Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLIV, вып. 3, 1964 г.

УДК 534.012 (048) и 622.673 (048)

ОБЗОР ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ УСИЛИЙ В ШАХТНЫХ ПОДЪЕМНЫХ КАНАТАХ

П. А. Журавлев, А. Ф. Захаревич

В статье поставлена задача изложить историю последовательного развития теории определения динамических усилий в шахтных подъемных канатах, отмечая все наиболее существенные моменты, отраженные в работах различных коллективов СССР, и опуская некоторые небезынтересные работы, относящиеся к вопросам частного или дискуссионного характера.

В первоначальной постановке данная проблема трактуется как задача математической физики о колебаниях упругой нити переменной длины с грузом на конце. В дальнейшем постановка задачи была усложнена учетом особенностей шахтного подъема и конструкции каната: геометрией строения каната, предварительной деформацией проволок при изготовлении каната, изгибом каната на направляющем шкиве и барабане, многоканатным подъемом и подъемом с хвостовым канатом, распределением напряжений по сечению каната, его усталостной прочностью, износом, условиями пуска и пр. Эти вопросы еще находятся в стадии разрешения и лишь частично отражены в настоящей статье.

Вопрос об определении усилий в подъемных канатах по постановке и методам решения тесно связан с задачей о продольных колебаниях упругих стержней. Эта задача разрабатывается давно и имеет большую литературу. Еще в начале XIX в. Пуассон изучал свободные колебания вертикального призматического стержня постоянной длины с закрепленным верхним концом и грузом на нижнем конце. Эту задачу он свел к определению одной функции из уравнения, аналогичного продолжающему уравнению Сен-Венана. Однако, не развивая этого метода, Пуассон решает задачу иначе — путем разложения искомого решения в ряд по фундаментальным функциям задачи. Близкими по постановке задачами, относящимися к удару груза о стержень, к удару двух призматических или конический стержней, и другими смежными вопросами занимались Т. Юнг, Л. Навье, Ж. Понселе, Е. Филлипс, Б. Сен-Венан, Ж. Буссинеск. Результаты работ Сен-Венана и Ж. Буссинеска изложены А. Лявом [26]. Мы не задаемся целью подробно освещать отмеченные работы раннего периода, так как они достаточно полно рассмотрены А. С. Локшиным [24] с приведением подробной библиографии.

Все эти работы носили теоретический характер и не ставили задачей дать приложения к вопросам шахтного подъема. Работа Перри, Лява и Ричардсона, близкая к этим исследованиям, ставит практическую задачу определения динамических усилий в канатах постоянного сечения и постоянной длины, возникающих при внезапной остановке верхнего

конца каната [62]. Решение дается через разрывные функции в замкнутой форме.

Исследованием этого же вопроса, независимо от Перри и его соавторов, занимался А. Н. Динник [10], который дал более простое решение через одну функцию. Ему же принадлежит исследование и ряда других задач, имеющих большой практический интерес: например, задачи об усилии в канате при равноускоренном движении верхнего конца [11]. Решения были получены в замкнутой форме и в виде рядов. А. Н. Динник вывел в основном согласующуюся с экспериментом очень простую формулу для модуля упругости каната простой и двойной свивки [12]. Другими исследователями предложен также экспериментальный способ определения этого модуля по скорости распространения упругой волны.

