших интервалов времени. Другими словами, обычные способы интегрирования дифференциальных уравнений движения дают интегралы этих уравнений в таком виде, когда периодичность движения, благодаря наличию вековых членов, является как бы затушеванной, хотя сам ряд и может быть сходящимся для произвольно больших значений времени при достаточной малости упомянутых выше параметров.

Для устранения этого были предложены различные способы. Один из них основан на применении для первого приближения эллиптических

функций вместо тригонометрических. Он крайне затрудняет отыскание последующих приближений. Другой, принадлежащий А. Линдштедту [9], основан на соответствующем подборе значений произвольных постоянных интегрирования и введении вместо времени t другого независимого переменного τ ($t = k\tau$, k — постоянный, надлежащим образом подбираемый множитель).

Тем не менее в общем случае вопрос о сходимости полученных таким образом разложений остается открытым. Он приобретает еще большую остроту, так как наряду с частными примерами несомненной сходимости разложений указаны и такие, когда эта сходимость подвергается сильному сомнению (Пуанкаре). С именем Пуанкаре [14] связано также обоснование метода малого параметра, нашедшего применение в современной теории нелинейных колебаний М. Н. Крылова и Н. Н. Боголюбова [2], И. Г. Малкина [3] и других авторов. Поэтому естественно искать решение дифференциальных уравнений движения, свободное от вековых членов, другим путем, именно исходя не из самих дифференциальных уравнений движения, а из их первых интегралов. Такой интеграл в простейшем случае дается теоремой о кинетической энергии, а в случаях весьма общих — теоремой Лиувилля — Штекеля. Указанный путь решения задачи вызывает необходимость обращения интеграла (7), что и было выполнено в первый раз Вейерштрассом, столкнувшимся при таком обращении с функциями Бесселя от многих переменных (по позднейшей терминологии Аппеля).

Таким образом, функции Бесселя от многих переменных, теорией которых занимался М. И. Акимов, помимо чисто математического интереса, который они несомненно представляют, тесно связаны с основной проблемой динамики, заключающейся в интегрировании дифференциальных уравнений движения.

М. И. Акимову принадлежит глубокое изучение свойств этих функций, указание различных способов их вычисления, а также нахождение их асимптотических выражений в некоторых частных случаях. Многочисленные примеры приложения теории, приведенные в рассматриваемой диссертации, относятся к области небесной механики, аналитической механики, теории упругости, теории нелинейных колебаний.

Для теории гравитационных методов геофизической разведки представляет интерес изучение М. И. Акимовым движения математического и сферического маятников.

Обращаясь к содержанию аналитической части работы, отметим прежде всего найденное М. И. Акимовым выражение производящей функции, коэффициентами разложения которой в степенной ряд являются функции Бесселя многих переменных. Эта производящая функция имеет вид

$$e^{\frac{1}{2}x_1(t-t^{-1})+\frac{1}{2}x_2(t^2-t^{-2})+\frac{1}{2}x_3(t^3-t^{-3})+\ldots} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n(x_1, x_2, x_3, \ldots)\, t^n. \qquad (10)$$

С ее помощью М. И. Акимов получает целый ряд замечательных разложений функций Бесселя от многих переменных: сначала в кратные ряды по произведениям классических функций Бесселя; затем в простые ряды по произведениям полиномов особого вида, рекуррентные соотношения для последовательного вычисления которых также даются М. И. Акимовым. В случае одного переменного ряды по произведениям полиномов приводятся к известным степенным рядам для обыкновенных функций Бесселя $I_n(x)$. Наконец, указывается разложение по полиномам, аналогичным полиномам Г. Гильдена [11], а также в кратные ряды, эквивалентные разложениям по полиномам. Не довольствуясь этими разложениями в ряды, М. И. Акимов, обобщая результат Н. И. Сонина [10], дает интегральное представление функций Бесселя от многих переменных в виде

контурного интеграла в комплексной области. Выбирая надлежащим образом контур интегрирования, М. И. Акимов выводит ряд новых представлений функций Бесселя от многих переменных, позволяющих установить теорему сложений, обобщить определение функции $I_n(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ на случай любого, не обязательно целого значения индекса n, а также дать определение Бесселевой функции $Y_h(x)$ второго рода на случай многих переменных. Результаты, полученные различными авторами в теории функций Бесселя одного переменного, теперь можно рассматривать только как частные случаи более общей теории.

Большое место в исследовании М. И. Акимова отведено приложениям разработанной им теории. Была решена задача о малых колебаниях системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия, ранее исследованная И. Горном [13]. Интересно рассмотрение системы двух обобщенных уравнений Кеплера. Такая система встречается в теории так называемого условно периодического движения, которое иллюстрируется на примере движения сферического маятника. М. И. Акимов получил результаты, аналогичные результатам Ф. Тиссерана [12].

Значение исследований М. И. Акимова по теории функций Бесселя многих переменных теперь общепризнано в Советском Союзе и за рубежом. Они неоднократно цитировались Аппелем в его известной монографии, посвященной гипергеометрическим функциям. Реферативные журналы обстоятельно рецензируют работы М. И. Акимова. В курсе теоретической механики Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье (1934) есть глава, посвященная решению задач механики методом М. И. Акимова. А. А. Фридман придавал большое значение методу М. И. Акимова и подробно излагал его на лекциях.

Из других работ М. И. Акимова по механике следует отметить исследования, в которых рассматривается движение весомой частицы по шероховатой поверхности на основе предложенного нами метода [1]. М. И. Акимов установил поверхности, на которых возможно движение частицы по винтовой линии и затем исследовал вопрос об устойчивости этого частного движения. Задача эта имеет большое значение для теории спирального сепаратора, применяющегося в горно-обогатительном и агрономическом деле.

Остальные работы М. И. Акимова носят чисто математический характер и относятся как к теории специальных функций (гипергеометрические функции, функции кругового и параболического цилиндров, полиномы Якоби), так и к отдельным теоремам высшей алгебры и анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Неронов Н. П. О некоторых задачах динамики, связанных с горно-обогатительным делом. Зап. ЛГИ, 1934, т. VIII.
2. Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Киев, 1937.
3. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
4. Weiersrass K. Monatsberichte Berliner Academie, 1866, p. 97—115.
5. Appell P. E. Traité de Mécanique rationnelle. T. I. Paris, 1926, p. 340—343, 427.
6. Whitlaker E. T. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, 1917.
7. Pérès I. Compt. rend., 1915, t. 161, p. 168—170.
8. Iekhowsky B. Compt. rend., 1921, t. 172, p. 1331—1332.
9. Lindstedt A. Mem. Acad. Sci. Petersbourg, 1883, série V, t. XXXI, N 4.
10. Sonine N. I. Math. Ann., 1880, B. XVI, p. 1—80.
11. Gyldèn H. Traité analytique des orbites absolues. T. I, 1893.
12. Tisserand F. Traité de mécanique céleste. T. I, 1889; t. IV, 1896.
13. Horn I. Z. Math. Phys., 1902, B. 47, s. 400; 1903, B. 49, s. 246.
14. Goursat E. Cours d'analyse mathématique. T. III, 1927, p. 20.