А. Н. Динник [10, 11] и Перри [62] ограничились шахтными канатами постоянной длины и постоянного сечения. Монография же А. С. Локшина представляет существенный шаг вперед в изучении усилий в шахтных подъемных канатах переменной длины. В первой части этой работы рассматриваются канаты переменного сечения, но постоянной длины. Изучаются динамические усилия в коническом канате, в канате равного сопротивления растяжению и в канате, сечение которого меняется по более сложному показательному закону. Рассматриваются различные специальные условия: сообщение начальной скорости только подвешенному к канату грузу, внезапная нагрузка нижнего конца каната, внезапная остановка верхнего конца каната и, наконец, равнопеременное движение верхнего конца каната. Заметим, что в первых трех случаях вдоль каната будет распространяться сильный разрыв непрерывности. В связи с этим следует отметить некоторую искусственность в постановке такого рода задач. Так, например, мгновенная остановка вращающегося барабана, на который навит канат, конечно, с механической точки зрения невозможна, так как всякий процесс торможения имеет некоторую, хотя бы и малую, длительность, а тогда распространяющиеся по канату прерывности будут не сильными, а слабыми. Решения А. С. Локшина даются в виде бесконечных рядов по фундаментальным функциям задачи, которые образуют неортогональную систему. Примененный способ нуждается в аналитическом обосновании. Для конического каната дано решение в замкнутой форме.

Во второй части А. С. Локшин рассматривает канаты постоянного сечения, но переменной длины, впервые учитывая массу и вес каната при больших высотах подъема. При небольших высотах подъема, когда массой каната можно пренебречь, автор сводит задачу к интегрированию приближенно составленного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Для случая больших высот подъема получено уравнение в частных производных типа волнового уравнения. Интеграция уравнений проводится для равномерного и равнопеременного вращений барабана, на который навивается канат.

Детально исследовав уравнения А. С. Локшина, Н. П. Неронов [27, 28, 30, 32] установил, что дифференциальное уравнение задачи для малых высот подъема неточно, а для больших высот вызывает принципиальное возражение. Н. П. Неронов пересмотрел в связи с этим вторую часть работы А. С. Локшина. При этом для малых высот подъема он получил обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка [27, 28]. Решение этого уравнения показывает, что при пренебрежении внутренними сопротивлениями амплитуда усилия в канате возрастает в каждом из трех периодов трапецеидальной тахограммы подъема [34, 35]. Однако следует иметь в виду, что учет сопротивлений изменит это заключение.

В случае больших высот подъема вид дифференциального уравнения существенно зависит от выбора начала отсчета абсциссы x. Поместим начало координат в точке C набегания каната на барабан, направив коор-

динатную ось вниз (см. рисунок). Тогда абсцисса X какого-либо сечения M каната будет иметь вид

$$X = x + u(x, t),$$

где x — нормальная (при отсутствии сил) длина части MC каната; $u(x, t)$ — ее деформация.

Натяжение каната

$$T = k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

где k — постоянная величина.

При вычислении скорости $\frac{dX}{dt}$ и ускорения $\frac{d^2X}{dt^2}$ рассматриваемого элемента каната длина x должна считаться переменной, так как при навивании каната на барабан нормальная длина x части MC каната при зафиксированной точке M будет функцией времени t. Это обстоятельство не было учтено А. С. Локшиным, поэтому исходное уравнение задачи, использованное им, не совпадает с точным уравнением Н. П. Неронова.

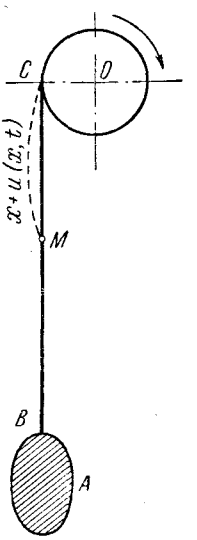


Схема подъема груза.

Уравнение А. С. Локшина [24, стр. 105]

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

Уравнение Н. П. Неронова [32, стр. 73]

$$v'(t) + [v^2(t) - c^2] \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + v(t) \times$$

$$\times \left[2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} \Big|_{x=0} \right] + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = g,$$

где $$c^2 = \frac{k}{\varrho}, \quad k = EF,$$

E — модуль упругости каната;
F — площадь поперечного сечения каната;
ϱ — масса единицы каната;
$v(t)$ — скорость навивания каната на барабан;
g — ускорение силы тяжести.

Поместив начало координат в точке B подвеса груза, Н. П. Неронов получил уравнение задачи в более простом виде

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - b \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \qquad (2)$$

соответственно упростив и граничные условия $\left(b = \frac{k}{m}, m \text{ — масса груза}\right)$[1].

Решая уравнение (2), Н. П. Неронов исследовал вопрос о динамических усилиях в канате при больших высотах как при подъеме, так и при опускании груза [29, 31—33, 36—39]. Оказалось, что усилие в канате существенно зависит от характера разрыва непрерывности, имеющего ме-

[1] Вычислительный аппарат, необходимый для решения уравнений (1) и (2), существенно различен, что было выявлено Я. М. Глушко [6].

сто при подъеме или опускании груза [32, 37]: будет ли этот разрыв сильным [разрыв в первой производной от функции u (x, t)], или слабым (разрыв в производных второго порядка и выше).

Для решения уравнения (2) Н. П. Неронов применил метод характеристик с использованием уравнения типа продолжающего уравнения Сен-Венана. Этот метод позволяет вычислить усилие T каната в любой его точке в функции времени t. Решение получается в замкнутой форме через разрывные функции. Был найден соответствующий алгоритм определения зависимости $T = T(t)$ и применен к численному определению динамического усилия в канате в точке подвеса груза и в точке набегания каната на барабан [41—44].

Наличие внутренних сопротивлений, уменьшающих амплитуду колебаний, позволяет ограничиться моментами времени, близкими к началу равномерного вращения, в которых и будет иметь место максимум усилия за данный период тахограммы.

Исследования упругих деформаций в канате при опускании груза, как с учетом, так и без учета массы и веса каната [30, 31] показывают, что вид дифференциальных уравнений задачи существенно зависит от характера деформации элементов каната, лежащих на барабане и включающихся в движение вместе с системой по мере сматывания каната с барабана.

Решение задачи Н. П. Неронов значительно упростил, пренебрегая изменением длины каната за малые промежутки времени, и решил ее методом Пуассона — Фурье [37], представив искомую функцию в виде ряда по фундаментальным функциям задачи. Несколько позже им предложена приближенная формула для определения усилия в канатах [40].

Пользуясь выводами работ Н. П. Неронова [40, 41, 43], П. А. Журавлев и А. Ф. Захаревич определили усилия в канате в точке подвеса груза и в точке набегания каната на барабан в конкретном примере для равномерного вращения барабана [13, 14] и дали числовую оценку результирующего запаса прочности каната (отношение разрывающей канат нагрузки к наибольшему натяжению), который оказался на 18% меньше статического запаса прочности. Применив приближенный метод [37] для определения динамических усилий в точке подвеса груза и в точке набегания каната на барабан за весь период подъема по трапецеидальной тахограмме, они получили [15, 17, 42] приближенную формулу определения максимального усилия в канате, согласующуюся с формулой Г. Н. Савина [56]. Числовой пример обнаружил, что наибольшее усилие превышает статическую нагрузку на 20% [15].

Проведенный П. А. Журавлевым анализ расчетной формулы для усилия в канате при трапецеидальной тахограмме подъема [17] показал, что при данном статическом запасе прочности каната результирующий запас прочности слабо зависит от глубины подъема, возрастая незначительно вместе с глубиной. Наибольшее усилие в канате в точке набегания каната на барабан превышает статическую нагрузку в той же точке не больше, чем на 21%, независимо от глубины подъема.

Большое число работ, посвященных исследованию натяжений в подъемных шахтных канатах, принадлежит Г. Н. Савину и его последователям. В этих работах рассматривается целый ряд практически важных задач, относящихся к канатам переменной длины как для малых, так и для больших высот подъема и спуска [46—56].

Приближенный учет сопротивления по гипотезе Фойгта за весь период подъема показывает, по данным Г. Н. Савина, что наибольшее натяжение каната получается в первые моменты приведения груза в движение. Метод Б. Г. Галеркина использовали А. Ю. Ишлинский [21] и Г. Н. Савин, который предложил новый приближенный метод решения рассматриваемой задачи [50]. По этому методу основное дифференциальное уравнение в частных производных задачи заменяется системой n интегро-

дифференциальных, а затем и системой n обыкновенных дифференциальных уравнений. Искомая функция ищется в виде квадратичной функции абсциссы x точки M каната с переменными коэффициентами. Коэффициенты зависят только от времени и подлежат определению, т. е.

$$u(x, t) = x\varphi(t) + x^2\Psi(t). \qquad (3)$$

Такая форма интеграла требует начальных условий также в виде квадратичной функции переменного x.

Для определения двух неизвестных функций времени из системы интегро-дифференциальных соотношений берутся первые два, что и приводит к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Остальные $n - 2$ уравнения остаются неиспользованными. В порядке дальнейшего упрощения автор полагает $u = x\varphi(t)$ и для определения неизвестной функции $\varphi(t)$ удерживает, полагая $n = 1$, только первое из упомянутых уравнений. При помощи асимптотического выражения интеграла этого уравнения он приходит к неравенству, дающему условие затухания колебательного процесса в канате. В это условие входят скорость подъема, глубина шахты, вес груза, погонный вес каната, коэффициент сопротивления, а также коэффициент пропорциональности в формуле Фойгта.

Предложенный Г. Н. Савиным приближенный метод неоднократно применялся в его работах и в работах его последователей [48—53].

Можно указать такие законы движения каната, когда приближенный метод Г. Н. Савина дает точное решение: например, при равноускоренном вращении барабана с соответствующими начальными условиями.

Работы Г. Н. Савина и О. А. Горошко посвящены в основном динамике нитей переменных длин применительно к динамике шахтного подъема [55, 56]. Предлагается новая форма основного дифференциального уравнения движения каната, определяющего неизвестное абсолютное удлинение $u(x, t)$,части каната длиной x в функции времени t. Эта форма оказывается проще, чем в исследованиях других авторов, благодаря тому, что длина x, соответствующая произвольно взятому сечению вертикальной части каната, отсчитывается от его конца, закрепленного на ободе барабана. Два граничных условия составляются обычным путем с учетом скольжения каната по ободу барабана. Затем авторы приводят поставленную задачу к решению интегро-дифференциального уравнения и для канатов постоянной длины получают уже известные решения. Для канатов переменной длины в силу трудности задачи дают лишь приближенное решение, применимое в случае слабой зависимости от времени ядра и пределов интегрирования, и основанное на использовании асимптотических методов в соединении с методом Б. Г. Галеркина.

При таком положении целесообразно сравнить полученные результаты с точным решением Н. П. Неронова, выраженным через разрывные функции в ограниченном числе интервалов их изменения, поскольку внутренние сопротивления в канате действуют в сторону затухания колебаний. В заключение отметим, что мы не видим основания представлять усилие каната в комплексной форме [54, 56], которая исключает числовое определение этого усилия.

Ю. Д. Соколов предложил метод осреднения (по аргументу x) инерционных членов дифференциального уравнения динамики шахтного подъема. Деформация каната задается в форме (3). Задача сводится к интегрированию системы двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с рационально зависящими от времени коэффициентами [57]. Этим методом пользуется А. А. Ющенко в задачах о колебании нити с переменной массой на конце. Полученные уравнения интегрировались численно на электронной машине [60, 61].

А. Ю. Ишлинский решает задачу о динамических усилиях в идеально упругой нити переменной длины методом Б. Г. Галеркина [22].

Тем же методом В. Е. Шаманский и В. Н. Шевело [59] исследовали задачу о колебаниях упруго-вязкой нити переменной длины.

Я. М. Глушко для составления приближенных дифференциальных уравнений задачи использовал принцип возможных перемещений [7], исходя из задания удлинения каната в форме (3). Уравнения решаются асимптотическим методом.

Различными вопросами экстренного торможения и внезапного приложения груза занимался Ф. В. Флоринский [58]. Пользуясь методом обобщенных координат, он дал решение упомянутых задач в виде рядов и в замкнутой форме для канатов постоянной длины.

В работах И. Н. Денисюка [8, 9] для определения усилия в канатах постоянной длины использованы выведенные им полиномы, аналогичные полиномам Лагерра, и применен операционный метод, значительно сокращающий объем вычислений.

Операционный метод применялся также к канатам постоянной длины В. Д. Белым [1], Г. П. Ксюниным [23], И. А. Локшиным [25].

В. В. Георгиевская изучала влияние напуска на динамическое усилие в канате и дала решение в замкнутой форме [2]. П. А. Журавлев, А. Ф. Захаревич предложили для решения того же вопроса использовать метод Пуассона — Фурье [16].

Динамика опускающейся и поднимающейся ветвей подъемного каната с грузами на концах исследовалась в нескольких работах. Так, Р. Ф. Ильин [20], пренебрегая массой каната для малых высот подъема, составил уравнения Лагранжа второго рода и нашел интегралы этих уравнений в асимптотической форме. Сопротивления учитывались по гипотезе Фойгта. О. А. Залесов в своих двух работах различными методами составил дифференциальные уравнения движения указанной системы, учитывая массу каната и заменяя приближенно навивание каната на барабан и его сматывание с барабана процессом поднятия и опускания верхних концов ветвей каната с грузами [18, 19]. Дифференциальные уравнения работы [19] не вызывают возражений.

В ряде работ М. Ф. Глушко рассматривал распределение напряжений по сечению каната с учетом его кручения. Он поставил вопрос о выводе дифференциальных уравнений задачи, исходя из принципа Гамильтона-Остроградского и гипотезы плоских сечений [3, 4]. Автор применил обобщенные уравнения Кирхгофа [45] для приближенной оценки напряжений в проволоках статически деформированного спирального каната [5].

Ряд работ посвящен оценке влияния внутренних сопротивлений в канате. Однако этот вопрос не получил еще окончательного разрешения, так как природа внутренних сопротивлений еще не достаточно ясна и структура самого каната очень сложна.

Проблему прочности каната нельзя считать окончательно разрешенной, поскольку до сих пор точно неизвестны напряжения в отдельных проволоках движущегося каната.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белый В. Д. Динамические усилия в шахтных подъемных канатах. Тр. МакНИИ, 1959, т. IX, вып. 2.

2. Георгиевская В. В. Влияние напуска каната на динамические усилия в нем. ДАН УССР, 1958, вып. 2.

3. Глушко М. Ф. К вопросу о дифференциальных уравнениях статики и динамики подъемных канатов. Тр. ХГИ, 1958, т. V.

4. Глушко М. Ф. Динамические уравнения подъемного каната с учетом крутильных колебаний. Научн. докл. высшей школы. Горное дело, 1959, № 1.

5. Глушко М. Ф. Исследование деформаций и напряжений в спиральных канатах с учетом действительных условий контакта проволок. Изв. вузов. Горный журнал, 1961, № 11.

6. Глушко Я. М. Динамические усилия в подъемных канатах переменной длины. Тр. МакНИИ, 1959, т. IX, вып. 2.
7. Глушко Я. М. К вопросу об определении динамических усилий в шахтном подъемном канате переменной длины. Вопросы горной электромех., 1960, т. XI, вып. 3.
8. Денисюк И. Н. К расчету тормозного каната канатного парашюта. Научн. тр. Москов. горного ин-та, 1952, сб. 10.
9. Денисюк И. Н. Решение задачи об экстренном торможении в шахтной подъемной установке в полиномах. Сб. «Рудничный подъем», Металлургиздат, 1953.
10. Динник А. Н. Динамические натяжения в подъемном канате при внезапной остановке верхнего конца. Южный инженер, 1917, № 2—4.
11. Динник А. Н. Динамические напряжения в подъемном канате при равноускоренном движении его верхнего конца. Бюлл. Екатеринославского горного ин-та, 1918.
12. Динник А. Н. О работе по теории упругости кафедры теории упругости при АН УССР. Прикл. матем. и механ., 1933, т. I, вып. 2.
13. Журавлев П. А. и Захаревич А. Ф. К вопросу о числовой оценке максимальных натяжений в подъемном шахтном канате при нормальном режиме подъема. Изв. вузов. Горный журнал, 1959, № 10.
14. Журавлев П. А. и Захаревич А. Ф. К числовой оценке наибольшего натяжения шахтного подъемного каната в точке подвеса груза при равномерном вращении барабана. Зап. ЛГИ, 1961, т. XXXIX, вып. 3.
15. Журавлев П. А. и Захаревич А. Ф. Приближенный метод определения наибольшего натяжения шахтного каната за весь период подъема. Зап. ЛГИ, 1961, т. XXXIX, вып. 3.
16. Журавлев П. А. и Захаревич А. Ф. О влиянии напуска на натяжение каната. Зап. ЛГИ, 1961, т. XXXIX, вып. 3.
17. Журавлев П. А. и Захаревич А. Ф. К вопросу о динамических напряжениях в подъемных канатах. Изв. вузов. Горный журнал, 1963, № 3.
18. Залесов О. А. Износ канатов и принципы построения переменной шкалы запасов их прочности. Научн. докл. высшей школы. Горное дело, 1958, № 1.
19. Залесов О. А. Коэффициенты и условия подобия динамических систем с распределенными сосредоточенными постоянными. Научн. докл. высшей школы. Горное дело, 1958, № 2.
20. Ильин Р. Ф. О динамике опускающейся и поднимающейся ветвей подъемного каната. Прикл. механ., 1957, т. III, № 3.
21. Ишлинский А. Ю. Об одном интегро-дифференциальном соотношении в теории упругой нити (каната) переменной длины. Укр. математич. журн., 1953, т. V, № 4.
22. Ишлинский А. Ю. Об уравнении продольных движений каната (упругой нити) переменной длины. ДАН СССР, 1954, т. 95, № 5.
23. Ксюнин Г. П. Операционное решение задачи о динамических напряжениях в струне и свесившейся части рудничного подъемного каната при экстренном торможении. Тр. Новочеркасского политехнического ин-та, 1959, т. 67.
24. Локшин А. С. О динамических напряжениях в подъемных канатах. Горный журн. Приложение, 1929, № 12.
25. Локшин И. А. О торможении головного и хвостового канатов с грузом в случаях переменного ускорения верхнего конца головного каната. Научн. докл. высшей школы, 1959, № 2.
26. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
27. Неронов Н. П. О напряжениях в подъемном канате. Прикл. матем. и механ., 1936, т. III, № 1.
28. Неронов Н. П. О напряжениях в канате при подъеме груза. Зап. ЛГИ, 1937, т. X, вып. 3.
29. Неронов Н. П. Об упругих деформациях в подъемном канате. Прикл. матем. и механ., 1937, т. I, № 1.
30. Неронов Н. П. О напряжениях в канате при опускании груза. Прикл. матем. и механ., 1939, т. III, вып. 3.
31. Неронов Н. П. Об упругих деформациях в канате при опускании груза. Прикл. матем. и механ., 1940, т. IV, вып. 1.
32. Неронов Н. П. О некоторых вопросах, связанных с определением напряжений в подъемных канатах. Прикл. матем. и механ., 1940, т. IV, вып. 2.
33. Неронов Н. П. Определение упругих деформаций в канате при опускании груза. Зап. ЛГИ, 1941, т. XIV.
34. Неронов Н. П. Определение напряжений в подъемных канатах для малых высот подъема и спуска. Зап. ЛГИ, 1946, т. XIX.
35. Неронов Н. П. О границах области изменения напряжений в подъемном канате. ДАН СССР, 1946, т. LIV, № 4.
36. Неронов Н. П. Определение напряжений в подъемном канате. ДАН СССР, 1947, т. LVII, № 8.

37. Неронов Н. П. Определение напряжений в подъемных канатах для больших высот подъема и спуска. Зап. ЛГИ, 1948, т. XX.
38. Неронов Н. П. О расчете подъемных шахтных канатов. Зап. ЛГИ, 1954, т. XXXII, вып. 1.
39. Неронов Н. П. К вопросу об определении напряжений в подъемных канатах. Зап. ЛГИ, 1958, т. XXXIV, вып. 3.
40. Неронов Н. П. О максимальных натяжениях в подъемном шахтном канате при нормальном режиме подъема. Изв. вузов. Горный журн., 1959, № 10.
41. Неронов Н. П. Определение наибольших натяжений в подъемном шахтном канате при нормальном режиме подъема. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1960, № 3.
42. Неронов Н. П., Журавлев П. А., Захаревич А. Ф. Применение метода характеристик к численному определению натяжения подъемного шахтного каната переменной длины. Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Изд-во АН СССР, 1960.
43. Неронов Н. П. Определение напряжений в шахтном подъемном канате для точки подвеса груза. Зап. ЛГИ, 1961, т. XXXIX, вып. 3.
44. Неронов Н. П. Определение усилий в шахтном подъемном канате для точки его набегания на барабан и точки подвеса груза. Зап. ЛГИ, 1964, т. XLIV, вып. 3.
45. Попов Е. П. Нелинейные задачи статики тонких стержней. ОГИЗ. Гостехиздат, 1948.
46. Савин Г. Н. Динамические усилия в подъемном канате при снятии груза с неподвижного основания. ДАН УССР, 1954, № 2.
47. Савин Г. Н., Георгиевская В. В. Динамические усилия в подъемном канате при снятии груза с неподвижного основания. ДАН УССР, 1954, № 3.
48. Савин Г. Н. и Шевело В. Н. О динамических усилиях в подъемных канатах для неглубоких шахт (подъем груза). ДАН УССР, 1954, № 2.
49. Савин Г. Н. О динамических усилиях в шахтном подъемном канате при подъеме груза. ДАН СССР, 1954, XCVII, вып. 1.
50. Савин Г. Н. Об основных уравнениях динамики шахтного подъемного каната (подъем груза). Прикл. механ., 1955, т. I, вып. 1.
51. Савин Г. Н., Шевело В. Н., Кужий А. И. О продольных колебаниях упруго-вязкой нити переменной длины с грузом на конце (опускание груза). Прикл. механ., 1955, т. I, вып. 3.
52. Савин Г. Н., Шевело В. Н., Кужий А. И. О продольных колебаниях нити переменной длины с учетом внутреннего трения гистерезисного типа. Прикл. механ., АН УССР, 1956, т. II, вып. 2.
53. Савин Г. Н., Шевело В. Н., Ющенко А. А. О колебаниях весомой не вполне упругой нити (каната) переменной длины. Прикл. механ., 1958, т. IV, вып. 4.
54. Савин Г. Н. Исследование динамики шахтных подъемных канатов и их запасы прочности. Сб. «Прочность и износ горного оборудования». Госгортехиздат, 1959.
55. Савин Г. Н., Горошко О. А. Интегро-дифференциальные уравнения движения объектов переменных размеров. ДАН УССР, 1960, № 7.
56. Савин Г. Н., Горошко О. А. Динамика нити переменной длины. Изд-во АН УССР, 1962.
57. Соколов Ю. Д. Об определении динамических усилий в шахтных подъемных канатах. Прикл. механ. АН УССР, 1955, т. I, вып. 1.
58. Флоринский Ф. В. Динамика шахтного подъемного каната. Углетехиздат, 1955.
59. Шаманский В. Е. и Шевело В. Н. Об уравнениях колебаний нити (каната) переменной длины. ДАН УССР, 1958, № 5.
60. Ющенко А. А. Об уравнениях колебаний упруго-вязкой нити (каната) с переменной массой на конце. ДАН УССР, 1956, № 3.
61. Ющенко А. А. О продольных колебаниях нити с переменной массой на конце. Укр. матем. журн., 1956, т. VIII, № 4.
62. Perry, Love, Richardson. Phil. Mag., Ser. 6, 1906, v. II.